

## Аппроксимация тройных корреляций скорости в изотропной турбулентности<sup>1</sup>

К. Хассельманн

Рассматриваются тройные корреляции поля скорости, которые в уравнении Кармана–Ховарта описывают влияние сил инерции на обмен количеством движения между ограниченной сферической областью и ее окружением. Эта простая интерпретация позволяет понять действие сил инерции в изотропной турбулентности, которое в гайзенберговском представлении описывается как турбулентная вязкость, создаваемая крупными вихрями и влияющая на обмен импульса с мелкими вихрями. Предлагаемый подход позволяет получить существенно лучшее согласование с результатами измерений.

### Введение

Известно, что только статистическая теория изотропной турбулентности позволяет произвести исчерпывающий кинематический анализ турбулентного течения. Однако при анализе ряда вопросов, относящихся к динамике турбулентности, возникают трудности, природа которых заключается в том, что силы инерции до сих пор описываются неудовлетворительно. Все же существуют возможности теоретического анализа динамических закономерностей, основанные на использовании дополнительных гипотез, которые можно разделить на два класса: например, гипотезы подобия и гипотезы обмена. Гипотезы подобия позволяют получить основные характеристики турбулентного поля, такие как изменение общей энергии турбулентности при ее вырождении. Однако внутренняя структура поля турбулентности, т. е. форма энергетического спектра или корреляционная функция поля при таком подходе определены быть не могут. Поэтому гипотезы подобия не кажутся, в общем, физически основательно обоснованными. Экспериментально показано также, что гипотезы подобия действительно являются достаточно грубыми аппроксимациями. В гипотезах обмена, с другой стороны, просто постулируется основанная на определенных представлениях форма слагаемого в динамическом уравнении для энергетического спектра, описывающего влияние сил инерции на перенос энергии. При таком подходе трудно непосредственно определить, являются эти гипотезы хорошим приближением или нет, так как точное выражение для инерционного слагаемого в уравнении для энергетического спектра довольно сложным способом зависит от амплитуд и фаз разложения Фурье поля скорости. Поэтому гипотезы обмена так же, как гипотезы подобия, нужно понимать только как рабочие гипотезы.

---

<sup>1</sup>«Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz». Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Bd. 11, Heft 5, S. 207–217, 1958.

Хотя инерционное слагаемое в уравнении для спектра существенно сложнее, чем соответствующий член в математически эквивалентном уравнении для корреляционной функции, как правило, эти процессы пытались анализировать на основе уравнения для спектра, в котором физические процессы переноса энергии достаточно прозрачны. Несмотря на простоту корреляционного уравнения, до сих пор нет физически наглядного описания сил инерции в этом уравнении. В работе будет показано, что возможен новый вывод корреляционного уравнения, позволяющий дать наглядную интерпретацию отдельных его членов. Для этого действие инерционных сил, описываемое корреляциями третьего порядка, будет описано с помощью простых предположений, что позволит получить также и количественные результаты. По существу, удастся получить гайзенберговское представление о влиянии крупных вихрей на турбулентную вязкость, которая определяется обменом импульса с более мелкими вихрями. Разумеется, выбирается другое распределение энергии в крупных и мелких масштабах, которое лучше подходит для понимания инерционных членов в корреляционном уравнении. В дальнейшем, пути перемешивания, встречающиеся в выражении для турбулентной вязкости, принимаются не только зависящими от кинематической вязкости, но также от введенной динамической длины, вследствие чего влияние вязкости учитывается явно и достигается лучшее соответствие с экспериментом.

## Парные и тройные корреляционные функции поля скорости в изотропной турбулентности

Прежде чем на основе уравнения Навье–Стокса будет получено уравнение Кармана–Ховарта для корреляционной функции поля скорости, следует рассмотреть связи на корреляции, возникающие из кинематических условий изотропии и неразрывности. Хотя эти связи известны из тензорного анализа и теории инвариантов (Н. Р. Robertson [1940], S. Chandrasekhar [1953], G. K. Batchelor [1953]), полезно их получить также другим, более наглядным способом.

Использование при этом уравнения Навье–Стокса позволит получить физическую интерпретацию уравнения Кармана–Ховарта (Kármán T. von, Howarth L. [1938]).

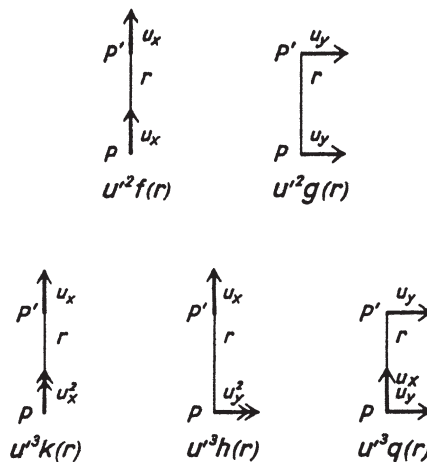


Рис. 1. Двойные и тройные корреляции поля скорости.

