УДК 517.938

К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности

Т. М. Митрякова, О. В. Починка
Нижегородский Государственный Университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, Нижний Новгород, пр-т. Гагарина, 23
mtm@mm.unn.ru, olga-pochinka@yandex.ru

Получено 16 января 2010 г.

В работе рассматриваются диффеоморфизмы ориентируемых поверхностей, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и блуждающее множество содержит конечное число гетероклинических орбит трансверсального и нетрансверсального пересечения. Выделен содержательный класс диффеоморфизмов, для которых найден полный топологический инвариант — схема, состоящая из набора геометрических объектов и набора числовых параметров.

Ключевые слова: орбиты гетероклинического касания, одностороннее касание, топологическая сопряженность, модули топологической сопряженности

T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka

To a question on classification of diffeomorphisms of surfaces with a finite number of moduli of topological conjugacy

In this paper diffeomorphisms on orientable surfaces are considered, whose non-wandering set consists of a finite number of hyperbolic fixed points and the wandering set contains a finite number of heteroclinic orbits of transversal and non-transversal intersections. We investigate substantial class of diffeomorphisms for which it is found complete topological invariant — a scheme consisting of a set of geometrical objects equipped by numerical parameters (moduli of topological conjugacy).

Keywords: orbits of heteroclinic tangency, one-sided tangency, topological conjugacy, moduli of topological conjugacy
Mathematical Subject Classification 2000: 37E30

Введение

К настоящему времени имеется значительный прогресс в классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях — диффеоморфизмов с конечным гиперболическим неблуждающим множеством и трансверсальным пересечением инвариантных многообразий периодических точек. Принципиальным отличием этих диффеоморфизмов от потоков Морса–Смейла на поверхностях является возможность трансверсального пересечения инвариантных многообразий различных седловых точек (гетероклинического пересечения). Топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях (диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений) получена в работах [2]–[4]. Она основана на классификации периодических отображений поверхностей, полученной Нильсеном в [17], и топологической классификации потоков Морса–Смейла без периодических траекторий на поверхностях, полученной М. Пейкшото в [21]. В работе В. З. Гринеса [11] показано, что в классе диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических орбит полным топологическим инвариантом является различающий граф диффеоморфизма, аналогичный графу Пейкшото для потоков [21], оснащенный гетероклиническими подстановками, несущими информацию о геометрии пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек. Следует отметить также работу [13], где предложен другой подход к нахождению топологических инвариантов таких диффеоморфизмов. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с бесконечным множеством гетероклинических орбит потребовала привлечения аппарата топологических цепей Маркова и следует из работы Х. Бонатти и Р. Ланжевена [6], где найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности C^1 структурно устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях[1].

Согласно [18], существует открытое множество дуг, которые начинаются в диффеоморфизме Морса–Смейла и имеют первую бифуркационную точку в диффеоморфизме с гетероклиническим касанием. Очевидно, что нарушение условия трансверсальностигетероклинических пересечений седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости. Более того, это приводит к возникновению непрерывных инвариантов — *модулей топологической сопряженности*[2] и, следовательно, к существованию континуума несопряженных диффеоморфизмов с изоморфными графами и одинаковой геометрией гетероклинического пересечения.

Первым, кто обратил внимание на этот факт, был Пэлис [20]. Он обнаружил существование модулей топологической сопряженности у систем с простой динамикой. Такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы с негрубой гетероклинической траекторией, в точках которой инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание. А именно, если f — такой диффеоморфизм (класса C^r, $r \geqslant 2$), имеющий две гиперболические седловые неподвижные точки σ_1 и σ_2 с собственными значениями ϱ_i, μ_i, такими, что $|\varrho_i| < 1 < |\mu_i|$, $i = 1, 2$, а кроме того, $W^s_{\sigma_1}$ имеет одностороннее касание с $W^u_{\sigma_2}$ в точках некоторой гетероклинической траектории, то параметр

$$\alpha = \frac{\ln|\varrho_2|}{\ln|\mu_1|}$$

[1]Ранее полный топологический инвариант был получен В. З. Гринесом [12] для структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей в предположении, что нетривиальные базисные множества являются одномерными (аттракторами и репеллерами), а число блуждающих гетероклинических орбит конечно.

[2]Термин «модуль топологической сопряженности» был предложен в работах Л. П. Шильникова и С. В. Гонченко и соответствует термину «moduli of stability», который употребляется в англоязычной литературе.

является модулем топологической сопряженности[3]. Другими словами, если f и f' — два двумерных диффеоморфизма с гетероклиническими касаниями, то f и f' могут быть сопряжены только в том случае, когда

$$\frac{\ln|\varrho_2|}{\ln|\mu_1|} = \frac{\ln|\varrho_2'|}{\ln|\mu_1'|}.$$

Отсюда, в частности, следует, что в любой C^1-окрестности диффеоморфизма поверхности, допускающего гетероклиническое касание, имеется континуум топологически несопряженных диффеоморфизмов. Если в некоторой окрестности диффеоморфизма f множество классов эквивалентности возможно описать с помощью конечного числа параметров, то говорят, что *диффеоморфизм f имеет конечное число модулей топологической сопряженности*. Минимально возможное число таких параметров называют *числом модулей топологической сопряженности (модальностью) диффеоморфизма f*.

Работа [20] послужила своеобразным толчком для появления целой серии работ по модулям, в которых рассматривались уже не только необходимые, но также и достаточные условия для топологической сопряженности «близких» диффеоморфизмов. Так, в работе [14] обнаружено явление «жесткости» гомеоморфизмов, сопрягающих диффеоморфизмы с гетероклиническим касанием, которое проявляется в том, что такой гомеоморфизм должен быть функцией вида $y = c|x|^\rho$ с заданным ρ в ограничении на инвариантные многообразия седел, не участвующие в гетероклиническом касании. Это явление приводит к тому, что уже достаточно просто организованные двумерные диффеоморфизмы с гетероклиническими касаниями могут иметь счетное множество модулей топологической сопряженности (диффеоморфизмы такого типа были указаны в работах [14], [15]). В частности, в работе [15] найдены необходимые и достаточные условия того, что диффеоморфизм ориентируемой поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряженности, и описана структура окрестности такого диффеоморфизма.

Таким образом, вопрос о топологической сопряженности «близких» диффеоморфизмов поверхности с конечным числом модулей топологической сопряженности достаточно хорошо изучен. В работе [16] был сделан первый шаг в решении проблемы топологической классификации «далеких» систем с гетероклиническими касаниями — найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерной сферы с конечным гиперболическим неблуждающим множеством, при условии, что блуждающее множество содержит в точности одну орбиту одностороннего гетероклинического касания.

В настоящей работе выделен содержательный класс диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей любого рода, с конечным числом орбит гетероклинического касания, для

[3]Весьма интересно отметить тот факт, что Ω-модули, то есть модули топологической эквивалентности (сопряженности) на множестве неблуждающих траекторий, были открыты раньше, чем само понятие модуля вошло в динамику. Так, в работе [7] Гаврилова и Шильникова был введен параметр

$$\theta = -\frac{\ln|\lambda|}{\ln|\gamma|}$$

для двумерных диффеоморфизмов с (квадратичным) гомоклиническим касанием к седловой неподвижной точке σ с мультипликаторами λ и γ, где $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$. При этом в [7] было показано, что при изменении значений θ в классе систем, где касание сохраняется, могут быть плотны значения θ, отвечающие бифуркациям периодических траекторий (то есть «непрерывно» меняется структура множества неблуждающих траекторий). Систематическое изучение Ω-модулей было начато в работах [8], [9], [10], где их существование было явно доказано для случая многомерных систем с гомоклиническими касаниями.

которого найдены условия топологической сопряженности, использующие геометрические инварианты, несущие информацию о структуре пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек и числовые характеристики, связанные с наличием односторонних гетероклинических касаний.

