

# О бифуркациях трехмерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром, содержащим седло-фокусы

**С. В. Гонченко, И. И. Овсянников**

НИИ Прикладной математики и кибернетики ННГУ,  
603005, Россия, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10  
gosv100@uic.nnov.ru, ivan.i.ovsyannikov@gmail.com

*Получено 23 ноября 2009 г.*

В статье изучаются бифуркации трехмерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами, которые приводят к рождению диких гиперболических аттракторов лоренцевского типа. Известно, что такие аттракторы могут быть получены при малых периодических возмущениях классического аттрактора Лоренца, они допускают гомоклинические касания, однако не содержат устойчивых периодических траекторий.

Ключевые слова: гомоклиническая и гетероклиническая траектория, бифуркация, странный аттрактор, седло-фокус

**S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov**

## On bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with a non-transversal heteroclinic cycle containing saddle-foci

We study bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-transversal heteroclinic cycles which lead to the birth of wild hyperbolic Lorenz-like attractors. As known, such attractors can be appeared under small periodic perturbations of the classical Lorenz attractor and they allow homoclinic tangencies, however, do not contain stable periodic orbits.

Keywords: homoclinic and heteroclinic orbit, bifurcation, strange attractor, saddle-focus  
Mathematical Subject Classification 2000: 37C05, 37C29, 37G25, 37G35

## Введение

Открытие динамического хаоса по праву считается одним из главных достижений науки за последние 50 лет. Как известно, математическим образом динамического хаоса является странный аттрактор, концепция которого разрабатывалась (а по большому счету, разрабатывается еще до сих пор) при участии крупнейших математиков мира.

Весьма значительный вклад в развитие теории странных аттракторов был сделан Л. П. Шильниковым. Так, им были заложены основы теории спирального хаоса [1, 2] и предложен ряд сценариев его возникновения [3]; была разработана математическая теория аттракторов Лоренца (совместно с Афраймовичем и Быковым, [4, 5]), а также установлены как глобальные [6], так и локальные [7] бифуркации, приводящие к рождению лоренцевских аттракторов. Хорошо известные и часто встречающиеся в приложениях сценарии перехода к хаосу, связанные с разрушением двумерного тора, так называемый «тор-хаос», или с исчезновением седло-узловое периодического движения, также получили свое математическое обоснование в работах Шильникова с соавторами [8, 9, 10].

Особо отметим работы Шильникова и его сотрудников по тематике, связанной с исследованием хаотической динамики систем, допускающих гомоклинические касания. Как известно из работы Ньюхауса [11] (а в многомерном случае [12]), такие системы плотны в открытых областях из пространства динамических систем, так называемых областях Ньюхауса. Поэтому существование гомоклинических касаний и сопутствующих им бифуркационных явлений нужно рассматривать как неотъемлемое свойство громадного большинства странных аттракторов конкретных систем (исключение составляют, пожалуй, только системы, обладающие гиперболическими аттракторами или аттракторами Лоренца). По этой причине, совокупность хаотических явлений в таких системах часто характеризуется термином «гомоклинический хаос». Понять структуру и закономерности гомоклинического хаоса — это, безусловно, доминирующая задача в теории динамического хаоса, вообще. Среди многочисленных результатов, полученных здесь, отметим только лишь те, которые связаны с классификацией странных аттракторов, допускающих гомоклинические касания.

Прежде всего, был выделен класс так называемых *квазиаттракторов*, (Афраймович и Шильников, [13]), т. е. нетривиальных притягивающих множеств, которые кажутся «странными» только лишь «на физическом уровне». Дело в том, что их сколь угодно малые возмущения приводят к появлению периодических аттракторов. Это означает, что кажущееся хаотическим при наблюдении поведение траекторий может являться в действительности «периодическим плюс (неизбежные) ошибки» (экспериментальные или вычислительные). Можно сказать, что квазиаттракторы встречаются в приложениях «сплошь и рядом» — это многочисленные аттракторы, наблюдаемые в конкретных системах (прежде всего, малой размерности). Таковыми являются странные аттракторы в отображении Эно, в цепях Чуа, многие типы спиральных и тор-хаос аттракторов, аттракторы Ресслера и т. п. Основным характерным признаком этих аттракторов является наличие (или возможность возникновения) таких гомоклинических касаний, бифуркации которых приводят к рождению устойчивых периодических траекторий. Таким образом, квазиаттракторы можно часто распознать, используя критерий Гонченко–Тураева–Шильникова [14, 15], показывающий, возможно ли рождение устойчивых периодических траекторий при данной гомоклинической бифуркации.

Другой вид «гомоклинического хаоса» представлен так называемыми *дикими гиперболическими аттракторами*,<sup>1</sup> которые были введены в работе Тураева и Шильникова [16].

<sup>1</sup>Этот термин восходит к Ш. Ньюхаусу [11], который ввел понятие «дикого гиперболического множества» — равномерно гиперболического базисного множества, чьи устойчивое и неустойчивое инвариантные множества (усы) имеют касание. Ньюхаус показал, что свойство наличия касания является сохраняющим-

Так же, как и в случае с квазиаттракторами, системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса. Однако ни сама система, ни все близкие к ней *не содержат устойчивых периодических траекторий*.

В той же работе [16] был приведен пример системы, обладающей диким спиральным аттрактором, который содержит состояние равновесия типа седло-фокус и, помимо этого, допускает также гомоклинические касания.<sup>2</sup> Другой весьма важный тип диких гиперболических аттракторов составляют так называемые *дикие лоренцевские аттракторы* (wild Lorenz attractions), которые могут быть получены, в частности, при периодических возмущениях систем с аттракторами Лоренца. Хорошо известно, что сами аттракторы Лоренца не допускают гомоклинических касаний. Однако последние могут появляться при неавтономных периодических возмущениях, но устойчивые периодические траектории здесь все равно не возникают. Основной причиной этого обстоятельства является то, что дикие лоренцевские аттракторы обладают так называемой *псевдогиперболической структурой*<sup>3</sup> [16, 18]. Напомним, что, по определению, псевдогиперболическое множество отображения  $f$  — это такое компактное инвариантное множество  $A \subset M$ , что для каждой точки  $x \in A$  касательное пространство разлагается в прямую сумму  $T_x M = T_1 \oplus T_2$  двух подпространств, таких, что  $f$  на  $T_1$  является сильно сжимающим («сильно» означает здесь, что любые возможные сжатия в трансверсальных направлениях являются более слабыми), а  $f$  на  $T_2$  растягивает (экспоненциально) площади. По сути, здесь определяется некоторый тип нормальной гиперболичности, ср. с [19, 20], а значит псевдогиперболичность сохраняется при малых гладких возмущениях<sup>4</sup>. Кроме того, условие растяжения площадей на  $T_2$  очевидно запрещает устойчивые периодические траектории.

Весьма важным свойством диких лоренцевских аттракторов является то, что они могут рождаться в результате локальных бифуркаций периодических траекторий. Как показано в [7], это возможно в тех случаях, когда периодическая траектория имеет три или более мультипликатора на единичной окружности. Последнее обстоятельство говорит о том, что соответствующие аттракторы могут быть обнаружены в конкретных моделях, которые содержат достаточное количество параметров, чтобы обеспечить вырождение указанного типа.

Одной из таких моделей является трехмерное отображение Эно

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \tag{1}$$

в котором присутствуют три независимых параметра,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $B$ . В работе [21] (см. также [22]) было показано, что отображение (1) обладает (глобальным) диким лоренцевским аттрактором в некоторой открытой области параметров. Подробнее об этом см. § 3.

Нужно отметить, что еще в работе [14] было анонсировано, что бифуркации многомерных систем с гомоклиническими касаниями коразмерности один могут приводить к странным аттракторам (лоренцевского типа). Однако в этом случае исходная система с гомоклиническим касанием должна иметь, как минимум, размерность четыре — для отобра-

ся, и, следовательно, системы с дикими гиперболическими множествами образуют открытые области (в  $C^r$ -топологии с  $r \geq 2$ ) в пространстве динамических систем.