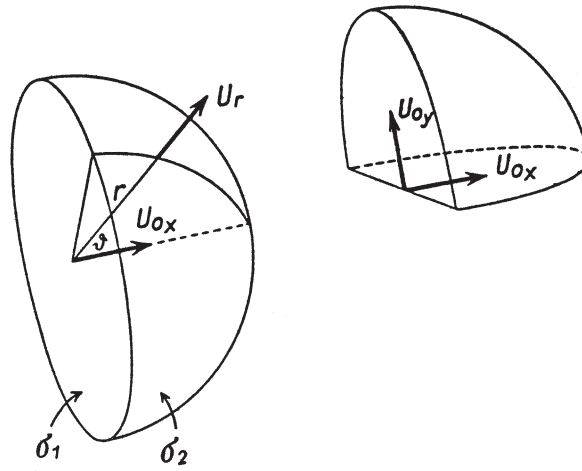


Рис. 2. Течение в рассматриваемой области.

Под общей парной корреляцией скоростей в точках  $P$  и  $P'$  (рис. 1) в изотропном поле турбулентности понимают среднее произведение:

$$R(\mathbf{r}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle u_a(P')u_b(P) \rangle, \tag{1}$$

в котором индексы  $a$  и  $b$  обозначают направления компонент скоростей, определяемые единичными векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{r}$  — вектор, связывающий точки  $P$  и  $P'$ , и правая часть (1) представляет статистическое среднее, вычисленное по независимым реализациям турбулентного поля. Из условия изотропии следует также однородность поля турбулентности, так как неисчезающий средний градиент может быть использован для введения некоторого направления, что нарушает условия изотропии. Таким образом, средние величины зависят только от расстояния между точками  $P$  и  $P'$ . Аналогично определяется тройная двухточечная корреляция скорости:

$$S(\mathbf{r}; \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \langle u_a(P')u_b(P)u_c(P) \rangle. \tag{2}$$

Корреляции более высоких порядков, хотя они, строго говоря, необходимы для полного статистического описания турбулентности, обычно не рассматриваются, так как их вычисление связано с существенно большими аналитическими трудностями. В случае изотропии средние произведения (1) и (2) зависят только от относительного положения вектора  $\mathbf{r}$  и единичных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Поэтому можно принять, что  $\mathbf{r}$  коллинеарен оси  $x$ , а вектор  $\mathbf{a}$  лежит в плоскости  $xy$  картезианской системы координат. Далее можно ограничиться случаем, когда единичные векторы параллельны осям, что позволит представлять средние произведения как линейные комбинации. При этом вектор  $\mathbf{a}$  лежит в плоскости  $xy$ , в то время как единичные векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  могут иметь любые направления. Имеется 6 таких комбинаций для  $R$  и 12 для  $S$ . Из изотропии, которая требует независимости от перестановок и отражений осей, тем не менее, сразу следует, что большая часть этих произведений исчезает, так что от парных корреляций остаются только произведения:

$$u'^2 f(r) = \langle u_x(P')u_x(P) \rangle, \tag{3}$$

$$u'^2 g(r) = \langle u_y(P')u_y(P) \rangle, \tag{4}$$

а от тройных корреляций только

$$u'^3 k(r) = \langle u_x(P') u_x^2(P) \rangle, \quad (5)$$

$$u'^3 h(r) = \langle u_x(P') u_y^2(P) \rangle = \langle u_x(P') u_z^2(P) \rangle, \quad (6)$$

$$u'^3 q(r) = \langle u_y(P') u_x(P) u_y(P) \rangle. \quad (7)$$

При этом, как обычно,  $u'$  обозначает корень от суммы средних квадратов компонент скорости,  $r$  — модуль  $\mathbf{r}$  и индексы  $x, y, z$  соответствуют компонентам скорости, параллельным координатным осям.

Сведение общих произведений (1) и (2) к скалярным функциям от  $r$  в уравнениях (3)–(7) следует единственно из условия изотропии. Из условия неразрывности следует, что эти функции не независимы.

Рассмотрим течение через полусферическую границу, как изображено на рис. 2. Для несжимаемой жидкости существует условие неразрывности:

$$-\int_{\sigma_1} u_n dS = \int_{\sigma_2} u_n dS;$$

здесь  $u_n$  — нормальные компоненты скорости на обеих границах полусферы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Умножая это равенство на  $x$ -компоненту скорости в центре и усредняя, имеем:

$$u'^2 \int_0^r r' g(r') dr' = u'^2 \int_0^{\pi/2} r^2 f(r) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{u'^2}{2} r^2 f(r);$$

и после дифференцирования:

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} f'(r), \quad (8)$$

здесь  $f' = \partial f / \partial r$ . Связь между продольной и поперечной парными корреляциями скорости (8) по этому методу впервые была получена Прандтлем (К. Wiegardt [1941]).