1. Формулировка результатов

Пусть f — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, заданный на гладком двумерном замкнутом ориентируемом многообразии M^2 и имеющий неблуждающее множество Ω_f, состоящее из конечного числа неподвижных гиперболических точек. Гиперболическая неподвижная точка называется *стоком (источником)*, если все ее собственные значения по модулю меньше (больше) единицы; *седлом* — если одно собственное значение, μ_p, по модулю больше, а другое, λ_p, по модулю меньше единицы. В этом случае любая точка $p \in \Omega_f$ имеет *инвариантные многообразия*:

устойчивое многообразие $W^s_p = \{x \in M^2 \ : \ \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^n(x), p) = 0\}$,

неустойчивое многообразие $W^u_p = \{x \in M^2 \ : \ \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^{-n}(x), p) = 0\}$,

где d — метрика на M^2. При этом $\dim\ W^s_p$ ($\dim\ W^u_p$) совпадает с числом собственных значений точки p, по модулю меньших (больших) единицы, $W^s_p = g^s(\mathbf{R}^{\dim\ W^s_p})$ ($W^u_p = g^u(\mathbf{R}^{\dim\ W^u_p})$), где $g^s : \mathbf{R}^{\dim\ W^s_p} \to M^2$ ($g^u : \mathbf{R}^{\dim\ W^u_p} \to M^2$) — инъективная иммерсия и $T_pW^s_p \oplus T_pW^u_p = T_pM^2$. Для любого подмножества $P \subset \Omega_f$ будем обозначать через W^u_P (W^s_P) объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий всех точек из множества P. Для седловой точки $p \in \Omega_f$ компонента связности множества W^s_p (W^u_p) называется *устойчивой (неустойчивой) сепаратрисой.*

Пусть $p,\ q \in \Omega_f$ — различные седловые точки, такие, что $(W^s_p \setminus p) \cap (W^u_q \setminus q) \neq \varnothing$, тогда любая точка $x \in (W^s_p \setminus p) \cap (W^u_q \setminus q)$ называется *гетероклинической точкой*, а ее орбита — *гетероклинической орбитой.* Гетероклиническая точка может быть точкой трансверсального или нетрансверсального пересечения в следующем смысле. Два гладких подмногообразия N_1, N_2 многообразия M^2 *пересекаются трансверсально в точке* $x \in (N_1 \cap N_2)$, если $T_xN_1 \oplus T_xN_2 = T_xM^2$. В противном случае, пересечение в точке x называется *нетрансверсальным пересечением (касанием).* Точка касания x двух гладких одномерных подмногообразий N_1, N_2 многообразия M^2 называется *точкой одностороннего касания*, если существует такая окрестность V_x точки x, что N_2 пересекается не более, чем с одной компонентой связности множества $V_x \setminus N_1$.

В настоящей работе рассматривается класс Ψ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $f \in C^r(M^2)$, $r \geqslant 5$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, и собственные значения λ_p, μ_p любой седловой точки $p \in \Omega_f$ удовлетворяют условиям $0 < \lambda_p < 1 < \mu_p$ и $\lambda_p \cdot \mu_p \neq 1$;

2) если $(W^s_p \setminus p) \cap (W^u_q \setminus q) \neq \varnothing$ для седловых точек $p,\ q \in \Omega_f$, то $p \neq q$ и для любого седла $r \in \Omega_f$ (включая p и q) $(W^s_r \setminus r) \cap (W^u_p \setminus p) = \varnothing$ и $(W^s_q \setminus q) \cap (W^u_r \setminus r) = \varnothing$;

3) блуждающее множество f содержит конечное число орбит гетероклинического касания[4] и не существует седловых точек $p,\ q \in \Omega_f$, таких, что все четыре компоненты связ-

[4]Заметим, что конечность числа трансверсальных гетероклинических орбит у диффеоморфизма $f \in \Psi$ следует из условий 1) и 2).

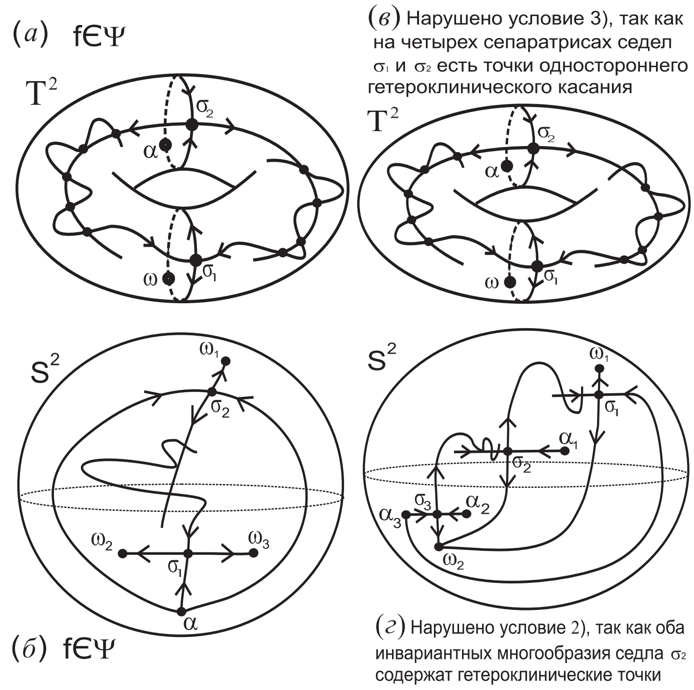

Рис. 1. Примеры фазовых портретов диффеоморфизмов поверхностей.

ности множеств $W^s_p \setminus p$ и $W^u_q \setminus q$ содержат точки одностороннего гетероклинического касания инвариантных многообразий W^s_p и W^u_q.

На рисунке 1 изображены примеры фазовых портретов диффеоморфизмов сферы $\mathbf{S}^2$ и тора $\mathbf{T}^2$. Диффеоморфизмы на рисунках 1*а*, 1*б* принадлежат классу Ψ, а на рисунках 1*в*, 1*г* — не принадлежат классу Ψ, поскольку нарушаются условия 3), 2) соответственно. Заметим, что диффеоморфизмы класса Ψ являются частным случаем диффеоморфизмов, рассмотренных в работах [15], [14], и, следовательно, имеют конечное число модулей топологической сопряженности.

Пусть $f \in \Psi$. Обозначим через Δ^u_f (Δ^s_f) подмножество множества Ω_f, состоящее из источников (стоков). Положим $\Delta_f = \Delta^u_f \cup \Delta^s_f$. Обозначим через Σ_f подмножество множества Ω_f, состоящее из всех седловых точек[5]; через Σ^s_f — подмножество множества Σ_f, состоящее из седловых точек, устойчивые многообразия которых содержат гетероклинические точки. Положим $\Sigma^u_f = \Sigma_f \setminus \Sigma^s_f$. Согласно [23],

$$M^2 = \bigcup_{p \in \Omega_f} W^s_p = \bigcup_{p \in \Omega_f} W^u_p$$

и, следовательно, множество Δ^u_f (Δ^s_f) непусто. Положим

$$\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f} \cup \Delta_f).$$

[5]Если $\Sigma_f = \varnothing$, то неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из одного стока и одного источника, объемлющее многообразие M^2 гомеоморфно сфере $\mathbf{S}^2$, и все диффеоморфизмы «источник-сток» сопряжены между собой. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что множество Σ_f не пусто.

Заметим, что множество $W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f}$ содержит ровно по одному инвариантному многообразию каждой седловой точки множества Σ_f и не содержит гетероклинических точек. Так как множество $W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f}$ состоит из конечного числа попарно непересекающихся дуг, а множество Δ_f состоит из конечного числа точек, то $\mathcal{M}_f$ является двумерным многообразием и состоит из конечного числа компонент связности. Кроме того, можно записать $\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (R_f \cup A_f)$, где $R_f = \Delta^u_f \cup W^s_{\Sigma^u_f}$ является репеллером и $A_f = \Delta^s_f \cup W^u_{\Sigma^s_f}$ является аттрактором[6] диффеоморфизма f. Тогда пространство орбит $\widehat{T}_f$ действия диффеоморфизма f на множестве $\mathcal{M}_f$ состоит из конечного числа копий двумерного тора и естественная проекция $p_f : \mathcal{M}_f \to \widehat{T}_f$ является накрытием.