<sup>2</sup>Основу конструкции составлял четырехмерный поток, имеющий две гомоклинические петли к состоянию равновесия  $O$  типа седло-фокус с характеристическими корнями  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_{2,3} = -\nu \pm i\omega$ ,  $\lambda_4 < -\nu < 0$ , такими, что  $\lambda_1 - 2\nu > 0$  и  $\text{div}(O) = \sum \lambda_i < 0$ . Заметим, что условия на характеристические корни  $\lambda_i$  таковы, что из гомоклинической петли не может родиться устойчивое периодическое движение [17].

<sup>3</sup>Так же, как и спиральный аттрактор из [16].

<sup>4</sup>Определение псевдогиперболичности для потоков — вполне аналогично (см., например, [16, 18]), и поэтому мы его не приводим. Однако заметим, что в случае потоков псевдогиперболичность сохраняется также и при малых неавтономных периодических возмущениях [18].

жений, или пять — для потоков. Условие коразмерности один означает, что предполагается выполненным только одно негрубое условие — существование гомоклинического касания. Все остальные накладываемые условия — общего положения, в частности, касание должно быть квадратичным.

Однако недавно, в работах [22, 23], было показано, что глобальные бифуркации трехмерных диффеоморфизмов могут также приводить к рождению диких лоренцевских аттракторов.

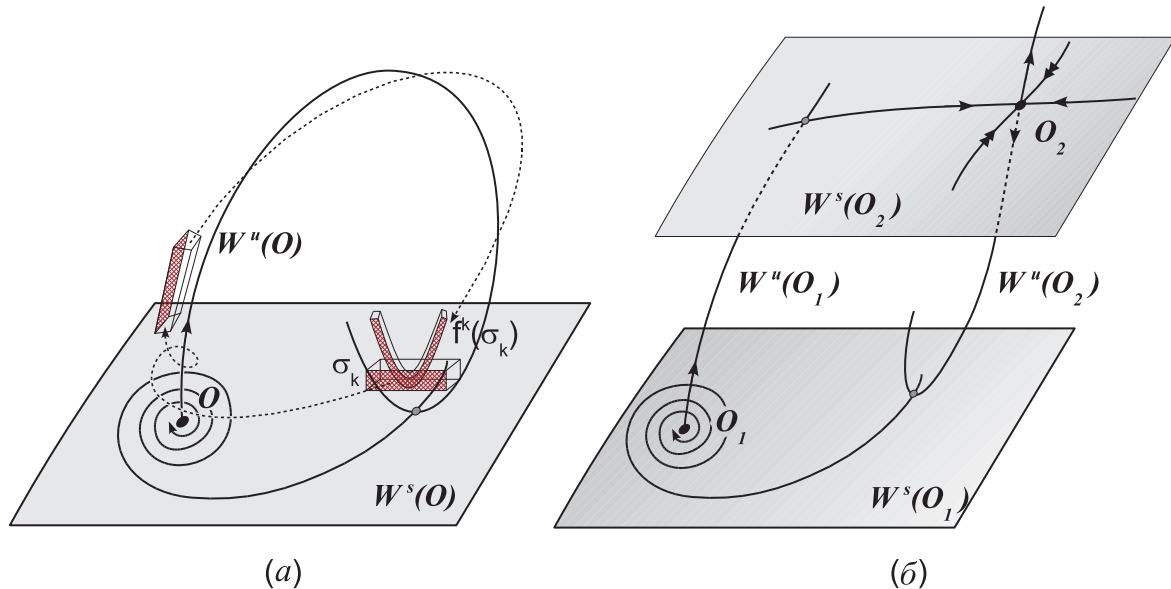


Рис. 1. Примеры трехмерных диффеоморфизмов, имеющих (а) гомоклиническое касание многообразий неподвижной точки типа седло-фокус (2,1), (б) негрубый гетероклинический контур, содержащий две неподвижные точки, седло и седло-фокус, типа (2,1).

При этом в работе [22] изучались бифуркации в случае гомоклинического касания многообразий неподвижной точки типа седло-фокус (2,1), с мультипликаторами  $\nu_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$ ,  $\nu_3 = \gamma$ , где  $0 < \lambda < 1 < \gamma$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , см. рис. 1а. Но в отличие от [14], исходный диффеоморфизм  $f_0$  из [22] должен иметь дополнительное вырождение — якобиан отображения в седловой неподвижной точке равен единице, т. е.  $\lambda^2\gamma = 1$ . В работе [23] изучались бифуркации в случае негрубого гетероклинического контура, содержащего две неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  типа (2,1), причем одна из них — седло-фокус, а другая — седло, см. рис. 1б; причем выполняется важное дополнительное условие общего положения: якобиан отображения в одной из точек  $O_1$  или  $O_2$  — больше единицы, а в другой — меньше единицы. В обоих случаях изучались бифуркации отображений первого возвращения, определенных вблизи некоторой точки гомоклинического или, соответственно, гетероклинического касания. Основным технический результат работ [22, 23] состоял в том, что отображения первого возвращения  $f_\varepsilon^k$  при больших  $k$  (время возвращения) и в соответствующих областях параметров  $\varepsilon$  могут быть приведены к виду, асимптотически близкому к (1). А это, в свою очередь, означает, что указанные глобальные бифуркации могут породить дикие лоренцевские аттракторы и даже, в ситуации негрубого гетероклинического контура [23], могут приводить к сосуществованию счетного множества таких аттракторов.

В настоящей работе мы продолжаем эту тематику и проводим исследования близкие, по духу к [23]. Однако здесь мы изучаем глобальные бифуркации в случае трехмерных

диффеоморфизмов, имеющих негрубый гетероклинический контур, содержащий две неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ , которые обе являются седло-фокусами типа (2,1) (см. рис. 2).

**Содержание работы.** В § 1 приводится постановка задачи, формулируются основные результаты, включающие теоремы 1 и 2, причем доказательство теоремы 2 приводится здесь же. В § 2 обсуждается динамика трехмерных отображений Эно (в основном — отображения (1)) и приводятся основные результаты, касающиеся существования у них диких гиперболических аттракторов. В § 3 приводится доказательство теоремы 1.

## 1. Формулировка основных результатов

Рассмотрим  $C^r$ -гладкий ( $r \geq 5$ ) трехмерный ориентируемый диффеоморфизм  $F_0$ , удовлетворяющий следующим условиям (см. рис. 2):

(А)  $F_0$  имеет две неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ , которые обе являются седло-фокусами типа (2,1);

(В)  $F_0$  имеет непостоянный якобиан и, более того, в одной из неподвижных точек этот якобиан меньше единицы, а в другой — больше единицы;

(С) инвариантные многообразия  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  пересекаются трансверсально в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{12}$ , а  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  имеют квадратичное касание в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{21}$ .

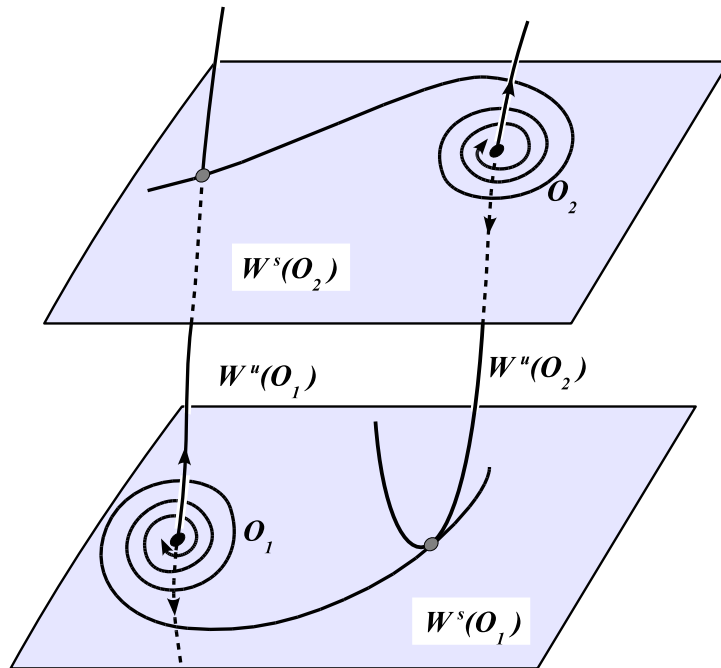


Рис. 2. Пример диффеоморфизма с негрубым гетероклиническим контуром, содержащим две неподвижные точки типа седло-фокус (2,1).