Подобным же образом можно вывести соотношения между тройными корреляциями. Умножая уравнение неразрывности на квадрат скорости в центре и усредняя, получим:

$$2h(r) + k(r) = 0. \quad (9)$$

Далее, умножая условие неразрывности, рассматриваемое на четверти сферы (как на рис. 2), на произведение  $x$ - и  $y$ -компонент скорости в центре, усредняя и выполняя дифференцирование:

$$q(r) = \frac{1}{2} k(r) + \frac{r}{4} k'(r). \quad (10)$$

С помощью уравнений (8)–(10) в общем случае можно выразить парные и тройные корреляции скорости (1) и (2) через некоторые скалярные функции  $r$ . С этой целью обычно выбираются продольные корреляции  $u'^2 f(r)$  и  $u'^3 k(r)$ , так как они могут быть непосредственно измерены. Поскольку корреляции инвариантны относительно зеркального отражения, то

$f(r)$  должна быть четной, а  $k(r)$  нечетной функциями от  $r$ . Разложение  $f(r)$  начинается с членов:

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + \frac{G}{4!} \frac{r^4}{\lambda^4} + \dots; \tag{11}$$

здесь длина диссипации  $\lambda = -[f''(0)]^{-1/2}$  и  $G = \lambda^4 f^{IV}(0)$ . Первая производная от  $k(r)$  исчезает при  $r = 0$ , так как  $u^3 k'(0) = \left\langle u_x^2 \frac{\partial}{\partial x} u_x \right\rangle = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \langle u_x^3 \rangle = 0$ . Поэтому разложение  $k(r)$  начинается только с члена третьего порядка:

$$k(r) = -\frac{S}{6} \frac{r^3}{\lambda^3} + \dots; \tag{12}$$

здесь  $-S = \lambda^3 k'''(0)$  обозначает фактор сдвига  $\left\langle \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^3 \right\rangle / \left[ \left\langle \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right]^{3/2}$ . Знак минус в определении  $S$  введен в работе (G. K. Batchelor, A. A. Townsend [1947]), так как экспериментальные значения фактора сдвига отрицательны.

Хотя корреляционные тензоры  $R_{ij}(r) = \langle u_i(P)u_j(P') \rangle$  и  $S_{ijl}(r) = \langle u_i(P)u_j(P)u_l(P') \rangle$  в дальнейшем не используются, они могут быть теперь без труда вычислены в виде зависимостей от скалярных функций  $u'^2 f(r)$  или  $u'^3 k(r)$  как результат трансформации системы координат к виду, при котором вектор  $\mathbf{r}$  лежит на оси  $x$ . Обозначая компоненты новой системы звездочкой и матрицу перехода  $\|a_{ij}\|$ , получим:

$$\begin{aligned} R_{ij}(r) &= \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \langle u_k^*(P)u_l^*(P') \rangle = \\ &= u'^2 \left[ a_{i1} a_{j1} f(r) + (a_{i2} a_{j2} + a_{i3} a_{j3}) g(r) \right] = \\ &= u'^2 \left[ \sum_v a_{iv} a_{jv} g(r) + (f(r) - g(r)) a_{i1} a_{j1} \right]; \end{aligned}$$

здесь индексы 1, 2 и 3 относятся к координатным осям  $x$ ,  $y$ , и  $z$  соответственно. Так как  $a_{i1} = r_i/r$ , то из (8) следует:

$$R_{ij}(r) = u'^2 \left[ \left( f + \frac{r}{2} f' \right) \delta_{ij} - \frac{r}{2} f' \frac{r_i r_j}{r^2} \right]. \tag{13}$$

Подобным же образом можно показать, что

$$S_{ijl}(r) = u'^3 \left\{ \frac{k - rk'}{2r^3} r_i r_j r_l + \frac{2k + rk'}{4r} (r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}) - \frac{k}{2r} r_l \delta_{ij} \right\}. \tag{14}$$

Рассмотрим также корреляцию давления и скорости  $\langle p(P)u(P') \rangle$ , которая входит в уравнение Кармана–Ховарта. В силу изотропии корреляции между давлением и перпендикулярными вектору  $r$  компонентам скорости исчезают, так что остается исследовать только произведение  $\langle p(P)u_r(P') \rangle$ . Умножая уравнение неразрывности на сферической поверхности на давление в центре и усредняя, получаем, что этот компонент также исчезает.