Для $0 < \lambda < 1$ и $\mu > 1$ обозначим через $f_{\mu,\lambda} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ линейный диффеоморфизм, заданный формулой

$$f_{\mu,\lambda}(x, y) = (\mu x, \lambda y).$$

Положим

$$U_{\mu,\lambda} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x||y|^{-\log_\lambda \mu} \leqslant 1\}.$$

Определение 1.1. *f-инвариантную окрестность U_σ точки $\sigma \in \Sigma_f$ назовем C^2-линеаризующей, если существует C^2-диффеоморфизм $\psi_\sigma : U_\sigma \to U_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $f_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}|_{U_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}}$.*

Существование линеаризующей окрестности у любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \Psi$ следует, например, из теоремы Белицкого[7].

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество точек одностороннего гетероклинического касания диффеоморфизма f. Для точки $a \in \mathcal{A}$ обозначим через $\sigma^s_a \in \Sigma^s_f$, $\sigma^u_a \in \Sigma^u_f$ такие седловые точки, что $a \in W^s_{\sigma^s_a} \cap W^u_{\sigma^u_a}$. Из условия 3) для диффеоморфизмов $f \in \Psi$ следует, что все точки одностороннего касания из множества $W^s_{\sigma^s_a} \cap W^u_{\sigma^u_a}$ лежат либо на одной устойчивой сепаратрисе седла σ^s_a, либо на одной неустойчивой сепаратрисе седла σ^u_a. Обозначим через I_a промежуток $[a, f(a)) \subset W^s_{\sigma^s_a}$, если все точки одностороннего касания множества $W^s_{\sigma^s_a} \cap W^u_{\sigma^u_a}$ принадлежат одной устойчивой сепаратрисе седла σ^s_a, и промежуток $[a, f(a)) \subset W^u_{\sigma^u_a}$ — в противном случае. Положим $\mu_a = \mu_{\sigma^s_a}$, $\lambda_a = \lambda_{\sigma^u_a}$ и

$$\Theta_a = \frac{\ln \lambda_a}{\ln \mu_a}.$$

[6] Замкнутое множество $\Lambda \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, если Λ имеет компактную окрестность $U \neq M^n$, такую, что $f(U) \subset int\ U$ и $\Lambda = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^k(U)$. Множество называется *репеллером* диффеоморфизма f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

[7] Согласно теореме Белицкого (см. [1] или [22], теорема 3.20), C^5-диффеоморфизм поверхности в окрестности гиперболической седловой точки, такой, что $\lambda_\sigma \mu_\sigma \neq 1$, C^2-гладкой заменой переменных приводится к линейному виду. Таким образом, для диффеоморфизма $f \in \Psi$ существуют окрестности V_σ седловой точки σ диффеоморфизма f, V_O — начала координат $O(0,0)$ и C^2-диффеоморфизм $\overline{\psi}_\sigma : V_\sigma \to V_O$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f на V_σ с ограничением диффеоморфизма $f_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}$ на V_O. Положим $\widetilde{V}_\sigma = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}} f^n(V_\sigma)$ и $\widetilde{V}_O = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}} f^n_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}(V_O)$. Диффеоморфизм $\overline{\psi}_\sigma$ можно продолжить до диффеоморфизма $\widetilde{\psi}_\sigma : \widetilde{V}_\sigma \to \widetilde{V}_O$, определенного на f-инвариантном множестве $\widetilde{V}_\sigma$, положив $\widetilde{\psi}_\sigma(x) = f^{-m}_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}(\overline{\psi}_\sigma(f^m(x)))$, где m — такое целое число, что $f^m(x) \in V_\sigma$.

Для любого $k \in \mathbf{N}$ положим $U^k_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x||y|^{-\log_{\lambda_\sigma} \mu_\sigma} \leqslant \dfrac{1}{k}\}$. Выберем $k \in \mathbf{N}$, такое, что $U^k_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma} \subset \widetilde{V}_O$. Заметим, что диффеоморфизм $f_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}|_{U^k_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}}$ сопряжен с диффеоморфизмом $f_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}|_{U_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}}$ посредством диффеоморфизма $h(x, y) = (k^{\frac{1}{1-\log_{\lambda_\sigma} \mu_\sigma}} x, k^{\frac{1}{1-\log_{\lambda_\sigma} \mu_\sigma}} y)$. Тогда $U_\sigma = \widetilde{\psi}^{-1}_\sigma(U^k_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma})$ — искомая линеаризующая окрестность с сопрягающим диффеоморфизмом $\psi_\sigma = h \circ \widetilde{\psi}_\sigma : U_\sigma \to U_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma}$.

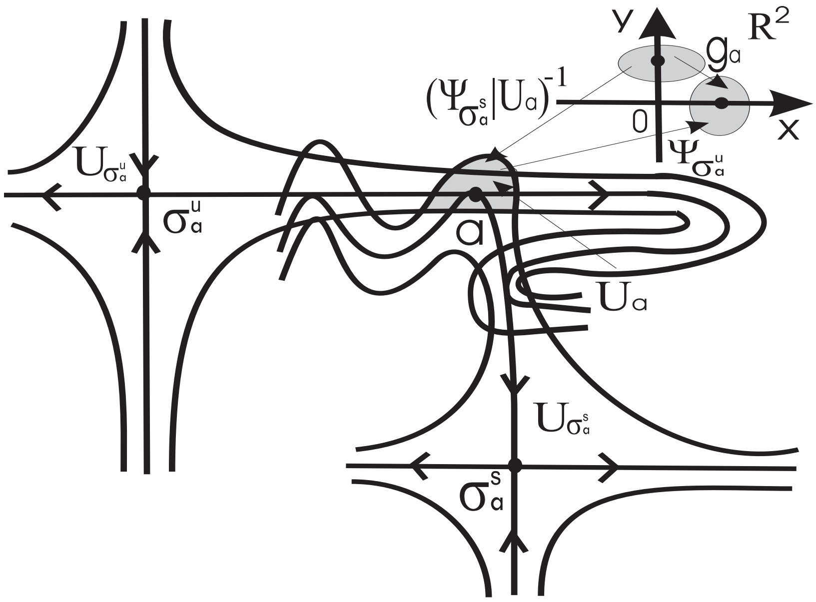

Рис. 2. Отображение $g_a(x, y)$

Обозначим через U_a компоненту связности множества $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$, содержащую точку a. Для любой точки $z \in U_a$ положим $z^s = \psi_{\sigma_a^s}(z) = (z_x^s, z_y^s)$ и $z^u = \psi_{\sigma_a^u}(z) = (z_x^u, z_y^u)$. Положим $g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ (\psi_{\sigma_a^s}|_{U_a})^{-1} : \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \to \psi_{\sigma_a^u}(U_a)$ (см. рис. 2) и запишем отображение g_a в координатном виде $g_a(x, y) = (\xi_a(x, y), \eta_a(x, y))$. Положим

$$\tau_a = \frac{\partial \eta_a}{\partial x}(a^s) = \frac{\partial \eta_a}{\partial x}((0, a_y^s)).$$

Положим $H_a = (int\ I_a) \cap \mathcal{A} \cap W^s_{\sigma_a^s} \cap W^u_{\sigma_a^u}$. Если $H_a \neq \varnothing$, то пронумеруем точки множества H_a согласно ориентации на I_a от точки a к точке $f(a)$: $a^1, \ldots, a^{m_a}$. Обозначим через τ_a^i число, модуль которого равен $\left|\frac{\tau_{a^i}}{\tau_a}\right|^{\frac{1}{\ln \mu_a}}$ для всех $i = 1, \ldots, m_a$, а знак совпадает со знаком числа $\frac{\tau_{a^i}}{\tau_a}$. Положим

$$C_a = \begin{cases} (\Theta_a, \tau_a^1, \tau_a^2, \ldots, \tau_a^{m_a}), \text{если } H_a \neq \varnothing, \\ \Theta_a, \text{если } H_a = \varnothing. \end{cases}$$

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 2.2 в [14].