Условие (А) означает, что устойчивые многообразия точек  $O_1$  и  $O_2$  двумерны, а неустойчивые — одномерны; кроме того, устойчивые мультипликаторы (меньшие едини-

цы по модулю) этих точек — комплексно-сопряженные, а неустойчивые — действительные (и положительные, в силу того, что  $F_0$  ориентируемо). Таким образом, мы полагаем, что мультипликаторы точки  $O_1$  образуют тройку  $(\lambda_1 e^{-i\varphi}, \lambda_1 e^{+i\varphi}, \gamma_1)$ , а точки  $O_2$  — тройку  $(\lambda_2 e^{-i\psi}, \lambda_2 e^{+i\psi}, \gamma_2)$ , где  $0 < \lambda_s < 1 < \gamma_s, s = 1, 2$ , и  $\varphi, \psi \in (0, \pi)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Условие (В) означает, что итерации близких к  $F_0$  диффеоморфизмов растягивают объемы вблизи одной из неподвижных точек и сжимают их вблизи другой. Такого сорта потоки называются обычно «потоками со знакопеременной дивергенцией». Соответствующего стандартного термина для отображений нет, но мы, следуя [24], будем говорить в этом случае о диффеоморфизмах и, соответственно, контурах *смешанного типа*.

Диффеоморфизмы, близкие к  $F_0$  и удовлетворяющие условию (С) (условия (А) и (В) — это условия грубости и выполняются для всех близких систем), образуют в пространстве  $C^r$ -гладких диффеоморфизмов локально-связную бифуркационную поверхность  $\mathcal{H}_{het}$  ко-размерности один. Мы будем рассматривать семейства диффеоморфизмов, которые трансверсальны  $\mathcal{H}_{het}$ . Будем обозначать такие семейства как  $F_\varepsilon$ , предполагая, что диффеоморфизм  $F_0$  семейства удовлетворяет условиям (А)–(С).

Пусть  $U$  — некоторая достаточно малая фиксированная окрестность контура  $C = \{O_1, O_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}\}$ . Очевидно,  $U$  может быть представлена в виде объединения двух малых окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$  с некоторым конечным числом малых окрестностей тех точек гетероклинических траекторий  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$ , которые не попали в  $U_1$  и  $U_2$ . Мы будем изучать, в рамках семейств  $F_\varepsilon$ , бифуркации так называемых *однообходных периодических траекторий* из  $U$ . Каждая точка такой траектории может быть рассмотрена как неподвижная точка соответствующего отображения первого возвращения.

Однако прежде чем исследовать собственно бифуркации, нужно понять, какие управляющие параметры  $\varepsilon$  следует рассматривать. Их необходимое количество мы определим, согласно [25], равным так называемой *эффективной размерности задачи*  $\dim_e$ , которая показывает, какое максимальное число нулевых ляпуновских показателей (единичных мультипликаторов для периодических траекторий) может появиться у траекторий близких систем. В нашем случае  $\dim_e = 3$ . Это связано с тем, что контур  $C$  содержит седло-фокусы (поэтому, в отличие от случая с седлами [26], здесь не существует гладкого глобального двумерного центрального многообразия) и, в силу условия (В), трехмерные объемы могут как сжиматься, так и растягиваться. Таким образом, специфика данной задачи такова, что для более-менее полного исследования бифуркаций требуется наличие не менее трех управляющих параметров. В данной работе мы будем рассматривать трехпараметрические семейства, т. е. будем полагать, что  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ .

В качестве первого управляющего параметра  $\varepsilon_1$  мы, естественно, выбираем параметр расщепления  $\mu$  инвариантных многообразий  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  относительно некоторой точки (квадратичного касания, в силу условия (В)) траектории  $\Gamma_{21}$ .

Заметим, что диффеоморфизмы на  $\mathcal{H}_{het}$  обладают  $\Omega$ -модулями, т. е. непрерывными инвариантами топологической сопряженности на множестве неблуждающих траекторий [27]. По определению  $\Omega$ -модуля, любое изменение его значения влечет изменение (бифуркацию) в множестве неблуждающих траекторий — периодических, гомоклинических и т. п. Это означает, что  $\Omega$ -модули являются естественными бифуркационными параметрами, и их следует, по необходимости, включать в множество управляющих параметров. В нашем случае наиболее важными  $\Omega$ -модулями (у диффеоморфизмов на  $\mathcal{H}_{het}$ ) являются  $\varphi$  и  $\psi$  — угловые аргументы комплексных мультипликаторов неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. В качестве управляющего параметра  $\varepsilon_2$  мы возьмем один из них. Будем предполагать, для

определенности, что

$$\varepsilon_2 = \varphi(\varepsilon) - \varphi(0) .$$

Заметим, наконец, что поскольку мы имеем дело со случаем отображений «смешанного типа», необходим еще один управляющий параметр,  $\varepsilon_3$ , который бы контролировал значения якобианов  $J_1 := \lambda_1^2 \gamma_1$  и  $J_2 := \lambda_2^2 \gamma_2$  отображения  $F_\varepsilon$  в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Как мы покажем ниже, удобно выбирать  $\varepsilon_3$  следующим образом:

$$\varepsilon_3 = S(F_\varepsilon) - S(F_0), \tag{1.1}$$

где  $S(F)$  — функционал, определяемый как  $S(F) = -\frac{\ln J_1}{\ln J_2}$ .

Следующая теорема показывает, какую форму могут принимать отображения первого возвращения (при соответствующих значениях параметров).

**Теорема 1.** Пусть  $F_\varepsilon$  — трехпараметрическое семейство диффеоморфизмов, определенное выше. Начало координат  $\varepsilon = 0$  пространства параметров  $\varepsilon$  является пределом последовательности открытых областей  $\Delta_{ij}$ , таких, что при  $\varepsilon \in \Delta_{ij}$  отображение первого возвращения  $T_{ij}$  некоторой открытой области  $V_{ij} \subset U$  по траекториям диффеоморфизма  $F_\varepsilon$  может быть приведено с помощью гладких замен координат и параметров к виду

$$\begin{aligned} \bar{X} &= Y + o(1)_{i,j \rightarrow +\infty}, \\ \bar{Y} &= Z + o(1)_{i,j \rightarrow +\infty}, \\ \bar{Z} &= M_1 + BX + M_2Y - Z^2 + o(1)_{i,j \rightarrow +\infty}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где координаты  $(X, Y, Z)$  в  $V_{ij}$  и новые параметры  $(M_1, M_2, B)$  (последние диффеоморфно выражаются через изначальные параметры  $\varepsilon \in \Delta_{ij}$ ) могут принимать произвольные конечные значения,  $B$  — произвольные положительные, при  $i, j \rightarrow +\infty$ . Через  $o(1)$  мы обозначили функции от  $(X, Y, Z, M_1, M_2, B)$ , конкретный вид которых не имеет особого значения, но важно, что они стремятся к нулю при  $i, j \rightarrow +\infty$  вместе со своими производными до порядка  $(r - 2)$  включительно.

Геометрия действия отображения первого возвращения

$$T_{ij} = T_{21}T_{02}^jT_{12}T_{01}^i : V_{ij} \subset \Pi_1^+ \rightarrow \Pi_1^- \rightarrow \Pi_2^+ \rightarrow \Pi_2^- \rightarrow \Pi_1^+ \tag{1.3}$$

проиллюстрирована на рис. 3. Здесь  $M_1^-, M_2^+$  и  $M_2^-, M_1^+$  — некоторые точки траекторий  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$  соответственно, взятые при  $\varepsilon = 0$ , при этом  $M_2^+ = F_0^{q_1}(M_1^-)$  и  $M_1^+ = F_0^{q_2}(M_1^-)$  для некоторых целых  $q_1$  и  $q_2$ , а  $\Pi_s^+ \subset U_s, \Pi_s^- \subset U_s, s = 1, 2$  — некоторые их малые окрестности.  $T_{O_s}$  — это так называемое локальное отображение, которое определяется как ограничение диффеоморфизма  $F_\varepsilon$  на окрестность точки  $O_s$ , т.е.  $T_{O_s} \equiv F_\varepsilon|_{U_s}$ . Глобальные отображения  $T_{12} : \Pi_1^- \rightarrow \Pi_2^+$  и  $T_{21} : \Pi_2^- \rightarrow \Pi_1^+$  определяются как  $T_{12} = F_\varepsilon^{q_1}|_{\Pi_1^-}$  и  $T_{21} = F_\varepsilon^{q_2}|_{\Pi_2^-}$ . О более точных деталях и соответствующих аналитических конструкциях см. § 3.