## Уравнение Кармана–Ховарта для корреляционной функции

Описанный выше метод получения следствий из условия непрерывности может также применяться для получения динамического уравнения для корреляции скорости. Если усреднить по полусфере радиуса  $r$  уравнение импульса, умноженное на значение скорости в центре  $u_0$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0) \rangle dV = \\ & = - \int \langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0) u_r \rangle dS - \int \langle p u_{0r} \rangle dS + \int \langle u_0 \cdot t_r \rangle dS, \end{aligned} \quad (15)$$

при этом интегрирование по поверхности проводится по левой стороне — торцу полусферы и по правой — по шаровой поверхности;  $t_r$  является напряжением вязкости на шаровой поверхности. Первое слагаемое правой части выражается через тройную корреляцию  $u'^3 k(r)$ , в то время как последний интеграл сводится к производной от корреляции  $u'^2 f(r)$ . Левая сторона может быть проинтегрирована по объему шара ( $\langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0) \rangle = u'^3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 f)$ ). После деления на  $2\pi r^3$  получаем корреляционное уравнение Кармана–Ховарта:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) = u'^3 (k' + 4k/r) + 2\nu u'^2 (f'' + 4f'/r). \quad (16)$$

Отдельные члены этого уравнения имеют теперь наглядное физическое представление. Левая часть содержит симметричную двухточечную продольную корреляцию: это  $3u'^2 f(r)$  — среднее произведение скорости в центре шара радиуса  $r$  на среднюю скорость на поверхности шара. Функция  $f(r)$  является, таким образом, мерой пространственного распределения возмущений скорости и указывает, в какой мере скорость в пределах шара может различаться. Первый член правой части описывает корреляцию между потоком импульса через поверхность сферы и скоростью в ее центре и тем самым определяет изменение корреляции  $u'^2 f(r)$  при перемешивании; последний член описывает влияние вязких напряжений на поверхности шара. Из (16) могут быть получены два важных соотношения. При  $r = 0$  получаем уравнение диссипации:

$$\frac{d}{dt} u'^2 = -10\nu \frac{u'^2}{\lambda^2}. \quad (17)$$

Дифференцируя (16) дважды по  $r$ , при  $r = 0$  получаем уравнение для среднего вращения:

$$\frac{d}{dt} \frac{u'^2}{\lambda^2} = \frac{1}{15} \frac{d}{dt} \langle (rot \mathbf{u})^2 \rangle = -\frac{7}{3} u'^3 k'''(0) - \nu \frac{14}{3} u'^2 f^{IV}(0). \quad (18)$$

Очевидно, что уравнение (16) не может быть решено без дополнительного соотношения для  $k(r)$ . Однако из нелинейности уравнений движения следует, что корреляция третьего порядка зависит от корреляции четвертого порядка, которая, в свою очередь, определяется корреляцией пятого порядка, и т. д. Таким образом, попытка построения точного уравнения корреляции ведет к неразрешимой бесконечной цепочке уравнений. Чтобы обойти эту трудность, мы примем, как во всех прежних приближениях для сил инерции, что тройные корреляции могут быть выражены через двойные. На основании нашей простой физической интерпретации переносного члена в уравнении Кармана–Ховарта мы теперь можем получить более понятный способ аппроксимации переносных членов, чем это было возможно до сих пор при исследовании эффектов переноса в уравнении для спектра.

## Аппроксимация тройных корреляций

Действие сил инерции в изотропном поле турбулентности можно описать, как известно, неким каскадным процессом, описывающим постоянный перенос энергии от крупных вихрей к более мелким. Для объяснения этого процесса был предложен ряд физических моделей, самыми удачными из которых являются модели (Heisenberg [1948], C. F. von Weizsäcker [1948]), использующие представления о турбулентной вязкости, воздействующей на крупные вихри. Хотя гайзенберговское выражение для переносного слагаемого является качественно правильным, тем не менее были обнаружены расхождения между теорией и экспериментом (J. Proudman [1951]). Вероятно, некоторые из этих расхождений (например, отличие фактора сдвига от теоретического значения, равного 3) можно объяснить слишком грубой аппроксимацией турбулентной вязкости, так как при этом учитываются только кинематические свойства мелких вихрей, в то время как связь между динамикой мелких вихрей и процессом смешения, который отвечает за турбулентную вязкость, не учитывается.

Динамические свойства самых крупных вихрей, определяются преобладающим действием сил инерции, в более мелких вихрях это не так. Их кинематика определяется совместным действием силы вязкости и инерции. Наш анализ переносного слагаемого в уравнении Кармана–Ховарта позволяет получить выражение, пригодное для описания и элементов турбулентности различных масштабов, и влияние на крупные масштабы дополнительной турбулентной вязкости. Мы будем использовать в нашем подходе времена смешения выражать не через характерные масштабы и скорости малых вихрей, а через характерное «время реакции», которое получается из энергетического уравнения для малых вихрей.