Лемма 1.1. *Для любой точки $a \in \mathcal{A}$ набор параметров C_a не зависит от выбора линеаризующих окрестностей седловых точек σ_a^s, σ_a^u диффеоморфизма f.*

Пусть $\delta \in \{u, s\}$. Для любой седловой точки $\sigma^\delta \in \Sigma_f^\delta$ положим $\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta} = p_f(W^\delta_{\sigma^\delta} \setminus \sigma^\delta)$. По построению, $\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}$ является парой гладких непересекающихся узлов (диффеоморфных образов окружности). Положим $\widehat{\mathcal{A}} = p_f(\mathcal{A})$ и $\widehat{\Gamma}_f^\delta = \bigcup\limits_{\sigma^\delta \in \Sigma_f^\delta} \widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}$, $\widehat{\Gamma}_f = \widehat{\Gamma}_f^s \cup \widehat{\Gamma}_f^u$. Заметим, что множество $\widehat{\Gamma}_f^\delta$ ($\delta \in \{u, s\}$) является объединением непересекающихся пар узлов и множества $\widehat{\Gamma}_f^s$ и $\widehat{\Gamma}_f^u$ касаются вдоль $\widehat{\mathcal{A}}$ (см. рис. 3). Для $\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}}$ выберем любую точку $a \in p_f^{-1}(\widehat{a})$

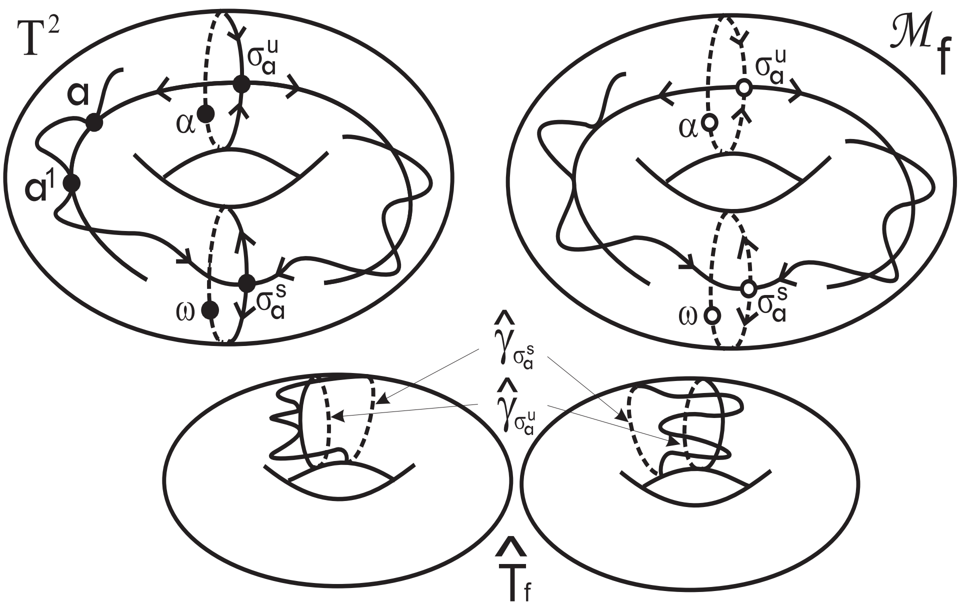

Рис. 3. Построение схемы S_f диффеоморфизма $f \in \Psi$.

и положим $C_{\widehat{a}} = C_a$. Непосредственно проверяется, что $C_a = C_{\widetilde{a}}$ для различных точек $a, \widetilde{a} \in p_f^{-1}(\widehat{a})$. Таким образом, набор параметров $C_{\widehat{a}}$ не зависит от выбора точки в множестве $p_f^{-1}(\widehat{a})$, поэтому определен корректно. Положим

$$\widehat{C}_f = \{C_{\widehat{a}}, \widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}}\}.$$

Определение 1.2. *Набор $S_f = (\widehat{T}_f, \widehat{\Gamma}_f, \widehat{C}_f)$ назовем схемой диффеоморфизма $f \in \Psi$.*

Определение 1.3. *Схемы $S_f = (\widehat{T}_f, \widehat{\Gamma}_f, \widehat{C}_f)$ и $S_{f'} = (\widehat{T}_{f'}, \widehat{\Gamma}_{f'}, \widehat{C}_{f'})$ диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$, соответственно, назовем эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\widehat{\varphi} : \widehat{T}_f \to \widehat{T}_{f'}$, такой, что:*

1) $\widehat{\varphi}(\widehat{\Gamma}^\delta_f) = \widehat{\Gamma}^\delta_{f'}$, причем $\widehat{\varphi}(\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}) = \widehat{\gamma}_{\sigma'^\delta}$, где $\sigma^\delta \in \Sigma^\delta_f$ и $\sigma'^\delta \in \Sigma^\delta_{f'}$;

2) $C_{\widehat{a}} = C_{\widehat{\varphi}(\widehat{a})}$[8] для $C_{\widehat{a}} \in \widehat{C}_f$.

Заметим, что класс Ψ содержит все диффеоморфизмы Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит. Для них множество $\widehat{C}_f$ является пустым, а условие эквивалентности схем равносильно условиям, полученным Гринесом [11].

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если схемы диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$ эквивалентны, то диффеоморфизмы топологически сопряжены.*

Обозначим через Ψ^* множество диффеоморфизмов $f \in \Psi$, таких, что отношение Θ_a является иррациональным числом для любого $a \in \mathcal{A}$. Для диффеоморфизмов из класса Ψ^* условие эквивалентности схем является также необходимым условием топологической сопряженности, а значит, справедлива следующая теорема.

[8]Заметим, что равенство $C_{\widehat{a}} = C_{\widehat{\varphi}(\widehat{a})}$ достаточно проверить хотя бы для одной точки одностороннего касания в каждой паре касающихся узлов.

Теорема 1.2. *Диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Таким образом, в случае иррационального модуля Θ_a эквивалентность схем является критерием топологической сопряженности диффеоморфизмов рассматриваемого класса. В том случае, когда Θ_a рационально, найденный инвариант является лишь достаточным условием сопряженности.

2. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

2.1. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $S_f = (\widehat{T}_{k_f}, \widehat{\Gamma}_f, \widehat{C}_f)$ и $S_{f'} = (\widehat{T}_{k_{f'}}, \widehat{\Gamma}_{f'}, \widehat{C}_{f'})$ — эквивалентные схемы диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$ соответственно. Тогда, согласно определению 1.3, существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\widehat{\varphi} : \widehat{T}_{k_f} \to \widehat{T}_{k_{f'}}$, такой, что:

1) $\widehat{\varphi}(\widehat{\Gamma}^\delta_f) = \widehat{\Gamma}^\delta_{f'}$, причем $\widehat{\varphi}(\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}) = \widehat{\gamma}_{\sigma'^\delta}$, где $\sigma^\delta \in \Sigma_f$ и $\sigma'^\delta \in \Sigma_{f'}$;

2) $C_{\widehat{a}} = C_{\widehat{\varphi}(\widehat{a})}$ для $C_{\widehat{a}} \in \widehat{C}_f$.

Построение сопрягающего гомеоморфизма $h : M^2 \to M^2$, такого, что $h \circ f = f' \circ h$, разобьем на шаги.

Шаг 1. Из существования гомеоморфизма $\widehat{\varphi} : \widehat{T}_{k_f} \to \widehat{T}_{k_{f'}}$ следует, что существует гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_{f'}$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма f на $\mathcal{M}_f$ с ограничением диффеоморфизма f' на $\mathcal{M}_{f'}$, и такой, что $\widehat{\varphi} = p_{_{f'}} \circ \varphi \circ p^{-1}_{_f}$ (см., например, предложение 1.2.4 работы [5]). Таким образом, мы имеем сопрягающий гомеоморфизм на множестве $M^2 \setminus (W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f} \cup \Delta_f)$.