Заметим, что для больших  $i$  и  $j$  мы будем иметь следующие соотношения (см. также более точные формулы (3.11), (3.17) и (3.18)):

$$\begin{aligned} M_1 &\sim \gamma_1^{2i} \gamma_2^{2j} (\mu + O(|\lambda_2|^j + |\gamma_1|^{-i})), \\ M_2 &\sim (\lambda_1 \gamma_1)^i (\lambda_2 \gamma_2)^j \cos(i\varphi_1 + \beta_1) \cos(j\varphi_2 + \beta_2), \\ B &\sim (\lambda_1^2 \gamma_1)^i (\lambda_2^2 \gamma_2)^j \equiv J_1(\varepsilon)^i J_2(\varepsilon)^j, \end{aligned} \tag{1.4}$$



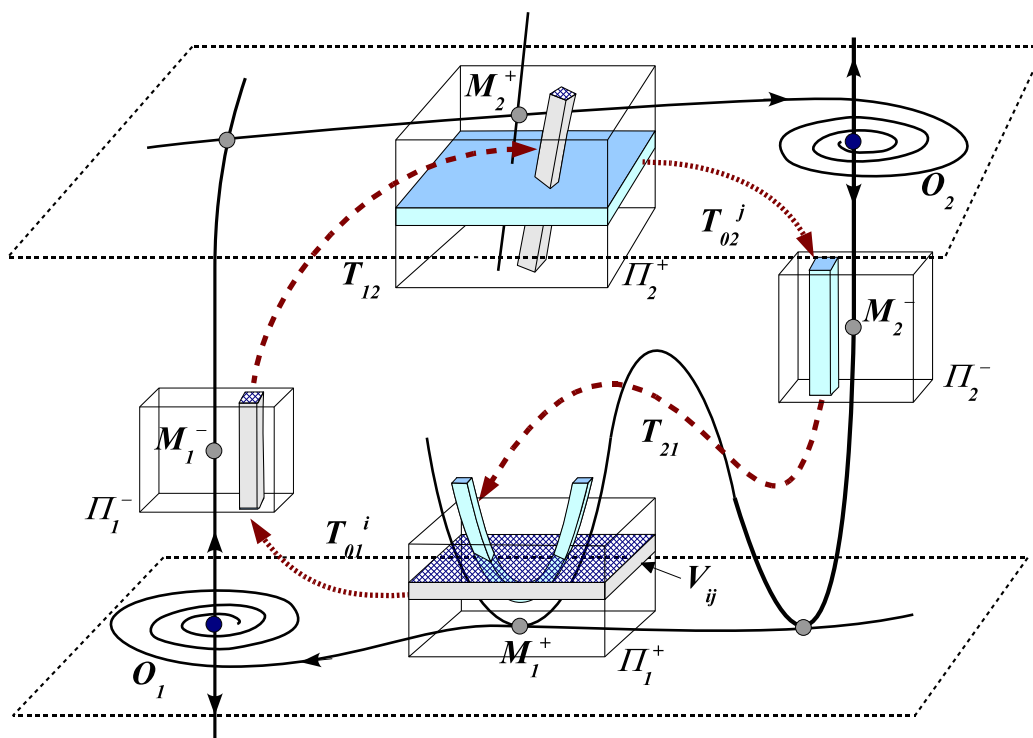


Рис. 3.

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — некоторые константы (инварианты диффеоморфизма  $F_0$ ). Области  $\Delta_{ij}$  из теоремы 1 соответствуют тем значениям исходных параметров  $\varepsilon$ , при которых рескейлинг-параметры  $M_1, M_2$  и  $B$  принимают конечные значения (например,  $\|(M_1, M_2, B)\| \leq L$  для некоторого заранее выбранного положительного  $L$ ). Очевидно, при больших  $i$  и  $j$ , мы можем получить любые конечные значения параметров  $M_1$  и  $M_2$  произвольно малым и независимым варьированием значений параметров  $\mu$  и  $\varphi_1$  соответственно (или  $\mu$  и  $\varphi_2$ ). Ясно, что это возможно только благодаря тому, что множители  $\gamma_1^{2i}\gamma_2^{2j}$  и  $(\lambda_1\gamma_1)^i(\lambda_1\gamma_2)^j \sim B\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}$  являются асимптотически большими при  $i, j \rightarrow \infty$ . То же самое касается и параметра  $B$ . Действительно, так как  $J_1$  и  $J_2$  положительны, мы можем прологарифмировать последнее соотношение из (1.4). В результате получим  $\ln B \sim i \ln J_1 + j \ln J_2$ . В силу (1.1), это соотношение можно переписать в таком виде:

$$\frac{\ln B}{\ln |J_2|} \sim j - i(\varepsilon_3 - S(F_0)). \quad (1.5)$$

Поскольку  $S(F_0) = \ln |J_1(0)| / \ln |J_2(0)| < 0$  по условию (В), то соотношение (1.5) всегда можно выполнить путем варьирования значений параметра  $\varepsilon_3$  для больших  $i$  и  $j$ . Заметим, что здесь мы должны брать заданную бесконечную последовательность целых  $i$  (для которых значения  $\cos(i\varphi_1 + \beta_1)$  асимптотически малы).

Теорема 1 показывает, что трехмерное отображение Эно (1) является нормальной формой для соответствующих отображений первого возвращения (оно получается, если пренебречь  $o(1)$ -членами в (1.2)). Таким образом, мы можем изучить бифуркации однообходных



периодических траекторий в семействе  $F_\varepsilon$ , при  $\varepsilon \in \Delta_{ij}$ , с помощью стандартного анализа бифуркаций неподвижных точек конкретного отображения (1). На этом пути можно получать разные результаты — в частности, теорему о каскаде диких гиперболических аттракторов лоренцевского типа, вполне аналогичную соответствующей теореме из [22]:

*В пространстве параметров  $\varepsilon$  в любой окрестности начала координат  $\varepsilon = 0$  существует счетное множество открытых областей  $\delta_{ij}$ , таких, что  $\delta_{ij} \subset \Delta_{ij}$  и диффеоморфизм  $F_\varepsilon$  имеет при  $\varepsilon \in \delta_{ij}$  (локальный) дикий лоренцевский аттрактор<sup>5</sup> при значениях параметров  $\varepsilon \in \delta_{ij}$ .*

Действительно, этот результат непосредственно вытекает из теоремы 1 вследствие того, что 1) дикий аттрактор Лоренца существует у отображения (1) для значений параметров  $(M_1, M_2, B)$  из некоторой открытой области [21] (см. также § 2) и 2) такие аттракторы устойчивы по отношению к возмущениям класса  $C^2$  [18].

Однако здесь можно получить и более сильный результат: о существовании счетного множества диких лоренцевских аттракторов:

**Теорема 2.** *В любой окрестности точки  $\varepsilon = 0$  в пространстве параметров существуют открытые области  $\mathcal{N}$ , в которых плотны такие значения  $\varepsilon$ , что соответствующий диффеоморфизм  $F_\varepsilon$  имеет счетное множество сосуществующих диких гиперболических аттракторов лоренцевского типа.*