Из интерпретации переносного слагаемого в уравнении Кармана–Ховарта как среднего произведения потока количества движения на поверхности сферы и скорости в ее центре получается простое выражение для переноса энергии от крупных вихрей к более мелким. Так как у вытекающей из шара жидкости, которая раньше была ближе к центру, будет, в общем, больший компонент импульса параллельно скорости в центре, чем у жидкости, вытекающей из периферии сферы, можно ожидать, что величина  $\int \langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0) u_r \rangle dS = -2r^3(k' + 4k/r)$  в (15) положительна, что равносильно энергопереносу к более мелким вихрям.

Элементы турбулентности, которые вызывают этот перенос импульса, имеют размер, очевидно, меньший, чем диаметр сферы (или, может быть, равный ему), тогда как большие элементы турбулентности просто переносят сферу как целое. Эти различия можно пояснить, если ввести некую постоянную скорость, с которой передвигается центр шара. Тогда становится ясно, что элементы турбулентности размера большего, чем диаметр, приводят только к относительным небольшим изменениям в пределах шара. В этой системе координат поток импульса через поверхность шара, неподвижного в этой системе, будет  $\int \mathbf{v} v_r dS$ , где  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  означает относительную скорость. Из уравнений (9) и (10) легко видеть, что среднее произведение этого выражения на скорость в центре,  $u_0$ , пропорционально соответствующему среднему произведению в исходной системе координат:

$$\int \langle (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}) v_r \rangle dS = 2 \int \langle (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}) u_r \rangle dS. \quad (19)$$

Левая часть (19) может рассматриваться как исходное выражение для инерциального члена в правой части (17), так как последний описывает только колебания скорости меньшего масштаба, которые и вызывают обмен импульса. По нашему представлению, действие сил инерции в уравнении корреляции Кармана–Ховарта объясняется только корреляцией между относительным потоком импульса через поверхность движущегося шара и скоростью  $u_0$  в его центре, которая существенно зависит от направления потока.



Предположим, что левую часть уравнения (19), введя величину  $\tau$ , представляющую характерное «время смешения» малых турбулентных масштабов, можно приближенно представить следующим выражением:

$$\int \langle (\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{v}) v_r \rangle dS = \int \left\langle \left( \langle \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{v} \rangle - v_r \tau \frac{\partial}{\partial r} u_o \mathbf{v} \right) v_r \right\rangle dS. \quad (20)$$

Уравнение (20) является нашей «гипотезой обмена», позволяющей выразить тройные корреляции через корреляции второго порядка. Преобразовывая правую часть, получаем:

$$\int \langle (\mathbf{u}_o \cdot \mathbf{v}) v_r \rangle dS = -8\pi r^2 u'^4 \tau (1-f)(r f'' + 4f'). \quad (21)$$

Уравнение импульса (15) с учетом (21) будет

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) = 2u'^2 (\nu + \nu_t) \left( f'' + \frac{4}{r} f' \right), \quad (22)$$

здесь

$$\nu_t = u'^2 (1-f)\tau. \quad (23)$$

Сравнивая с (16), находим следующее соотношение между двойными и тройными продольными корреляциями скорости:

$$\left( k' + \frac{4k}{r} \right) = \frac{2\nu_t}{u'} \left( f'' + \frac{4f'}{r} \right). \quad (24)$$

Как следует из уравнений (22) и (23), переносное слагаемое в уравнении для корреляции так же, как и гайзенберговское приближение для переносного слагаемого в уравнении для спектра, может трактоваться как влияние турбулентной вязкости на обмен импульсом между вихрями различного размера. При этом обмен к вихрям размера большего  $r$  переносится энергия  $\frac{3}{2}u'^2 f(r)$  и к меньшим вихрям — энергия  $\frac{3}{2}u'^2 (1-f(r))$ . Это распределение энергии понятно, так как  $f(r)$  есть мера однородности скорости в пределах шара радиуса  $r$ , однако это допущение несколько произвольно и не совпадает с допущениями, высказываемыми при анализе энергетических спектров. Однако определенный произвол в определении энергии маленьких вихрей, которые вызывают обмен импульсом, неизбежен, и наш выбор распределения энергии в уравнениях (22) и (23), возможно, лучше, чем разделение энергетического спектра на крупно и мелкомасштабные части, производимое при определенном волновом числе.