Благодаря условию 1) определения 1.3 эквивалентности схем, для любой точки $\sigma^\delta \in \Sigma^\delta_f$ существует точка $\sigma'^\delta \in \Sigma^\delta_{f'}$, такая, что $\varphi(W^\delta_{\sigma^\delta} \setminus \sigma^\delta) = W^\delta_{\sigma'^\delta} \setminus \sigma'^\delta$. Продолжим гомеоморфизм φ на множество Σ_f, положив $\varphi(\sigma^\delta) = \sigma'^\delta$.

Положим $U_{\Sigma^\delta_f} = \bigcup\limits_{\sigma^\delta \in \Sigma^\delta_f} U_{\sigma^\delta}$ $(U_{\Sigma^\delta_{f'}} = \bigcup\limits_{\sigma'^\delta \in \Sigma^\delta_{f'}} U_{\sigma'^\delta})$ и $U_{\Sigma_f} = U_{\Sigma^u_f} \cup U_{\Sigma^s_f}$ $(U_{\Sigma_{f'}} = U_{\Sigma^u_{f'}} \cup U_{\Sigma^s_{f'}})$.

Шаг 2. Определим сопрягающий гомеоморфизм $\varphi^s : W^s_{\Sigma^u_f} \to W^s_{\Sigma^u_{f'}}$. Пусть $\sigma^u \in \Sigma^u_f$ и $\sigma'^u = \varphi(\sigma^u)$. Положим

$$\rho = \frac{\ln \lambda_{\sigma'^u}}{\ln \lambda_{\sigma^u}}.$$

Определим гомеоморфизм $\varphi^s_{\sigma^u} : W^s_{\sigma^u} \to W^s_{\sigma'^u}$ следующим образом. Для любой точки $t \in W^s_{\sigma^u}$ $(t^u = (0, t^u_y))$ положим $\varphi^s_{\sigma^u}(t) = t'$ $(t'^u = (0, t'^u_y))$, где $t'^u_y = (t^u_y)^\rho$, если $t^u_y \geqslant 0$, и $t'^u_y = -|t^u_y|^\rho$, если $t^u_y < 0$. Проверим, что гомеоморфизм $\varphi^s_{\sigma^u}$ сопрягает диффеоморфизмы $f|_{W^s_{\sigma^u}}$ и $f'|_{W^s_{\sigma'^u}}$. Сделаем проверку в случае, когда $t^u_y \geqslant 0$ (в случае, когда $t^u_y < 0$, проверка аналогичная). С одной стороны, $\varphi^s_{\sigma^u}(f(t)) = \varphi^s_{\sigma^u}(\psi^{-1}_{\sigma^u}(f_{\mu_{\sigma^u}, \lambda_{\sigma^u}}(\psi_{\sigma^u}(t)))) = \varphi^s_{\sigma^u}(\psi^{-1}_{\sigma^u}(f_{\mu_{\sigma^u}, \lambda_{\sigma^u}}(0, t^u_y))) = \varphi^s_{\sigma^u}(\psi^{-1}_{\sigma^u}(0, \lambda_{\sigma^u} t^u_y) = \psi^{-1}_{\sigma'^u}(0, (\lambda_{\sigma^u} t^u_y)^\rho) = \psi^{-1}_{\sigma'^u}(0, (\lambda_{\sigma^u})^\rho (t^u_y)^\rho)$. С другой стороны, $f'(\varphi^s_{\sigma^u}(t)) = f'(\psi^{-1}_{\sigma'^u}(0, (t^u_y)^\rho) = \psi^{-1}_{\sigma'^u}(f_{\mu_{\sigma^u}, \lambda_{\sigma^u}}(\psi_{\sigma'^u}(\psi^{-1}_{\sigma'^u}(0, (t^u_y)^\rho))) = \psi^{-1}_{\sigma'^u}(0, \lambda_{\sigma'^u}(t^u_y)^\rho)$. Так как $\rho = \dfrac{\ln \lambda_{\sigma'^u}}{\ln \lambda_{\sigma^u}}$, то $(\lambda_{\sigma^u})^\rho = (\lambda_{\sigma^u})^{\log_{\lambda_{\sigma^u}} \lambda_{\sigma'^u}} = \lambda_{\sigma'^u}$ и, следовательно, $\varphi^s_{\sigma^u}(f(t)) = f'(\varphi^s_{\sigma^u}(t))$.

Тогда искомый сопрягающий гомеоморфизм $\varphi^s : W^s_{\Sigma^u_f} \to W^s_{\Sigma^u_{f'}}$ является гомеоморфизмом, совпадающим с гомеоморфизмом $\varphi^s_{\sigma^u}$ для каждой седловой точки $\sigma^u \in \Sigma^u_f$.

Шаг 3. Определим сопрягающий гомеоморфизм $\varphi^u : W^u_{\Sigma^s_f} \to W^u_{\Sigma^s_{f'}}$. Пусть $\sigma^s \in \Sigma^s_f$ и $\sigma'^s = \varphi(\sigma^s)$. Определим гомеоморфизм $\varphi^u_{\sigma^s} : W^u_{\sigma^s} \to W^u_{\sigma'^s}$ следующим образом.

Если $W^s_{\sigma^s}$ не содержит точек одностороннего касания, то для любой точки $w \in W^u_{\sigma^s}$ $(w^s = (w^s_x, 0))$ положим $\varphi^u_{\sigma^s}(w) = w'$ $(w'^s = (w'^s_x, 0))$, где $w'^s_x = (w^s_x)^{\frac{\ln \mu_{\sigma'^s}}{\ln \mu_{\sigma^s}}}$, если $w^s_x \geqslant 0$, $w'^s_x = -|w^s_x|^{\frac{\ln \mu_{\sigma'^s}}{\ln \mu_{\sigma^s}}}$, если $w^s_x < 0$. Аналогично шагу 2, можно показать, что гомеоморфизм $\varphi^u_{\sigma^s}$ сопрягает диффеоморфизмы $f|_{W^u_{\sigma^s}}$ и $f'|_{W^u_{\sigma'^s}}$.

Если $W^s_{\sigma^s} \cap W^u_{\sigma^u}$ содержит точку одностороннего касания a, то положим

$$\vartheta = \frac{|\tau_a|^{\frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \mu_a}}}{|\tau_{a'}|},$$

$a' = \varphi(a)$ и для любой точки $w \in W^u_{\sigma^s}$ $(w^s = (w^s_x, 0))$ положим $\varphi^u_{\sigma^s}(w) = w'$ $(w'^s = (w'^s_x, 0))$, где $w'^s_x = \vartheta(w^s_x)^{\frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \mu_a}}$, если $w^s_x \geqslant 0$, $w'^s_x = -\vartheta|w^s_x|^{\frac{\ln \mu_{a'}}{\ln \mu_a}}$, если $w^s_x < 0$. Можно показать (как для гомеоморфизма $\varphi^s_{\sigma^u}$), что гомеоморфизм $\varphi^u_{\sigma^s}$ сопрягает диффеоморфизмы $f|_{W^u_{\sigma^s}}$ и $f'|_{W^u_{\sigma'^s}}$. Кроме того, в силу условия 2) определения 1.3 эквивалентности схем, гомеоморфизм $\varphi^u_{\sigma^s}$ не зависит от выбора точки a в $W^s_{\sigma^s} \cap W^u_{\sigma^u}$.

Искомый сопрягающий гомеоморфизм $\varphi^u : W^u_{\Sigma^s_f} \to W^u_{\Sigma^s_{f'}}$ определим как гомеоморфизмом, совпадающий с гомеоморфизмом $\varphi^u_{\sigma^s}$ для каждой седловой точки $\sigma^s \in \Sigma^s_f$.

Шаг 4. Положим $\mathcal{F}^u = \bigcup\limits_{c \in \mathbf{R}} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = c\}$ и $\mathcal{F}^s = \bigcup\limits_{c \in \mathbf{R}} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = c\}$.