*Доказательство.* Заметим, что области  $\mathcal{N}$  из теоремы — это, по существу, некоторые области Ньюхауса: по определению, в таких областях плотны значения параметров, отвечающих существованию гомоклинических касаний. Однако в нашем случае области  $\mathcal{N}$  обладают определенной спецификой. Дело в том, что, как вытекает из работ [12] и [28], в любой окрестности точки  $\varepsilon = 0$  в пространстве параметров существуют области Ньюхауса  $\mathcal{N}$ , в которых плотны такие значения параметров  $\varepsilon$ , что соответствующий диффеоморфизм  $F_\varepsilon$  имеет негрубый гетероклинический контур исходного типа, т.е. условия (A)–(C) выполняются и для  $F_\varepsilon$ . При этом новые траектории  $O_1(\varepsilon), O_2(\varepsilon)$  и  $G_{12}(\varepsilon)$  будут близки к соответствующим траекториям исходного диффеоморфизма  $F_0$ ; однако новая негрубая гетероклиническая траектория  $\tilde{G}_{12}(\varepsilon)$  (квадратичного касания многообразий  $W^s(O_1(\varepsilon))$  и  $W^u(O_2(\varepsilon))$ ), хотя и целиком расположена в  $U$ , не будет близка к  $G_{21}$  (по отношению к  $G_{21}$  она будет многообходной). Теперь, очевидно, доказательство теоремы можно провести с помощью стандартной процедуры вложенных областей. Действительно, из теоремы 1 вытекает, что вблизи любого значения  $\varepsilon \in \mathcal{N}$ , такого, что  $F_\varepsilon$  имеет негрубый гетероклинический контур, в  $\mathcal{N}$  найдется открытая область  $u_1$  значений параметров, отвечающая существованию дикого лоренцевского аттрактора. Поскольку  $u_1$  принадлежит  $\mathcal{N}$ , в ней существуют другие значения  $\varepsilon$ , которые соответствуют новому негрубому гетероклиническому контуру исходного типа. Соответственно, можно найти меньшую открытую подобласть  $u_2 \subset u_1$ , отвечающую существованию уже двух разных аттракторов лоренцевского типа. Повторяя эту процедуру, мы приходим к искомому результату.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Пусть  $\mathcal{N}_{wLa} \subset \mathcal{N}$  — это то подмножество параметров, при которых диффеоморфизм  $F_\varepsilon$  имеет счетное множество диких лоренцевских аттракторов. По доказательству теоремы 2, подмножество  $\mathcal{N}_{wLa}$  получается как счетное пересечение открытых плотных подмножеств из  $\mathcal{N}$ .

<sup>5</sup>Этот аттрактор является локальным и «однообходным», поскольку принадлежит  $V_{ij}$  и является аттрактором только для отображения первого возвращения  $T_{ij}$ .

Это означает, что  $\mathcal{N}_{wLa}$  является в  $\mathcal{N}$  подмножеством второй категории (или массивным подмножеством). Соответственно, свойство *иметь счетное множество сосуществующих диких гиперболических аттракторов лоренцевского типа* является *типичным* свойством систем из указанных областей Ньюхауса.

## 2. О динамических свойствах трехмерных отображений Эно

В этом параграфе основное внимание будет уделено вопросам, связанным с исследованием динамических свойств трехмерного квадратичного отображения (1). Это отображение можно рассматривать как естественное трехмерное обобщение хорошо известного двумерного отображения Эно  $\bar{y} = z$ ,  $\bar{z} = M_1 + M_2y - z^2$ ; действительно, как и последнее, отображение (1) квадратичное, имеет постоянный якобиан, равный  $B$ , и, более того, при  $B = 0$  оно, по координатам  $(y, z)$ , вырождается как раз в двумерное отображение Эно.

В работе [21] (см. также [22]) было показано, что

*отображение (1) обладает (глобальным) диким гиперболическим аттрактором в некоторой открытой области параметров.*

Основная идея доказательства этого утверждения состояла в том, чтобы проверить выполнение условий из работы [7], в которой было показано, в частности, что если (трехмерное) отображение имеет неподвижную точку с триплетом  $(-1, -1, +1)$  мультипликаторов, то его квадрат может быть локально вложен в поток с точностью до малых членов; при этом соответствующая локальная нормальная потоковая форма в определенных случаях совпадает с системой Мариока–Шимицу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x(1-z) - \lambda y, \\ \dot{z} &= -\alpha z + x^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

Применительно к отображению (1) этот результат звучит как следующее утверждение [21, 22]:

**Лемма 1.** *Для значений параметров  $(M_1, M_2, B)$ , близких к  $(M_1 = -1/4, M_2 = 1, B = 1)$ , вторая итерация отображения (1) в некоторой окрестности одной из двух неподвижных точек совпадает с отображением за время 1 вдоль траекторий потока (2.1) с точностью до малых корректирующих членов. Более того, координаты  $(x, y, z)$  и параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  могут принимать произвольные конечные значения.*

Заметим, что в [29, 30] было численно установлено (доказательство, не использующее помощь компьютера, было проведено недавно в [31]), что поток (2.1) содержит аттрактор Лоренца для значений параметров из некоторой открытой области. Применяя этот результат к трехмерному отображению Эно, можно получить (в силу леммы 1), что вблизи значения  $(M_1 = -1/4, M_2 = 1, B = 1)$  параметров существует область с дикими аттракторами лоренцевского типа.

Более того, численные исследования в [21] показали, что такие (дикие лоренцевские) аттракторы могут существовать и в достаточно больших областях параметров и иметь значительные размеры. На рисунке 4 показаны полученные численно «3D-картинки», являющиеся по сути портретом итераций (отображения (1)) всего лишь одной начальной точки

для значений параметров  $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$  (рис. слева) и  $M_1 = 0, M_2 = 0.815, B = 0.7$  (рис. справа). Отметим также, что аттрактор справа на рис. 4 аналогичен аттрактору Лоренца с лакуной (наблюдаемому, например, в системе (2.1), см. [29, 30]).

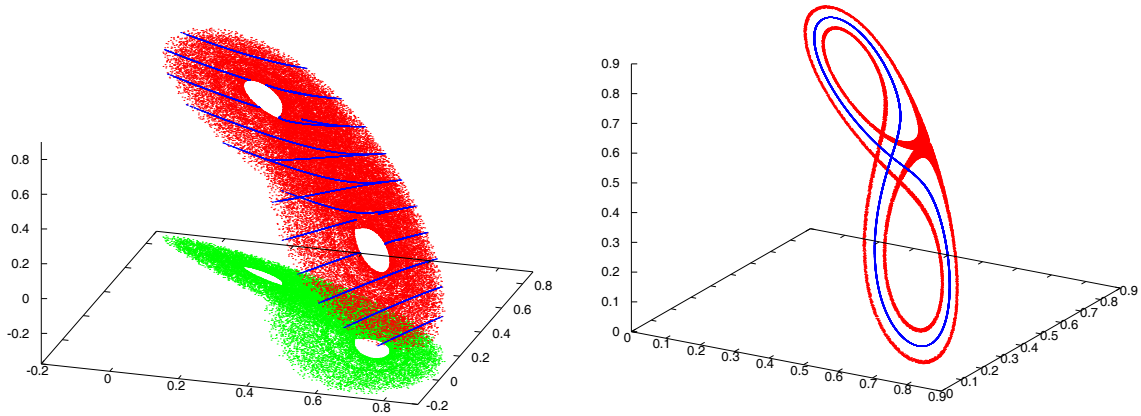


Рис. 4. Портреты аттракторов трехмерного отображения Эно (1), найденные численно при  $M_1 = 0, B = 0.7, M_2 = 0.85$  (слева) и  $M_1 = 0, B = 0.7, M_2 = 0.815$  (справа). На рисунке слева показаны проекция аттрактора на плоскость  $(x, y)$  и его сечения плоскостями  $z = \text{const}$ . На правом рисунке показана замкнутая линия (выглядящая как «восьмерка»), которая является седловой замкнутой инвариантной кривой, лежащей внутри лакуны.

Итак, мы отмечаем, что отображение (1), несмотря на то, что оно крайне просто по форме, демонстрирует весьма интересную динамику. Здесь мы выделяем, конечно, ту ее сторону, которая относится к странным аттракторам, см. также работу [21], где соответствующие вопросы рассмотрены достаточно подробно. Однако существует еще один момент, который делает отображения типа (1) весьма актуальными в теории бифуркаций. Дело в том, что трехмерное отображение Эно (1) мы можем также отнести к классу «гомоклинических отображений», которые имеют естественное происхождение в динамике как нормальные формы отображений первого возвращения вблизи гомоклинических касаний.<sup>6</sup> Хорошо известно, что такие одномерные и двумерные квадратичные отображения, как *отображение параболы* (называемое еще логистическим отображением)  $\bar{y} = M_1 - y^2$ , *стандартное отображение Эно*  $(\bar{x}, \bar{y}) = (y, M_1 - Bx - y^2)$ , *отображение Мура*  $(\bar{x}, \bar{y}) = (y, M_1 + M_2y - x^2)$ , а также так называемое *обобщенное отображение Эно*  $(\bar{x}, \bar{y}) = (y, M_1 - Bx - y^2 + \epsilon_1xy + \epsilon_2y^3)$ , возникают естественным образом при исследовании бифуркаций квадратичных гомоклинических касаний: мы отсылаем читателя к книге [32], в которой собрано достаточно много материала по этой тематике (см. также [15]).