Для определения  $k(r)$  из (24), нужно задать выражение для времени смешения  $\tau$ . Из вывода уравнения (22) можно ожидать, что время  $\tau$  определяется характерным временем реакции вихрей меньших, чем  $r$ . Из (16) и (17) следует, что изменение энергии этих вихрей описывается уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 (1-f(r))) = -u'^3 \left( k' + \frac{4k}{r} \right) - 2\nu u'^2 \left( \frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4f'}{r} \right). \quad (25)$$

Первый член представляет приток энергии к вихрям большим, чем  $r$ , в то время как влияние сил вязкости описывается вторым членом. Как энергетический обмен в процессе смешения,



так и потери, связанные с силами вязкости, вызывают теперь постоянное изменение поля скорости меньших вихрей. Поэтому понятно, что время смешения  $\tau$ , которое можно понимать как время, в течение которого следующие друг за другом структуры мелких вихрей коррелированы друг с другом, нужно считать пропорциональным характерному времени реакции, которое определяется членами правой части (25). Учитывая различные знаки этих членов, можно получить самое простое выражение для  $\tau$ :

$$\tau = \gamma \frac{u'^2(1-f)}{2\nu u'^2 \left( \frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r}f' \right) - u'^3 \left( k' + \frac{4k}{r} \right)}, \tag{26}$$

содержащее  $\gamma = \text{const}$ . Извлекая из (23) и (24) время смешения  $\tau$  и тройные корреляции, получаем для уравнение  $\nu_t$ :

$$\nu_t = \frac{\gamma}{2} \frac{u'^2(1-f)^2}{\nu \left( \frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r}f' \right) - \nu_t \left( f'' + \frac{4}{r}f' \right)}. \tag{27}$$

Для малых  $r$  в соответствии с  $k(r) = O(r^3)$  имеем  $\nu_t = O(r^2)$  (уравнение (24)). Для больших  $r$  получаем  $\nu_t \rightarrow \frac{\gamma u'^2 \lambda^2}{10\nu}$ . Так как закон затухания для общей энергии можно аппроксимировать в форме  $\frac{du'^2}{dt} = -Au'^3/L$  (здесь  $L = \int_0^\infty f(r)dr$  есть продольный макромасштаб турбулентности и  $A$  — некая константа), то турбулентная вязкость для самых крупных вихрей может быть найдена с использованием (17):  $\nu_t \rightarrow \frac{\gamma}{A}u'L$ .

### Сравнение с экспериментом

Непосредственное определение тройных продольных корреляций из уравнений (24) и (27) затруднительно, так как зависимость от параметра  $\gamma$ , который должен определяться сравнением с экспериментом, нелинейная. Поэтому  $k(r)$  и  $\gamma$  определяются итерациями.

В первом приближении членом  $\nu_t (f + 4f'/r)$  в знаменателе (27) можно пренебречь, тогда  $\gamma$  входит линейно и сравнение с экспериментом позволяет получить кривые  $k(r)$ . Первая итерация таким способом определенных величин  $k(r)$  и  $\gamma$  уже достаточна, чтобы сделать итерационную ошибку меньше, чем это может быть сделано на следующих итерациях с использованием дифференцирования экспериментально определенной функции  $f(r)$ .

На рис. 3 представлены две теоретически рассчитанных кривых  $k(r)$  при  $\gamma = 0.37$  и экспериментально определенные тройные корреляции, соответствующие измерениям (R. W. Stewart, A. A. Townsend [1951]). Кривые рассчитаны по экспериментальным функциям  $f(r)$ , которые были измерены одновременно с  $k(r)$  на нескольких расстояниях от турбулизирующей решетки при числе Рейнольдса  $R = 5300$  ( $R_M = UM/\nu$ , с  $U$ , равным средней скорости потока, и  $M$ , равным шагу ячеек решетки). Приведены кривые только для предельно малого и максимального расстояний от решетки  $x/M = 20$  и  $x/M = 120$ ; остальные кривые лежат эквидистантно между ними. На рис. 4. приведены две теоретические кривые для  $R_M = 21200$  и  $42400$  вместе с соответствующими экспериментальными данными из процитированного источника. Наблюдается очень хорошее соответствие для  $\gamma$ , равной 0,27 и 0,25, тогда как при меньших числах Рейнольдса величина  $\gamma$  составляла 0,37.

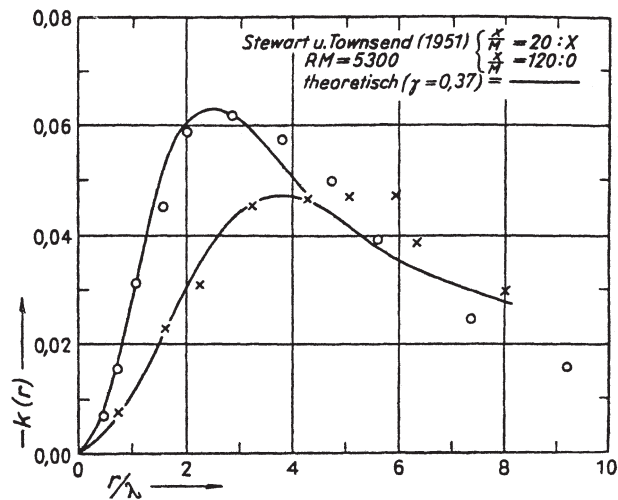


Рис. 3. Теоретические и экспериментальные тройные корреляции поля скорости.

