

## К вопросу о безотрывном движении шара на гладкой плоскости

**В. В. Васькин, О. С. Наймушина**

Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская 1  
vaskin@udsu.ru, russsalka@mail.ru

*Получено 03 декабря 2009 г.*

Проведен анализ областей безотрывного движения осесимметричного шара со смещенным центром масс на гладкой плоскости. Показано, что область безотрывного движения лежит в области параметров, соответствующих режиму регулярной прецессии (ось шара вокруг оси  $z$ ). Также приведены явные формулы для границ областей.

Ключевые слова: твердое тело, безотрывное движение по гладкой плоскости

**V. V. Vaskin, O. S. Naymushina**

### On the motion of a ball without bouncing on a smooth plane

We analyze domains of an axisymmetric ball with the shifted center mass motion without bouncing (i. e. in constant contact) on a smooth plane. We show that these domains belong to the region of parameters, corresponding to regimes of regular precession (the ball's axis about axis  $z$ ). We also give explicit formulas for domain boundaries.

Keywords: rigid body, motion without bouncing on a smooth plane

Mathematical Subject Classifications: 37N15

Задача о движении симметричного тела по гладкой плоскости является классической задачей, разными аспектами которой занимались С. Д. Пуассон, В. Пуанкаре и Ф. Клейн [1]. Среди современных работ отметим [2, 3, 4]. Задача является лагранжевой с голономной связью, интегрируемой как в области безотрывного движения, так и в области отрыва. Однако вопрос о сходе тела со связи остался до конца не исследован.

В работе Розенблата [6] сделана попытка проанализировать зависимость области безотрывного движения тела на гладкой плоскости на примере осесимметричного шара со смещенным центром масс. Однако при правильных исходных уравнениях движения результаты ненаглядны, некорректны и неверны.

## 1. Уравнения движения и сведение к квадратурам

В данной работе мы рассмотрим осесимметричный шар со смещенным по оси симметрии центром масс и опишем его области безотрывного движения. Выберем неподвижную систему координат, такую, что центр шара находится на плоскости  $z = 0$ .

Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgz, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  — координаты центра масс шара;  $\theta, \varphi, \psi$  — углы Эйлера относительно неподвижной системы;  $A, C$  — главные моменты инерции шара.

В силу уравнения голономной связи (центр шара находится на плоскости  $z = 0$ ), координата центра масс:

$$z = b \cos \theta, \quad \dot{z} = -b \sin \theta \dot{\theta}, \quad (2)$$

где  $b$  — расстояние от центра шара до центра масс.

У этой системы есть пять интегралов движения:

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= p_x, & m\dot{y} &= p_y, \\ A \sin^2 \theta \dot{\varphi} + C \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) &= p_\varphi, \\ C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) &= p_\psi, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_\psi \dot{\psi} - L = E. \quad (4)$$

Первые два интеграла приводят к тому, что центр масс движется равномерно и прямолинейно в плоскости  $z = 0$ . В системе координат, которая движется горизонтально вместе с центром масс,  $p_x = p_y = 0$ , учет других интегралов (3) и связи (2) приводит к выражению для энергии

$$E = \frac{1}{2}(A + mb^2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2C} + mgb \cos \theta. \quad (5)$$

Определим безразмерные переменные

$$t\sqrt{\frac{g}{b}} = \tau, \quad \cos \theta = u \quad (6)$$

и параметры движения

$$\frac{E}{mgb} = e, \quad \frac{p_\varphi}{mb\sqrt{gb}} = p, \quad \frac{p_\psi}{mb\sqrt{gb}} = q, \quad \frac{C}{mb^2} = c, \quad \frac{A}{mb^2} = a, \quad (7)$$



получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\tau} \right)^2 = \frac{(e - \frac{q^2}{2c} - u)(1 - u^2) - \frac{1}{2}(p - uq)^2}{a + 1 - u^2} = F(u). \quad (8)$$

## 2. Область возможных движений и области безотрывных движений

Область возможных движений (ОВД) определяется условием положительности правой части уравнения (8)

$$F(u) \geq 0,$$

или, поскольку знаменатель в (8) всегда больше нуля:

$$F_1(u) = (e - \frac{q^2}{2c} - u)(1 - u^2) - \frac{1}{2}(p - uq)^2 \geq 0, \quad (9)$$

то есть кубическое неравенство относительно переменной  $u$ .