Что касается трехмерных отображений, то еще с работы [14] (см. также [33, 34]), было известно, что трехмерное отображение вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2z - y^2 \tag{2.2}$$

<sup>6</sup>Естественно, само отображение первого возвращения определено в достаточно малой окрестности выбранной гомоклинической точки при малых же значениях параметров возмущения. Однако часто бывает, что к этому отображению, записанному в исходных координатах и с исходными параметрами, можно применить так называемый *рескейлинг-метод*, когда координаты и параметры «растягиваются» с большим масштабным фактором, пропорциональным времени возвращения  $\mathcal{K}$ , при этом новые координаты и параметры могут принимать произвольные конечные значения. Тогда, отбрасывая в новом отображении асимптотически малые (при  $\mathcal{K} \rightarrow \infty$ ) члены, можно получить отображение достаточно простого вида, которое, однако, обладает всеми основными свойствами динамики исходного отображения первого возвращения.

является нормальной формой отображения первого возвращения в случае квадратичного гомоклинического касания многообразий неподвижной точки типа седло-фокус (2,2).<sup>7</sup>

### 3. Доказательство теоремы 1

Хорошо известно ([26], [15]), что в окрестности  $U_1$  неподвижной точки  $O_1$  можно ввести такие  $C^r$ -координаты  $(x, y) = (x_1, x_2, y)$ , в которых локальное отображение  $T_{01}(\varepsilon) := F_\varepsilon|_{U_1}$  при всех достаточно малых значениях  $\varepsilon$  имеет вид

$$T_{01} : \begin{cases} \bar{x} &= \lambda_1 R_\varphi x + O(\|x\|^2|y|) \\ \bar{y} &= \gamma_1 y + O(\|x\|y^2) \end{cases}, \quad (3.1)$$

где  $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  —  $(2 \times 2)$ -матрица поворота на угол  $\varphi$ . Аналогичные координаты существуют и в  $U_2$ , так что отображение  $T_{02}(\varepsilon) := F_\varepsilon|_{U_2}$  при всех достаточно малых  $\varepsilon$  имеет вид:

$$T_{02} : \begin{cases} \bar{u} &= \lambda_2 R_\psi u + O(\|u\|^2|v|) \\ \bar{v} &= \gamma_2 v + O(\|u\|v^2) \end{cases}. \quad (3.2)$$

В этих координатах локальные устойчивые и неустойчивые многообразия точек  $O_1$  и  $O_2$  имеют такие уравнения:  $W_{loc}^s(O_1): \{y = 0\}$ ,  $W_{loc}^u(O_1): \{x = 0\}$ ,  $W_{loc}^s(O_2): \{v = 0\}$ ,  $W_{loc}^u(O_2): \{u = 0\}$ . При  $\varepsilon = 0$  выберем пару точек  $M_1^- = (0, 0, y^-) \in U_1$  и  $M_2^+ = (u_1^+, u_2^+, 0) \in U_2$  траектории  $\Gamma_{12}$  и пару точек  $M_2^- = (0, 0, v^-) \in U_2$  и  $M_1^+ = (x_1^+, x_2^+, 0) \in U_1$  траектории  $\Gamma_{21}$ . Очевидно, существуют такие целые  $q_1$  и  $q_2$ , что  $M_2^+ = F_0^{q_1}(M_1^-)$  и  $M_1^+ = F_0^{q_2}(M_2^-)$ . Пусть  $\Pi_l^+$  и  $\Pi_l^-$  — некоторые малые окрестности точек  $M_l^+$  и  $M_l^-$  на  $U_l$ ,  $l = 1, 2$ . Тогда глобальные отображения  $T_{12}(\varepsilon) := F_\varepsilon^{q_1}|_{\Pi_1^-} : \Pi_1^- \rightarrow \Pi_2^+$  и  $T_{21}(\varepsilon) := F_\varepsilon^{q_2}|_{\Pi_2^-} : \Pi_2^- \rightarrow \Pi_1^+$  будут определены при всех достаточно малых  $\varepsilon$  и в координатах (3.1)–(3.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$T_{12} : \begin{cases} \bar{u} - u^+ &= A^{(1)}x + b^{(1)}(y - y^-) + O(\|x\|^2 + \|x\| \cdot |y - y^-| + (y - y^-)^2) \\ \bar{v} &= (c^{(1)})^\top x + d^{(1)}(y - y^-) + O(\|x\|^2 + \|x\| \cdot |y - y^-| + (y - y^-)^2) \end{cases}, \quad (3.3)$$

$$T_{21} : \begin{cases} \bar{x} - x^+ &= A^{(2)}u + b^{(2)}(v - v^-) + O(\|u\|^2 + \|u\| \cdot |v - v^-| + (v - v^-)^2) \\ \bar{y} = \mu &+ (c^{(2)})^\top u + d^{(2)}(v - v^-)^2 + O(\|u\|^2 + \|u\| \cdot |v - v^-| + |v - v^-|^3) \end{cases}, \quad (3.4)$$

где  $d^{(1)} \neq 0$ , поскольку  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_1)$  пересекаются трансверсально в точке  $M_2^+$ , и  $d^{(2)} \neq 0$ , поскольку касание между  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  — квадратичное.

Также будем считать, что  $b^{(2)} = (b, 0)^\top$  и  $c^{(2)} = (c, 0)$ . Этого всегда можно добиться с помощью соответствующего ортогонального поворота координат  $(x_1, x_2)$  и  $(u_1, u_2)$ . При этом формы (3.1)–(3.2) локальных отображений не изменятся. Поскольку  $T_{12}$  и  $T_{21}$  — диффеоморфизмы, то их якобианы  $J_{12}$  и  $J_{21}$ , вычисленные в точках  $M_1^-$  и  $M_2^-$  соответственно,

<sup>7</sup>Заметим, что отображение (2.2) можно рассматривать как обратное для (1). В этом случае новые параметры  $(M_1, M_2, B)$  из (2.2) будут связаны со старыми из (1) следующим образом:

$$M_1^{new} = \frac{M_1}{B^2}, \quad M_2^{new} = -\frac{M_2}{B}, \quad B^{new} = \frac{1}{B}.$$

Тогда, например, в соответствии с леммой 1, мы можем утверждать, что отображение (2.2) имеет дикий лоренцевский репеллер для значений параметров  $(M_1, M_2, B)$ , близких к  $(M_1 = -1/4, M_2 = 1, B = 1)$ .



не равны нулю, т. е.

$$J_{12} = \det \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & d^{(1)} \end{pmatrix} \neq 0, \quad J_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & b \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (3.5)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad a_{22}^{(2)} \neq 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что если локальные отображения  $T_{01}$  и  $T_{02}$  заданы в нормальной форме (3.1) и (3.2) соответственно, то существуют удобные представления для их итераций (см. [15], [26]); отображение  $T_{01}^k(\varepsilon): (x_0, y_0) \rightarrow (x_k, y_k)$  при всех достаточно больших  $k$  может быть записано в таком (перекрестном) виде:

$$\begin{aligned} x_k &= \lambda_1^k R_{k\varphi} x_0 + \lambda_1^{2k} \rho_{1k}(x_0, y_k, \varepsilon), \\ y_0 &= \gamma_1^{-k} y_k + \lambda_1^k \gamma_1^{-k} \rho_{2k}(x_0, y_k, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.7)$$

и, соответственно, отображения  $T_{02}^k(\varepsilon): (u_0, v_0) \rightarrow (u_k, v_k)$  — в виде:

$$\begin{aligned} u_k &= \lambda_2^k R_{k\psi} u_0 + \lambda_2^{2k} \rho_{3k}(u_0, v_k, \varepsilon), \\ v_0 &= \gamma_2^{-k} v_k + \lambda_2^k \gamma_2^{-k} \rho_{4k}(u_0, v_k, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где функции  $\rho_k$  и их производные до порядка  $(r-2)$  включительно равномерно ограничены по  $k$ .