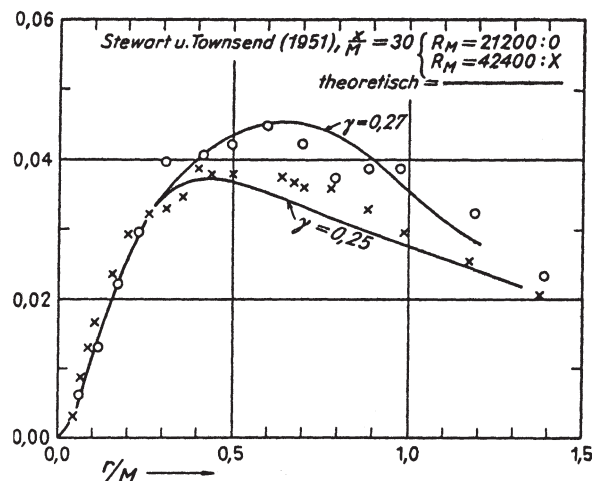


Рис. 4. То же самое для различных чисел Рейнольдса.

Хотя предполагалось, что  $\gamma$  есть величина постоянная, полученная слабая зависимость этой величины от числа Рейнольдса решетки, тем не менее, не удивительна, так как предположение (26) является неким приближением.

В окрестности  $r = 0$  теоретические кривые  $k(r)$  не могут быть с достаточной точностью определены по измеренным функциям  $f(r)$ . Поэтому первый коэффициент ряда  $k(r)$ , который представляет особенный интерес (так как он, согласно (18), описывает влияние сил инерции на изменение среднего вращения турбулентности), наиболее целесообразно определить прямо по непосредственно измеренным первым коэффициентам ряда для  $f(r)$ .

Анализируя уравнение (27) и привлекая для сравнения коэффициентов (24), получаем следующее соотношение, связывающее величины  $S$ ,  $G$  и число Рейнольдса:

$$\frac{G}{R_\lambda} = \frac{45}{49} \frac{\gamma}{S} - \frac{S}{2}. \quad (28)$$

Так как все величины, входящие в (28), непосредственно доступны для измерения, то проверить это уравнение можно прямо по экспериментальным результатам.

Однако сравнение с экспериментом становится более наглядным, если использовать уравнение (18) для среднего вращения. Используя в (18) закон затухания  $\langle u'^2 \rangle^{-1} \sim (t - t_0)$ , который неоднократно подтверждался при больших числах Рейнольдса, получаем следующее соотношение между величинами  $S$ ,  $G$  и  $R_\lambda$  (Batchelor and Townsend [1947]):

$$\frac{30}{7} \frac{1}{R_\lambda} = \frac{G}{R_\lambda} - \frac{S}{2}. \tag{29}$$

Из уравнений (28) и (29) можно теперь определить величины  $S$  и  $G$  как функции от числа Рейнольдса  $R_\lambda$ . Так как в силу принятого закона затухания число Рейнольдса  $R_\lambda$  остается постоянным в процессе затухания, то величины  $S$  и  $G$  также остаются постоянными. Это подтверждается экспериментами (G. Batchelor, A. Townsend [1947]). Зависимости этих величин от числа Рейнольдса приведены на рис. 5<sup>2</sup> и 6 вместе с результатами измерений. Соответствие удовлетворительное, если учесть, что ни  $S$ , ни  $G$  не могут измеряться с большой точностью, а также то, что теоретические результаты нужно рассматривать только как качественные.

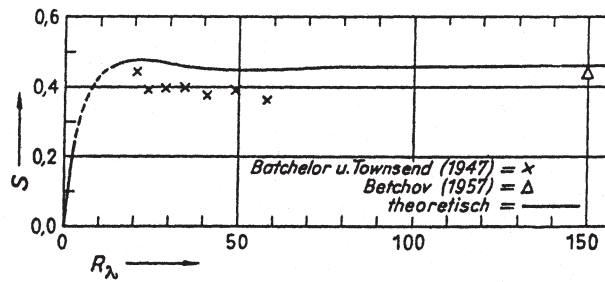


Рис. 5. Теоретические и экспериментальные зависимости для  $S(R_\lambda)$ .