Условие безотрывного движения — неотрицательность нормальной силы реакции связи:

$$N = mg - m\ddot{z} \geq 0. \quad (10)$$

В безразмерных переменных, используя (8), получаем

$$\frac{N}{mg} = 1 + \frac{dF(u)}{du} = \frac{N_1(u)}{(a + 1 - u^2)^2} \geq 0 \quad (11)$$

или, учитывая положительность знаменателя, находим

$$N_1(u) = c(a + qp)u^2 - (2eac + cp^2 + q^2(ac + c - a))u + c(1 + a)(a + qp) \geq 0, \quad (12)$$

то есть квадратичное неравенство для  $u$ .

Заметим, что эти неравенства содержат в качестве параметров три динамические величины — интегралы движения  $e$ ,  $p$ ,  $q$  — безразмерные энергия, импульс по  $\varphi$ , импульс по  $\psi$  и два кинематических параметра  $a$  и  $c$  — безразмерные моменты инерции.

Границы области существования движения и границы области отрыва задаются уравнениями

$$F_1(u) = 0, \quad -1 \leq u \leq 1, \quad (13)$$

$$N_1(u) = 0, \quad -1 \leq u \leq 1. \quad (14)$$

Уравнение (13) имеет три корня —  $u_1, u_2, u_3$ , а уравнение (14) — два корня  $u_4, u_5$ , как функции параметров  $e, p, q, a, c$ .

На рис. 1 приведены типичные графики решения этих уравнений как функции энергии  $e$  при фиксированных значениях других параметров.

Кривые 1, 2, 3 — корни уравнения (13), определяют ОВД шара. Кривые 4, 5 — корни уравнения (14), определяют границы отрыва.

Таким образом, из рис. 1 видно, что при фиксированных  $p, q, a, c$  имеется две характерные энергии  $e_0(p, q)$  и  $e_1(p, q)$  (далее  $a$  и  $c$  считаются заданными), так что:

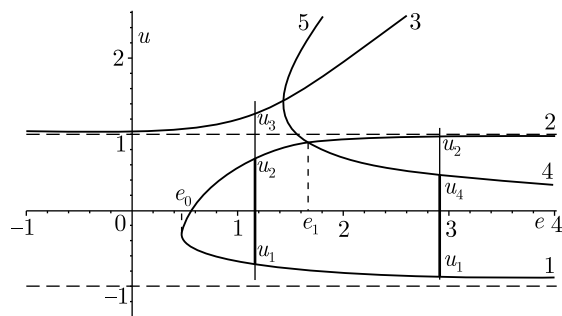


Рис. 1. Решение уравнения  $F_1(u) = 0$  (кривые 1, 2, 3) и уравнения  $N_1(u) = 0$  (кривые 4, 5) как функции  $e$  ( $p = 1, q = 1/2, a = 1, c = 2$ ).

- 1) при энергиях меньше  $e_0(p, q)$  движения невозможны, то есть  $e > e_0(p, q)$  определяет область возможных движений ( $u_1 < u < u_2$ ), до энергии  $e \leq e_1(p, q)$  нормальная сила реакции положительна, то есть движение безотрывное во всей области ( $u_1 \leq u \leq u_2$ );
- 2) при энергиях  $e > e_1(p, q)$  в области доступного движения появляется область  $u_4 < u < u_2$ , где сила реакции отрицательна. Это означает, что область безотрывного движения находится в области  $u_1 < u < u_4$ , где и следует задавать начальные условия. Начальная скорость может быть как положительной, так и отрицательной:  $\dot{u}(0) = \pm \sqrt{2F(u(0))}$ . Отрыв будет происходить в точке  $A$ , где  $u(\tau_0) = u_4 = 0$  и  $\dot{u}(\tau_0) = \sqrt{2F(u_4)}$ . Именно в этой точке тело сходит со связи и начинается свободное движение тела в поле тяжести (рис. 2);