Для любой точки $\sigma^u \in \Sigma^u_f$ $(\sigma^s \in \Sigma^s_f)$ положим $\mathcal{F}^u_{\sigma^u} = \psi^{-1}_{\sigma^u}(\mathcal{F}^u \cap U_{\mu_{\sigma^u}, \lambda_{\sigma^u}})$ $(\mathcal{F}^s_{\sigma^s} = \psi^{-1}_{\sigma^s}(\mathcal{F}^s \cap U_{\mu_{\sigma^s}, \lambda_{\sigma^s}}))$. Так как отображение ψ_{σ^u} (ψ_{σ^s}) класса C^2, то слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^u}$ и $\mathcal{F}^s_{\sigma^s}$ также класса C^2. Для любой точки $x \in U_{\sigma^u}$ $(x \in U_{\sigma^s})$ обозначим через $\mathcal{F}^u_{\sigma^u, x}$ $(\mathcal{F}^s_{\sigma^s, x})$ единственный слой слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^u}$ $(\mathcal{F}^s_{\sigma^s})$, проходящий через точку x. Определим проекции $\pi^u_{\sigma^u} : U_{\sigma^u} \to W^s_{\sigma^u}$ $(\pi^s_{\sigma^s} : U_{\sigma^s} \to W^u_{\sigma^s})$ вдоль слоев слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^u}$ $(\mathcal{F}^s_{\sigma^s})$ следующим образом: $\pi^u_{\sigma^u}(x) = \mathcal{F}^u_{\sigma^u, x} \cap W^s_{\sigma^u}$ $(\pi^s_{\sigma^s}(x) = \mathcal{F}^s_{\sigma^s, x} \cap W^u_{\sigma^s})$.

Пусть $a \in W^s_{\sigma^s_a} \cap W^u_{\sigma^u_a}$ — точки одностороннего касания. Тогда в некоторой окрестности U_a точки a слои слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^u_a}$ трансверсальны слоям слоения $\mathcal{F}^s_{\sigma^s_a}$, кроме C^1-кривой, на которой лежат точки касания слоев. Обозначим эту кривую l_a. Определим проекции $\pi^u_a : U_a \to l_a$ $(\pi^s_a : U_a \to l_a)$ вдоль слоев слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^u_a}$ $(\mathcal{F}^s_{\sigma^s_a})$ следующим образом: $\pi^u_a(x) = \mathcal{F}^u_{\sigma^u_a, x} \cap l_a$ $(\pi^s_a(x) = \mathcal{F}^s_{\sigma^s_a, x} \cap l_a)$.

Проведем аналогичные построения для диффеоморфизма f'. Определим гомеоморфизм $\varphi_{l_a} : l_a \to l_{a'}$ формулой

$$\varphi_{l_a}(z) = ((\pi^u_{\sigma^u_{a'}})^{-1}(\varphi^s_{\sigma^u_a}(\pi^u_{\sigma^u_a}(z)))) \cap l_{a'}. \tag{2.1}$$

Положим $L_{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{A}} l_a$ $(L_{\mathcal{A}'} = \bigcup\limits_{a' \in \mathcal{A}'} l_{a'})$ и $U_{\mathcal{A}} = \bigcup\limits_{a \in \mathcal{A}} U_a$ $(U_{\mathcal{A}'} = \bigcup\limits_{a' \in \mathcal{A}'} U_{a'})$.

Шаг 5. Для каждой точки $a \in \mathcal{A}$ определим гомеоморфизм $\varphi_{U_a} : U_a \to U_{a'}$ следующим образом. Обозначим через ${U^+}_a$ и ${U^-}_a$ компоненты связности $U_a \setminus l_a$ следуя принципу, что любая точка $z = (z^u_x, 0) \in U_a$ принадлежит ${U^+}_a$, если $z^u_x > a^u_x$ и принадлежит ${U^-}_a$, если $z^u_x < a^u_x$. Аналогично обозначим компоненты связности множества $U_{a'} \setminus l_{a'}$. Определим гомеоморфизм $\varphi_{{U^+}_a} : {U^+}_a \to {U^+}_{a'}$ следующим образом: для любой точки $z \in U^+_a$ положим $\varphi_{{U^+}_a}(z) = z'$, где $z' \in U^+_{a'}$ — точка пересечения слоев $(\pi^s_{a'})^{-1}(\varphi_{l_a}(\pi^s_a(z)))$

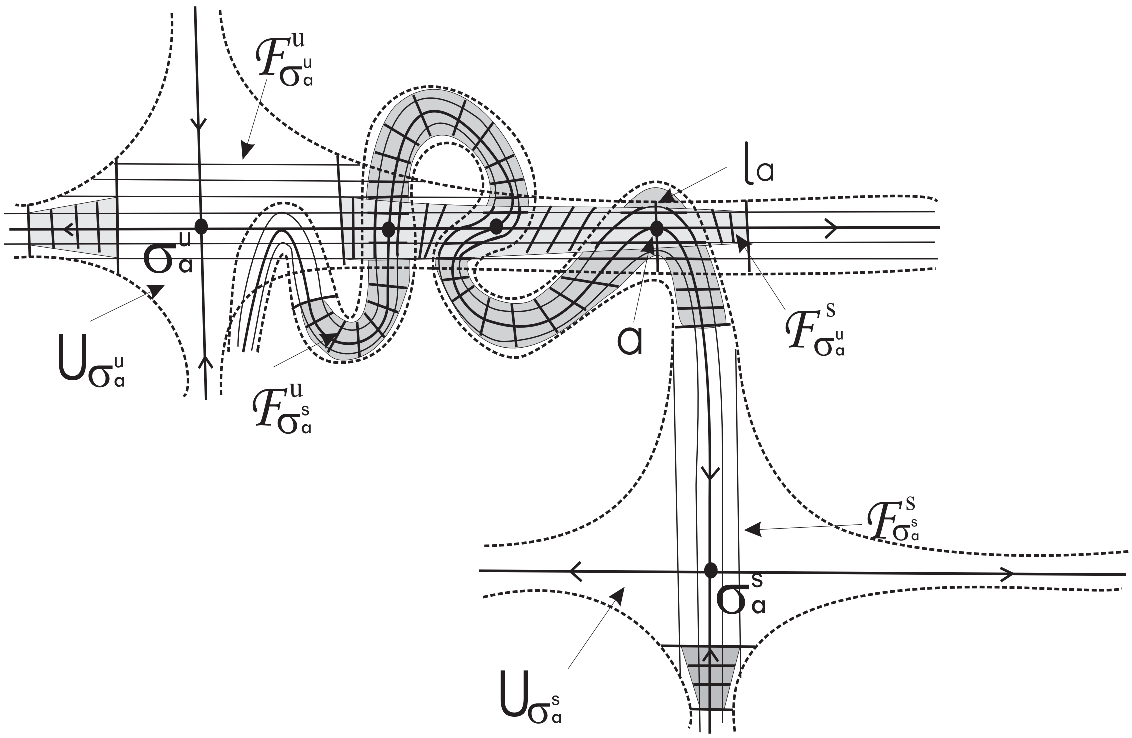

Рис. 4. Построение слоений

и $(\pi^u_{a'})^{-1}(\varphi_{l_a}(\pi^u_a(z)))$. Аналогичным образом определим гомеоморфизм $\varphi_{U^-{}_a} : U^-{}_a \to U^-{}_{a'}$. Положим

$$\varphi_{U_a}(z) = \begin{cases} \varphi_{U^+{}_a}(z), z \in U^+{}_a; \\ \varphi_{U^-{}_a}(z), z \in U^-{}_a; \\ \varphi_{l_a}, z \in l_a. \end{cases}$$

Определим гомеоморфизм $\varphi_{U_\mathcal{A}} : U_\mathcal{A} \to U_{\mathcal{A}'}$ как гомеоморфизм, совпадающий с φ_{U_a} для каждого $a \in \mathcal{A}$.