Теперь, используя формулы (3.3), (3.4), (3.7) и (3.8), получаем следующее выражение для отображения первого возвращения  $T_{ij} \equiv T_{21} T_{02}^j T_{12} T_{01}^i: \Pi^+ \rightarrow \Pi^+$ :

$$\begin{aligned} \bar{u} - u^+ &= A^{(1)} \lambda_1^i R_{i\varphi} x + b^{(1)}(y - y^-) + O(\lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_1^i \|x\| \cdot |y - y^-| + (y - y^-)^2), \\ \gamma_2^{-j}(\bar{v} + \lambda_2^j \rho_{4j}) &= (c^{(1)})^\top \lambda_1^i R_{i\varphi} x + d^{(1)}(y - y^-) + \\ &\quad + O(\lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_1^i \|x\| \cdot |y - y^-| + (y - y^-)^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= A^{(2)} \lambda_2^j R_{j\psi} \bar{u} + b^{(2)}(\bar{v} - v^-) + O(\lambda_2^{2j} \|\bar{u}\|^2 + \lambda_2^j \|\bar{u}\| \cdot |\bar{v} - v^-| + (\bar{v} - v^-)^2), \\ \gamma_1^{-i}(\bar{y} + \lambda_1^i \rho_{2i}) &= \mu + (c^{(2)})^\top \lambda_2^j R_{j\psi} \bar{u} + d^{(2)}(\bar{v} - v^-) + \\ &\quad + O(\lambda_2^{2j} \|\bar{u}\|^2 + \lambda_2^j \|\bar{u}\| \cdot |\bar{v} - v^-| + |\bar{v} - v^-|^3). \end{aligned}$$

Сделаем следующую замену (сдвиг) координат

$$u_{new} = u - u^+ + \alpha_{ij}^1, \quad v_{new} = v - v^- + \alpha_{ij}^2, \quad x_{new} = x - x^+ + \alpha_{ij}^3, \quad y_{new} = y - y^- + \alpha_{ij}^4,$$

в которой коэффициенты  $\alpha_{ij} = O(\lambda_1^i + \lambda_2^j + \gamma_1^{-i} + |\gamma_2|^{-j})$  подберем таким образом, чтобы занулить свободные члены в уравнениях для  $\bar{x}$ ,  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ , а также линейный член по  $\bar{v}$  в уравнении для  $\bar{y}$ . После этого коэффициент перед  $\bar{v}$  в уравнении для  $\bar{x}_2$  может стать отличным от нуля (а именно, того же порядка, что и  $\alpha_{ij}$ ) — обратить его снова в нуль можно с помощью дополнительного поворота координат  $(x_1, x_2)$  на соответствующий малый угол. В результате система (3.9) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A^{(1)} \lambda_1^i R_{i\varphi} x + b^{(1)} y + O(\lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_1^i \|x\| \cdot |y| + y^2), \\ \gamma_2^{-j} \bar{v}(1 + O(\lambda_2^j)) &= (c^{(1)})^\top \lambda_1^i R_{i\varphi} x + d^{(1)} y + O(\lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_1^i \|x\| \cdot |y| + y^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A^{(2)} \lambda_2^j R_{j\psi} \bar{u} + b^{(2)} \bar{v} + O(\lambda_2^{2j} \|\bar{u}\|^2 + \lambda_2^j \|\bar{u}\| \cdot |\bar{v}| + \bar{v}^2), \\ \gamma_1^{-i} \bar{y}(1 + O(\lambda_1^i)) &= M + (c^{(2)})^\top \lambda_2^j R_{j\psi} \bar{u} + d^{(2)} \bar{v}^2 + O(\lambda_2^{2j} \|\bar{u}\|^2 + \lambda_2^j \|\bar{u}\| \cdot |\bar{v}| + |\bar{v}|^3), \end{aligned}$$

где новые коэффициенты и матрицы ( $A^{(1)}$ ,  $b^{(1)}$ ,  $d^{(1)}$  и т. д.) могут отличаться от исходных на величины порядка  $\alpha_{ij}$ . Кроме того,

$$M = \mu + \lambda_2^j (c^{(2)})^\top u^+ (1 + \dots) - \gamma_1^{-i} y^- (1 + \dots), \quad (3.11)$$

где многоточия обозначают члены, которые стремятся к нулю при  $i, j \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим второе уравнение из (3.10). Так как  $d^{(1)} \neq 0$ , то при всех больших  $i$  и  $j$  можно ввести новые координаты  $y$  и  $v$ , в которых это уравнение примет линейный вид  $\gamma_2^{-j} \bar{v} = d^{(1)} y$  (т. е.  $y_{new}$  — это правая часть уравнения, деленная на  $d^{(1)}$ , а  $v_{new}$  — соответственно, левая, деленная на  $\gamma_2^{-j}$ ). Далее, с помощью замены координат вида  $u_{new} = u - (b^{(1)}/d^{(1)})\gamma_2^{-j}v + O(\gamma_2^{-2j}v^2)$ , исключаем из уравнений для  $\bar{u}$  все члены, которые зависят только от  $y$ . В результате система (3.10) принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A^{(1)} \lambda_1^i R_{i\varphi} x + O(\lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_1^i \|x\| \cdot |y|), \\ \gamma_2^{-j} \bar{v} &= d^{(1)} y, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A^{(2)} \lambda_2^j R_{j\psi} \bar{u} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \bar{v} + O(\lambda_2^{2j} \|\bar{u}\|^2 + \lambda_2^j \|\bar{u}\| \cdot |\bar{v}| + \bar{v}^2), \\ \gamma_1^{-i} \bar{y} (1 + O(\lambda_1^i)) &= M + (c^{(2)})^\top \lambda_2^j R_{j\psi} \bar{u} + d^{(2)} \bar{v}^2 + O(\lambda_2^{2j} \|\bar{u}\|^2 + \lambda_2^j \|\bar{u}\| \cdot |\bar{v}| + |\bar{v}|^3). \end{aligned}$$

Заметим, что последние замены координат могут привести к появлению (в четвертом уравнении системы) линейного по  $\bar{v}$  члена порядка  $(\lambda_2^j \gamma_2^{-j})$ . Мы снова его занулим с помощью дополнительного сдвига координат  $(x, y, u, v)$  на малую величину того же порядка — так что в (3.12) такого члена нет.

Из первых двух уравнений системы (3.12) координаты  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  легко выражаются через  $x$  и  $y$ . Подставив соответствующие выражения в последние два уравнения, получим для отображения  $T_{ij} : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$  такое его представление в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= bd^{(1)} \gamma_2^j y + O(\lambda_2^j \lambda_1^i \|x\| + \gamma_2^{2j} y^2), \\ \bar{x}_2 &= K_1(i, j) \lambda_2^j \lambda_1^i x_1 + K_2(i, j) \lambda_2^j \lambda_1^i x_2 + O(\lambda_2^j \lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_2^j \lambda_1^i \gamma_2^j \|x\| \cdot |y| + \gamma_2^{2j} y^2), \\ \gamma_1^{-i} \bar{y} (1 + O(\lambda_1^i)) &= M + c \lambda_2^j \lambda_1^i (C_1(i\varphi, j\psi) x_1 + C_2(i\varphi, j\psi) x_2) + \\ &+ d^{(2)} (d^{(1)})^2 \gamma_2^{2j} y^2 + O(\lambda_2^j \lambda_1^{2i} \|x\|^2 + \lambda_2^j \lambda_1^i \gamma_2^j \|x\| \cdot |y| + \gamma_2^{3j} |y|^3), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $K_l(i, j)$ ,  $l = 1, 2$ , — некоторые равномерно ограниченные по  $i, j$  коэффициенты, и

$$\begin{aligned} C_1(i\varphi, j\psi) &= \cos i\varphi (a_{11}^{(2)} \cos j\psi - a_{21}^{(2)} \sin j\psi) + \sin i\varphi (a_{12}^{(2)} \cos j\psi - a_{22}^{(2)} \sin j\psi), \\ C_2(i\varphi, j\psi) &= -\sin i\varphi (a_{11}^{(2)} \cos j\psi - a_{21}^{(2)} \sin j\psi) + \cos i\varphi (a_{12}^{(2)} \cos j\psi - a_{22}^{(2)} \sin j\psi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим, что  $C_1^2 + C_2^2 = (a_{11}^{(2)} \cos j\psi - a_{21}^{(2)} \sin j\psi)^2 + (a_{12}^{(2)} \cos j\psi - a_{22}^{(2)} \sin j\psi)^2$ . Поскольку  $a_{22}^{(2)} \neq 0$  (в силу (3.6)), то  $C_1$  и  $C_2$ , вообще говоря, одновременно в нуль не обращаются.<sup>8</sup>

Будем рассматривать теперь такие пары целых  $i$  и  $j$ , что величина  $J_{ij} = (\lambda_1^2 \gamma_1)^i (\lambda_2^2 \gamma_2)^j \equiv (J_1)^i (J_2)^j$  остается равномерно ограниченной по  $i, j$ . Этого всегда можно добиться, поскольку  $\ln J_1 \cdot \ln J_2 < 0$  по предположению, см. формулу (1.5).