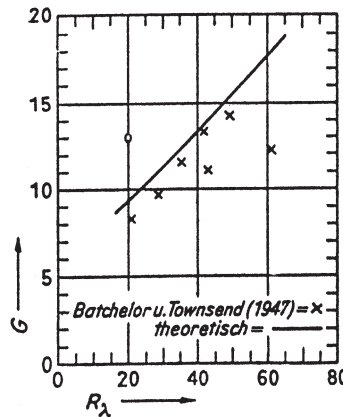


Рис. 6. Теоретические и экспериментальные зависимости для  $G(R_\lambda)$ .

Следующие из уравнений (28) и (29) зависимости величин  $S$  и  $G$  от числа Рейнольдса  $R_\lambda$  являются следствием линейного закона затухания  $\langle u'^2 \rangle^{-1} \sim (t - t_0)$ , который до сих пор не был проверен как при очень больших, так и при очень маленьких числах Рейнольдса, при которых силы инерции малы по сравнению с силами вязкости. Однако величины  $S$  и  $G$

<sup>2</sup>Экспериментальные точки на рис. 5 соответствуют рис. 6.3 из (Batchelor [1953]).

во всех случаях можно определить, используя следующие результаты теории изотропной турбулентности.

По А. Н. Колмогорову (А. N. Kolmogoroff [1941], Batchelor [1947]), область энергетического спектра при очень больших числах Рейнольдса находится практически в состоянии равновесия, при котором потеря энергии почти компенсируется притоком энергии из длинноволновой области спектра, происходящем под действием сил инерции. Следовательно, левая часть уравнения (18) мала по сравнению со слагаемыми правой части, так что:

$$S = \frac{2G}{R_\lambda}. \quad (30)$$

Из (28) и (30) следует:

$$S = \left( \frac{45}{49} \gamma \right)^{1/2} = 0.48; \quad G = 0.24R_\lambda;$$

вычисленное значение  $\gamma = 0,25$  соответствует очень большому числу Рейнольдса  $R_M = 42400$ , которое относится к области больших чисел Рейнольдса, для которой и была получена теория Колмогорова. Асимптотическое значение величины  $S$  хорошо согласуется с результатами (R. Betchov [1957]) для  $R_\lambda = 250$ , где  $S = 0,45 \pm 0,05$ .

Для очень маленьких чисел Рейнольдса, при которых силы инерции малы по сравнению с силами вязкости,  $f(r, t)$  может быть точно определено из (16). Получается, что  $f(r, t)$  стремится асимптотически к очень похожему на автомодельное решение с  $G = 3$  (Batchelor и Townsend [1948]). Из уравнения (28) следует, таким образом, что и  $S \rightarrow 0$ , и  $R_\lambda \rightarrow 0$ , что соответствует найденному (Batchelor [1953]) асимптотическому нормальному распределению пульсаций скорости при очень маленьких числах Рейнольдса.

## Литература

1. Batchelor G. K. Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence // Proc. Camb. Phil. Soc., 1947, vol. 43, pp. 533–559.
2. Batchelor G. K. The theory of homogeneous turbulence. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1953.
3. Batchelor G.K., Townsend A. A. Decay of vorticity on isotropic turbulence // Proc. Roy. Soc., 1947, vol. A 191, No. 1021, pp. 534–550.
4. Batchelor G.K., Townsend A. A. Decay of turbulence in the final period // Proc. Roy. Soc., 1948, vol. A 194, No. 1039, pp. 527–543.
5. Betchov R. On the fine structure of turbulent flows // J. Fluid Mechanics 1957, vol. 3, No. 2, pp. 205–216.
6. Chandrasekhar S. Some aspects the statistical theory of isotropic turbulence // Proc. Symp. Appl. Math., 1953, vol. 4, pp. 1–9.
7. Heisenberg W. Zur statistischen Theorie der Turbulenz // Z. Physik 1948, vol. 124, pp. 628–657.



8. Kármán T. von, Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence // Proc. Roy. Soc., 1938, vol. A 164, No. 917, pp. 192–215.
9. Kolmogoroff, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous flow for very large Reynolds' numbers // S. R. Acad. Sci. U. R. S. S. 1941 vol. 30, №4, pp. 299–303. (Докл. АН СССР, Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.)
10. Proudman J. A comparison of Heisenberg's spectrum of turbulence with experiment // Proc. Camb. Phil. Soc., 1951, vol. 47, pp. 158–167.
11. Robertson H. P. The invariant theory of isotropic turbulence // Proc. Camb. Phil. Soc., 1940, vol. 36, No. 2, pp. 209–223.
12. Stewart R. W., Townsend A. A. Similarity and self-preservation in isotropic turbulence // Phil. Trans., 1951, vol. A 243, No. 867, pp. 359–386.
13. Weizsäcker C. F. von Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen // Z. Physik 1948, vol. 124, Nr. 7–12, pp. 614–627.
14. Wieghardt K. Zussfassd. Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie // Luftfahrtforschung 1941, vol. 18, Nr. 1, pp. 1–7.