Шаг 6. Для любой точки $\sigma^s \in \Sigma^s_f$ ($\sigma^u \in \Sigma^u_f$) определим f-инвариантное одномерное слоение $\mathcal{F}^u_{\sigma^s}$ ($\mathcal{F}^s_{\sigma^u}$) на U_{σ^s} (U_{σ^s}), трансверсальное слоению $\mathcal{F}^s_{\sigma^s}$ ($\mathcal{F}^u_{\sigma^u}$) всюду, кроме $L_\mathcal{A}$, содержащее $W^u_{\sigma^s}$ ($W^s_{\sigma^u}$) как слой и такое, что если $U_{\sigma^s} \cap W^u_{\sigma^u} \neq \varnothing$ ($U_{\sigma^u} \cap W^s_{\sigma^s} \neq \varnothing$) для некоторой точки $\sigma^u \in \Sigma^u_f$ ($\sigma^s \in \Sigma^s_f$), то для любой точки $x \in ((U_{\sigma^s} \setminus L_\mathcal{A}) \cap U_{\sigma^u})$ ($x \in ((U_{\sigma^u} \setminus L_\mathcal{A}) \cap U_{\sigma^s})$) и слоя $\mathcal{F}^u_{\sigma^s,x}$ ($\mathcal{F}^s_{\sigma^u,x}$) слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^s}$ ($\mathcal{F}^s_{\sigma^u}$), проходящего через точку x, выполняется условие

$$(\mathcal{F}^u_{\sigma^s,x} \cap U_{\sigma^u}) \subset \mathcal{F}^u_{\sigma^u,x} \quad ((\mathcal{F}^s_{\sigma^u,x} \cap U_{\sigma^s}) \subset \mathcal{F}^s_{\sigma^s,x}). \tag{2.2}$$

Для любой точки $x \in U_{\sigma^s}$ ($x \in U_{\sigma^u}$) обозначим через $\mathcal{F}^u_{\sigma^s,x}$ ($\mathcal{F}^s_{\sigma^u,x}$) единственный слой слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^s}$ ($\mathcal{F}^s_{\sigma^u}$), проходящий через точку x. Определим проекции $\pi^u_{\sigma^s} : U_{\sigma^s} \to W^s_{\sigma^s}$ ($\pi^s_{\sigma^u} : U_{\sigma^u} \to W^u_{\sigma^u}$) вдоль слоев слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^s}$ ($\mathcal{F}^s_{\sigma^u}$) следующим образом: $\pi^u_{\sigma^s}(x) = \mathcal{F}^u_{\sigma^s,x} \cap W^s_{\sigma^s}$ ($\pi^s_{\sigma^u}(x) = \mathcal{F}^s_{\sigma^u,x} \cap W^u_{\sigma^u}$).

Для диффеоморфизма f' построим аналогичное слоение $\mathcal{F}^u_{\sigma'^s}$ с проекцией $\pi^u_{\sigma'^s} : U_{\sigma'^s} \to W^s_{\sigma'^s}$ для любой точки $\sigma'^s \in \Sigma^s_{f'}$. Кроме того, для любой точки $\sigma'^s \in \Sigma^s_{f'}$ заменим слоение $\mathcal{F}^s_{\sigma'^s}$ f'-инвариантным одномерным слоением $\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^s}$, трансверсальным слоению $\mathcal{F}^u_{\sigma'^s}$, содержащим $W^s_{\sigma'^s}$ как слой, совпадающим с $\mathcal{F}^s_{\sigma'^s}$ на $U_{\mathcal{A}'}$ и таким, что для любой точки $x \in l_{a'}$, являющейся точкой пересечения слоев $\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma^s_{a'},x}$ и $\mathcal{F}^u_{\sigma^u_{a'},x}$ слоений $\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma^s_{a'}}$ и $\mathcal{F}^u_{\sigma^u_{a'}}$, все точки пересечения $\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma^s_{a'},x} \cap \bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}} f^n(l_{a'})$ принадлежат слою $\mathcal{F}^u_{\sigma^u_{a'},x}$.

Определим проекцию $\overline{\pi}^s_{\sigma'^s} : U_{\sigma'^s} \to W^u_{\sigma'^s}$ вдоль слоев слоения $\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^s}$ следующим образом: $\pi^s_{\sigma'^s}(x) = \overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^s,x} \cap W^u_{\sigma'^s}$. Тогда для любой точки $a \in \mathcal{A}$ такой, что $a \in (W^s_{\sigma^s_a} \cap W^u_{\sigma^u_a})$ и любого $z \in l_a$ справедливо равенство

$$((\overline{\pi}^s_{\sigma^s_{a'}})^{-1}(\varphi^u_{\sigma^s_a}(\pi^s_{\sigma^s_a}(z)))) \cap l_{a'} = \varphi_{l_a}(z). \tag{2.3}$$

Для любой точки $\sigma'^u \in \Sigma^u_{f'}$ определим слоение $\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^u}$ и проекцию $\overline{\pi}^s_{\sigma'^u}$ аналогично $\mathcal{F}^s_{\sigma^u}$ и $\pi^s_{\sigma^u}$. Таким образом, если $U_{\sigma'^s} \cap W^u_{\sigma'^u} \neq \varnothing$ ($U_{\sigma'^u} \cap W^s_{\sigma'^s} \neq \varnothing$) для некоторой точки $\sigma'^u \in \Sigma^u_{f'}$ ($\sigma'^s \in \Sigma^s_{f'}$), то для любой точки $x' \in ((U_{\sigma'^s} \setminus L_{\mathcal{A}'}) \cap U_{\sigma'^u})$ ($x' \in ((U_{\sigma'^u} \setminus L_{\mathcal{A}'}) \cap U_{\sigma'^s})$) и слоя $\mathcal{F}^u_{\sigma'^s,x'}$ ($\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^u,x'}$) слоения $\mathcal{F}^u_{\sigma^s}$ ($\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^u}$), проходящего через точку x' выполняется условие

$$(\mathcal{F}^u_{\sigma'^s,x'} \cap U_{\sigma'^u}) \subset \mathcal{F}^u_{\sigma'^u,x'} \quad ((\overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^u,x'} \cap U_{\sigma'^s}) \subset \overline{\mathcal{F}}^s_{\sigma'^s,x'}). \tag{2.4}$$

Шаг 7. Пусть $\sigma^s \in \Sigma^s_f$ ($\sigma^u \in \Sigma^u_f$) и $\sigma'^s = \varphi(\sigma^s)$ ($\sigma'^u = \varphi(\sigma^u)$). Положим $V^s_{\sigma^s} = (W^s_{\sigma^s} \cap \cap U_{\Sigma^u_f}) \setminus U_{\mathcal{A}}$ ($V^u_{\sigma^u} = (W^u_{\sigma^u} \cap U_{\Sigma^s_f}) \setminus U_{\mathcal{A}}$). Определим сопрягающий гомеоморфизм $\varphi^s_{\sigma^s} : W^s_{\sigma^s} \to \to W^s_{\sigma'^s}$ ($\varphi^u_{\sigma^u} : W^u_{\sigma^u} \to W^u_{\sigma'^u}$) как гомеоморфизм, совпадающий с φ вне некоторой окрестности $V^s_{\sigma^s}$ ($V^u_{\sigma^u}$), совпадащий с $\varphi_{U_{\mathcal{A}}}$ на $U_{\mathcal{A}} \cap W^s_{\sigma^s}$ ($U_{\mathcal{A}} \cap W^u_{\sigma^u}$) и удовлетворяющий следующему условию: для любой точки $x \in V^s_{\sigma^s}$ ($x \in V^u_{\sigma^u}$), такой, что $x \in (W^s_{\sigma^s} \cap U_{\sigma^u})$ ($x \in (W^u_{\sigma^u} \cap U_{\sigma^s})$), для некоторой точки $\sigma^u \in \Sigma^u_f$ ($\sigma^s \in \Sigma^s_f$) выполняется равенство $\varphi^s_{\sigma^s}(x) = (\pi^u_{\sigma'^u}\varphi^s_{\sigma^u}(\pi^u_{\sigma^u}(x)))$ ($\varphi^u_{\sigma^u}(x) = (\overline{\pi}^s_{\sigma'^s}\varphi^u_{\sigma^s}(\pi^s_{\sigma^s}(x))))$.