Введем в (3.13) новые координаты (так называемые рескейлинг-координаты) следующим образом:

$$y = -\frac{\gamma_1^{-i} \gamma_2^{-2j}}{d^{(2)} (d^{(1)})^2} Z, \quad x_1 = -\frac{b \gamma_1^{-i} \gamma_2^{-j}}{d^{(2)} d^{(1)}} Y, \quad x_2 = -\frac{\lambda_2^j \lambda_1^i \gamma_1^{-i} \gamma_2^{-j}}{cd^{(2)} (d^{(1)})^2} X. \quad (3.15)$$

<sup>8</sup>За исключением случая  $a_{11}^{(2)} a_{22}^{(2)} - a_{21}^{(2)} a_{12}^{(2)} = 0$ , при котором  $\operatorname{tg} j\psi = a_{12}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$ . Но даже в этом случае мы всегда можем выбирать такие  $j$ , при которых  $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ .

Тогда система (3.13) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= Z + O(\lambda_2^j \lambda_1^i), & \bar{X} &= bd^{(1)} c K_1(i, j) Y + O(\lambda_2^j \lambda_1^i), \\ \bar{Z} &= M_1 + M_2 Y + J_{ij} (C_2(i\varphi, j\psi) + \dots) X - Z^2 + O(\lambda_2^j \lambda_1^i), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$M_1 = -d^{(2)} (d^{(1)})^2 \gamma_1^{2i} \gamma_2^{2j} M, \quad M_2 = c(\lambda_1 \gamma_1)^i (\lambda_2 \gamma_2)^j C_1(i\varphi, j\psi). \quad (3.17)$$

Поскольку коэффициент перед  $M$  в (3.17) — асимптотически большой при  $i, j \rightarrow \infty$ , то параметр  $M_1$  при больших  $i, j$  может принимать любые конечные значения при варьировании  $\mu$  вблизи тех значений, при которых  $M$  обращается в нуль, см. (3.11).

Заметим, что коэффициент  $(\lambda_1 \gamma_1)^i (\lambda_2 \gamma_2)^j \equiv J_{ij} \lambda_2^{-j} \lambda_1^{-i}$  в формуле (3.17) для  $M_2$  — асимптотически большой (для тех  $i$  и  $j$ , при которых  $J_{ij}$  — равномерно ограничено). Поэтому при варьировании  $\varphi$  вблизи тех значений, при которых  $C_1(i\varphi, j\psi) = 0$  (а такие значения  $\varphi$  плотны на любом интервале из  $(0, \pi)$ ), можно получать произвольные конечные значения параметра  $M_2$ .

В том случае, когда все коэффициенты в (3.16) равномерно ограничены, соответствующие отображения в рескейлинг-координатах будут асимптотически близки к отображению типа Эно с якобианом

$$B = bd^{(1)} K_1(i, j) C_2(i\varphi, j\psi) J_{ij}.$$

Однако отображение (3.16) есть не что иное, как отображение первого возвращения  $T_{ij}$ , область определения которого в первоначальных координатах  $(x_1, x_2, y)$  отвечает ограниченными значениям  $(Y, X, Z)$  в силу (3.15). Якобиан  $J(T_{ij})$  отображения  $T_{ij}$  в исходных координатах может быть легко вычислен [35] (когда локальные отображения  $T_{01}$  и  $T_{02}$  приведены к нормальной форме, (3.1) и (3.2) соответственно):

$$J(T_{ij}) = J(T_{01}^i) J(T_{02}^j) J(T_{12}) J(T_{21}) = J_{ij} J(T_{12}(M_1^-)) J(T_{21}(M_2^-)) (1 + \dots).$$

Отметим, что все замены координат, которые мы делали для приведения отображения  $T_{ij}$  к виду (3.16), представляли собой линейные преобразования и преобразования, близкие к тождественному при  $i, j \rightarrow +\infty$ . Таким образом, якобиан отображения (3.16) совпадает с  $J(T_{ij})$ , с точностью до асимптотически малых при  $i, j \rightarrow +\infty$  членов. Таким образом,  $bd^{(1)} K_1(i, j) C_2(i\varphi, j\psi) = J(T_{12}(M_1^-)) J(T_{21}(M_2^-)) (1 + \dots)$  и, соответственно,

$$B = J(T_{12}(M_1^-)) J(T_{21}(M_2^-)) (\lambda_1^2 \gamma_1)^i (\lambda_2^2 \gamma_2)^j \quad (3.18)$$

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы 1, достаточно сделать замену  $X$  на  $bd^{(1)} K_1(i, j) X_{new}$ , после которой отображение (3.16) примет искомый вид (1.2).

Работа поддержана грантами РФФИ No.07-01-00566, No.07-01-00715 и No.10-01-00429, а также региональным грантом РФФИ No.09-01-97016-р Поволжье.

## Список литературы

- [1] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 3, с. 558–561.
- [2] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб., 1970, т. 81, № 1, с. 92–103.



- [3] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький: ГГУ, 1986. С. 150–163.
- [4] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттракторов Лоренца // Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 336–339.
- [5] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Моск. матем. об-ва, 1982, т. 44, с. 150–212.
- [6] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы // УМН, 1981, т. 36, вып. 4, с. 240–241.
- [7] Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1993, vol. 3, pp. 1123–1139.
- [8] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр., Горький: ГГУ, 1983, с. 3–26.
- [9] Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1281–1285.
- [10] Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами // Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 1, с. 26–29.
- [11] Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1979, vol. 50, pp. 101–151.
- [12] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. РАН, 1993, т. 329, № 4, с. 404–407.
- [13] Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence / G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 1–34.
- [14] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. РАН, 1993, т. 330, № 2, с. 144–147.
- [15] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions: I // Nonlinearity, 2008, vol. 21, pp. 923–972.
- [16] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб., 1998, т. 189, № 2, с. 137–160.
- [17] Овсянников И. М., Шильников Л. П. О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса // Матем. сб., 1986, т. 130, № 4, с. 552–570.
- [18] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодических возмущениях аттракторов лоренцевского типа // Докл. РАН, 2008, т. 418, № 1, с. 23–27.
- [19] Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univ. Math. J., 1971, vol. 21, № 3, pp. 193–226.
- [20] Hirsch M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds. Lect. Notes Math., vol. 583. Berlin: Springer, 1977. 149 p.
- [21] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D. V. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, pp. 3493–3508.
- [22] Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // Regul. Chaotic Dyn., 2006, vol. 11, pp. 191–212.



- [23] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, pp. 137–147.
- [24] Гонченко С. В., Стенькин О. В., Шильников Л. П. О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 1, с. 3–25.
- [25] Turaev D. V. On dimension of nonlocal bifurcational problems // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1996, vol. 6, pp. 919–948.
- [26] Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: P. I. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1998;  
Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: P. II. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2002.
- [27] Gonchenko S. V. Dynamics and moduli of  $\Omega$ -conjugacy of  $4D$ -diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic orbit to a saddle-focus fixed point // Methods of qualitative theory of differential equations and related topics. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 200.) Providence, RI: AMS, 2000. P. 107–134.
- [28] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН, 1997, т. 216, с. 76–125.
- [29] Шильников А. Л. Бифуркации и хаос в системе Мариока–Шимицу // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр., Горький: ГГУ, 1986, с. 180–193.
- [30] Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Phys. D, 1993, vol. 62, pp. 338–346.
- [31] Tigan G., Turaev D. On the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Nonlinearity (submitted for publication).
- [32] Гомоклинические касания: Сб. ст. / С. В. Гонченко, Л. П. Шильников. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютер. исслед., 2007. 524 с.
- [33] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits // Chaos, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 15–31.
- [34] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О динамических свойствах диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2003, т. 7, с. 92–118.
- [35] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Tatjer J. C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, pp. 233–266.