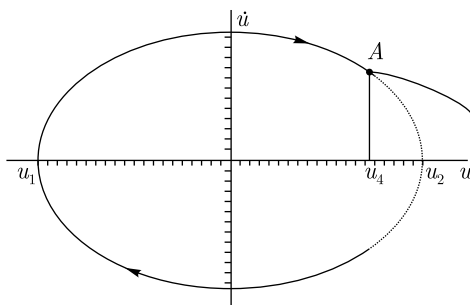


Рис. 2. Фазовая траектория при движении с отрывом. Начальные условия лежат на сплошной кривой. Отрыв происходит в точке  $A$ .

- 3) область доступных движений по энергии (при фиксированных  $p, q, a, c$ ) начинается с энергии  $e_0(p, q)$  при которой область между  $u_1$  и  $u_2$  сходится к точке. Это условие слияния корней в уравнении (13) можно записать в виде уравнения

$$F_2(u) = \frac{dF_1(u)}{du} = 3u^2 - \left(2e - \frac{e-1}{c}q^2\right)u - 1 + pq = 0 \quad (15)$$

при условии  $F_1(u) = 0$ .

Два уравнения (13) и (15) задают поверхность параметров  $e, p, q$ ,  $e = e_0(p, q)$ , при которых шар движется в режиме регулярной прецессии ( $\theta = \theta_0$ ), когда центр масс находится

на одной высоте. Эти уравнения могут быть разрешены параметрически:

$$\begin{aligned}
 p &= p_0(s, u) = (1 + u) \operatorname{ch} s + (1 - u) \operatorname{sh} s, & q &= q_0(s, u) = (1 + u) \operatorname{ch} s - (1 - u) \operatorname{sh} s, \\
 e &= e_0(s, u) = \frac{1}{2c} [2c(1 - u^2) \operatorname{ch} s \operatorname{sh} s + (2u^2(1 - c) + 2c + 1) \operatorname{ch}^2 s - u^2(1 - c) - c + 2u(c + 1)], \\
 & & & -1 \leq u \leq 1, \quad -\infty < s < \infty.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Вид этой поверхности показан на рис. 3 (внешняя поверхность). Заметим, что эта поверхность не зависит от параметра  $a$ . При значениях параметров  $e, p, q$ , лежащих внутри области, ограниченной поверхностью, движение шара возможно. Вне же этой области — движение невозможно.

Поверхность отрыва, где  $N_1(u) = 0$  вместе с уравнением  $F_1(u) = 0$ , также можно получить в параметрическом виде в пространстве  $(p, q, e)$  при  $c = 2$

$$\begin{aligned}
 p &= p_1(s, u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \operatorname{sh} s + \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \operatorname{ch} s, \\
 q &= q_1(s, u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \operatorname{sh} s - \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \operatorname{ch} s, \\
 e &= e_1(s, u) = \frac{1}{4(1-u^2)} [2(1-u^2) \operatorname{ch} s \operatorname{sh} s + 2(3-u^2) \operatorname{ch}^2 s - (1+u)(4u^2 - 5u + 3)], \\
 & & & -1 \leq u \leq 1, \quad -\infty < s < \infty.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Эта поверхность изображена на рис. 3 (внутренняя поверхность). При значениях параметров  $e, p, q$ , лежащих внутри области, движение тела имеет точку отрыва. Вне этой области — движение является безотрывным.

Общий вид этих поверхностей при  $a = 1, c = 2$  приведен на рис. 3.

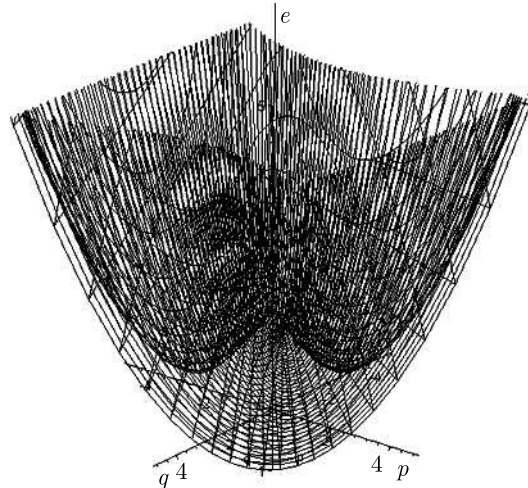


Рис. 3. Общий вид поверхностей, ограничивающих область безотрывного движения в пространстве параметров  $e, p, q$ .

### 3. Границы областей возможного и безотрывного движений

Для более наглядного представления о границах областей рассмотрим сечения этих поверхностей следующими плоскостями:

$$q = p, \quad q = -p, \quad q = 0, \quad p = 0. \quad (18)$$

А также получим явные уравнения границ этих областей. Подставляя уравнения плоскостей (18) в уравнения (13) и (15), можно их разрешить.

- Плоскость сечения, определяемая уравнением  $q = 0$ ,

$$p_0^2(e) = \frac{4}{27}((e^2 + 3)^{\frac{3}{2}} + e(9 - e^2)),$$

$$e_1(p) = \frac{2a^2 + 4a + p^4 + p^2\sqrt{p^4 + 4a^2}}{2(p^2 + \sqrt{p^4 + 4a^2})}.$$

- Плоскость сечения, определяемая уравнением  $q = p$ ,

$$e_0(p) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2}\frac{(1-c)}{c}p^2 + 2|p|, & |p| \leq 2, \\ 1 + \frac{p^2}{2c}, & |p| \geq 2, \end{cases}$$

$$e_1(p) = 1 + \frac{a}{2} + \frac{p^2}{2c}.$$

- Плоскость сечения, определяемая уравнением  $p = 0$ . Граница возможного движения задается параметрически:

$$q_0^2(u) = \left(\frac{(1-u^2)^2}{u}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad e_0(u) = \frac{(1-u^2)^2 - cu}{2cu},$$

$$-1 \leq u \leq 1,$$

$$e_1(q) = \frac{2ca^2 + 4ca + q^4 + q^2\sqrt{q^4 + 4a^2}}{2c(q^2 + \sqrt{q^4 + 4a^2})}.$$

- Плоскость сечения, определяемая уравнением  $q = -p$ ,

$$e_0(p) = -1 + \frac{p^2}{2c},$$

$$e_1(p) = \frac{p^4 + p^2(a + ca - 2c) + c(2 + a^2)}{2c(p^2 + a)}.$$

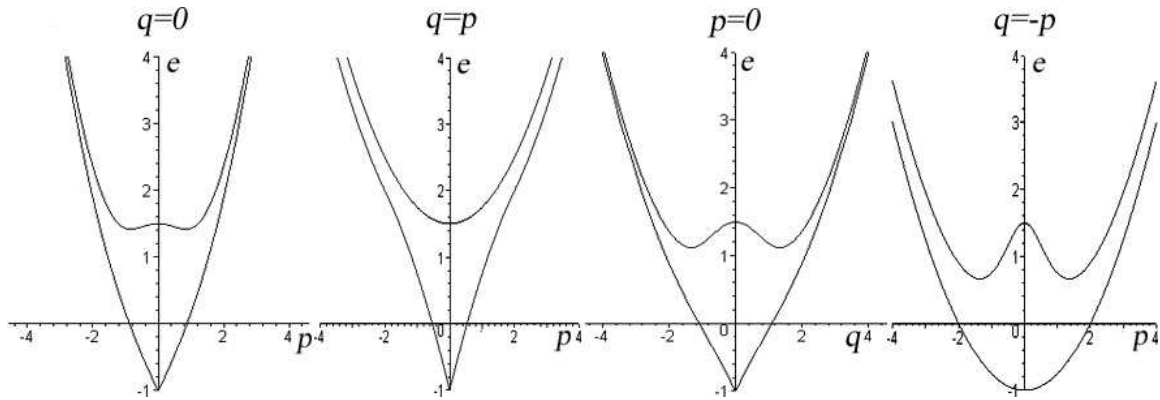


Рис. 4. Границы области безотрывного движения в сечениях:  $q = 0$ ,  $q = p$ ,  $p = 0$ ,  $q = -p$ .

Вид этих сечений приведен на рис. 4.

Таким образом, безотрывному движению шара на плоскости соответствует односвязная область параметров, лежащая между этими двумя поверхностями (рис. 3): поверхностью регулярной прецессии и поверхностью отрыва. При низких энергиях область безотрывного движения начинается с минимально возможной энергии ( $e = -1$ ), когда шар покоится, далее с ростом энергии эта область расширяется. Максимальная энергия, при которой движение шара еще безотрывное при допустимых значениях импульсов  $p$  и  $q$ , зависит от кинематических параметров  $a$  и  $c$  и равна

$$e_{\min} = \frac{1}{2c}[(c - 1)a - 2c + 2\sqrt{(1 - c)a^2 + 2c(a + 1)}].$$

С увеличением энергии поверхность отрыва приближается к поверхности регулярной прецессии, которая, как мы уже отмечали, является поверхностью параметров, соответствующих регулярной прецессии оси шара вокруг оси  $z$ .

Параметры регулярной прецессии находятся из тех же уравнений (13) и (15):

$$F_1(u, p, q, e) = 0,$$

$$F_2(u, p, q, e) = 0,$$

которые разрешаются относительно  $e$  и  $u$ :

$$e = e_0(p, q), \quad u = u_0(p, q).$$

Первое уравнение, как уже говорилось, определяет область параметров возможного движения, а второе определяет угол  $\theta_0$  ( $\cos \theta_0 = u_0$ ), под которым ось шара прецессирует вокруг оси  $z$ . Вид этих поверхностей приведен на рис. 5.

Таким образом, рассмотрение показало, что область безотрывного движения расположена вблизи поверхности регулярной прецессии, когда центр масс находится на одной высоте. Особенно это заметно при больших энергиях, когда расстояние между поверхностью регулярной прецессии и поверхностью отрыва стремится к нулю и амплитуда нутации уменьшается с ростом энергии.

В дальнейшем возможно развитие этой работы в двух направлениях.



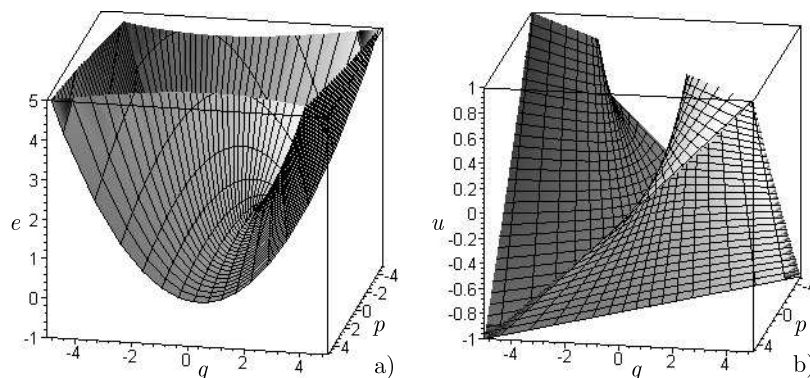


Рис. 5. Поверхности параметров однородной прецессии: а)  $e_0(p, q)$ , б)  $u_0(p, q)$ .

- Исследование условий отрыва в случае отсутствия динамической симметрии (несимметричность тензора инерции или смещение центра масс вдоль произвольной оси). Отметим, что в этом случае система становится неинтегрируемой и приведенный выше анализ непосредственно не может быть перенесен.
- Анализ условий отрыва шара при наличии вязкого и сухого трения (а также для случая абсолютно шероховатой плоскости, который описывается уравнениями неголомомной механики). В последнем случае могут возникать парадоксальные ситуации (отмеченные еще Пенлеве).

В заключение авторы выражают благодарность А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за привлечение внимания к этим задачам, а также за полезные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Klein F. The mathematical theory of the top. Chelsea, 1896. [Клейн Ф. Математическая теория волчка. М.–Ижевск: ИКИ, 2003.]
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [3] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992, 335 с.
- [4] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997, 336 с.
- [5] Иванов А. П. Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 287–302.
- [6] Розенблат Г. М. Метод определения параметров безотрывного движения волчка на гладкой плоскости // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 1, с. 87–98.