Пусть $\sigma^s \in \Sigma^s_f$ ($\sigma^u \in \Sigma^u_f$) и $\sigma'^s = \varphi(\sigma^s)$ ($\sigma'^u = \varphi(\sigma^u)$). Определим отображение $\varphi_{\sigma^s} : U_{\sigma^s} \to U_{\sigma'^s}$ ($\varphi_{\sigma^u} : U_{\sigma^u} \to U_{\sigma'^u}$) как отображение, совпадающее с $\varphi_{U_{\mathcal{A}}}$ на $U_{\sigma^s} \cap U_{\mathcal{A}}$ ($U_{\sigma^u} \cap U_{\mathcal{A}}$) и такое, что для любой точки $z \in (U_{\sigma^s} \setminus U_{\mathcal{A}})$ ($z \in (U_{\sigma^u} \setminus U_{\mathcal{A}})$), $\varphi_{\sigma^s}(z)$ ($\varphi_{\sigma^u}(z)$) есть точка пересечения слоев $(\overline{\pi}^s_{\sigma'^s})^{-1}(\varphi^u_{\sigma^s}(\pi^s_{\sigma^s}(z)))$ ($(\pi^u_{\sigma'^u})^{-1}(\varphi^s_{\sigma^u}(\pi^u_{\sigma^u}(z)))$) и $(\pi^u_{\sigma'^s})^{-1}(\varphi^s_{\sigma^s}(\pi^u_{\sigma^s}(z)))$ ($(\overline{\pi}^s_{\sigma'^u})^{-1}(\varphi^u_{\sigma^u}(\pi^s_{\sigma^u}(z)))$).

Обозначим через $\varphi_{\Sigma_f} : U_{\Sigma_f} \to U_{\Sigma_{f'}}$ отображение, совпадающее с φ_σ для каждого $\sigma \in \in \Sigma_f$. Положим $\overline{\varphi}_\sigma = \varphi_{\Sigma_f}|_{cl\ U_\sigma}$. Из соотношений (2.1)–(2.4) и условий 1), 2) эквивалентности схем следует, что отображение $\overline{\varphi}_\sigma$ является гомеоморфизмом для любого $\sigma \in \Sigma_f$ и $\overline{\varphi}_{\sigma_1}(x) = = \overline{\varphi}_{\sigma_2}(x)$ для любого $x \in (cl\ U_{\sigma_1} \cap cl\ U_{\sigma_2})$ и $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \Sigma_f$. Таким образом, отображение φ_{Σ_f} является гомеоморфизмом.

Шаг 8. Для любого $t \in (0,1)$ положим $U^t_{\mu,\lambda} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x||y|^{-\log_\lambda \mu} \leqslant t\}$. Для любого $\sigma \in \Sigma_f$ положим $U^t_\sigma = \psi^{-1}_\sigma(U^t_{\mu_\sigma,\lambda_\sigma})$ и $U^t_{\Sigma_f} = \bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma_f} U^t_\sigma$.

Выберем значение $t_0 \in (0,1)$ так, чтобы $\varphi_{\Sigma_f}(U^{t_0}_{\Sigma_f}) \subset (\varphi(U_{\Sigma_f}) \cup W^s_{\Sigma^u_{f'}} \cup W^u_{\Sigma^s_{f'}})$. Положим $Q = U_{\Sigma_f} \setminus int\ U^{t_0}_{\Sigma_f}$, $R = \partial U_{\Sigma_f}$, $R_0 = \partial U^{t_0}_{\Sigma_f}$, $Q' = \varphi(U_{\Sigma_f}) \setminus int\ \varphi_{\Sigma_f}(U^{t_0}_{\Sigma_f})$, $R' = \varphi(\partial U_{\Sigma_f})$, $R'_0 = \varphi_{\Sigma_f}(\partial U^{t_0}_{\Sigma_f})$, $\widehat{Q} = p_{_f}(Q)$, $\widehat{Q}' = p_{_{f'}}(Q')$ и $\widehat{\varphi}_{\Sigma_f} = p_{_{f'}} \circ \varphi_{\Sigma_f} \circ (p_{_f}|_{R_0})^{-1} : \widehat{R}_0 \to \widehat{R}'_0$.

По построению, множества $\widehat{Q}$, $\widehat{Q}'$ имеют одинаковое число компонент связности, каждая из которых гомеоморфна стандартному двумерному кольцу (на рис. 5 множество $\widehat{Q}$ закрашено). Тогда существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}_{\widehat{Q}} : \widehat{Q} \to \widehat{Q}'$, такой, что $\widehat{\varphi}_{\widehat{Q}}|_{\widehat{R}} = \widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}_{\widehat{Q}}|_{\widehat{R}_0} = = \widehat{\varphi}_{\Sigma_f}$.

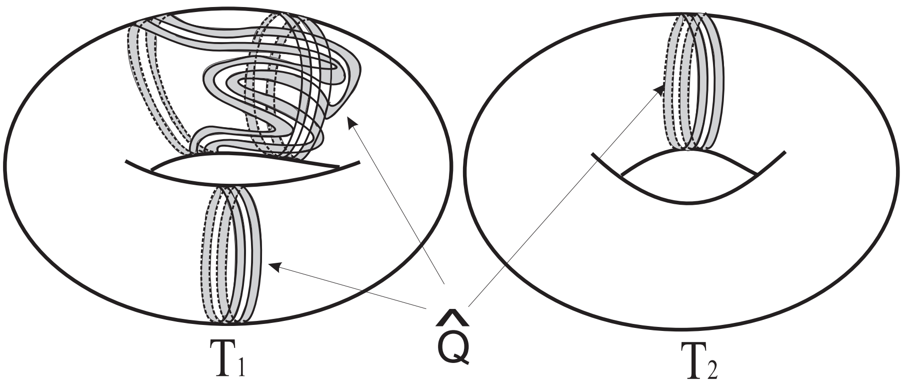

Рис. 5. Иллюстрация к шагу 8.

Обозначим через $\varphi_Q : Q \to Q'$ поднятие гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_{\widehat{Q}}$, совпадающее с φ на ∂U_{Σ_f}. Определим гомеоморфизм $h : M^2 \setminus \Delta_f \to M^2 \setminus \Delta_{f'}$ формулой

$$h(x) = \begin{cases} \varphi_{\Sigma_f}(x), x \in U^{t_0}_{\Sigma_f}; \\ \varphi_Q(x), x \in Q; \\ \varphi(x), x \in M^2 \setminus U_{\Sigma_f}. \end{cases}$$

Тогда искомый гомеоморфизм получается из гомеоморфизма h непрерывным продолжением на множество Δ_f.

2.2. Доказательство теоремы 1.2

Достаточность условий теоремы 1.2 следует из теоремы 1.1, докажем их необходимость.

Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены. Из определения топологической сопряженности следует, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : M^2 \to M^2$, такой, что $h \circ f = f' \circ h$. Покажем, что схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны. Для этого надо показать, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\widehat{\varphi} : \widehat{T}_{k_f} \to \widehat{T}_{k_{f'}}$, такой, что:

1) $\widehat{\varphi}(\widehat{\Gamma}^\delta_f) = \widehat{\Gamma}^\delta_{f'}$, причем $\widehat{\varphi}(\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}) = \widehat{\gamma}_{\sigma'^\delta}$, где $\sigma^\delta \in \Sigma_f$ и $\sigma'^\delta \in \Sigma_{f'}$;

2) $C_{\widehat{a}} = C_{\widehat{\varphi}(\widehat{a})}$ для $C_{\widehat{a}} \in \widehat{C}_f$ (см. определение 1.3).

Напомним, что $\mathcal{M}_f = M^2 \setminus (W^u_{\Sigma^s_f} \cup W^s_{\Sigma^u_f} \cup \Delta_f)$, $\mathcal{M}_{f'} = M^2 \setminus (W^u_{\Sigma^s_{f'}} \cup W^s_{\Sigma^u_{f'}} \cup \Delta_{f'})$, $\widehat{C}_f = \{C_{\widehat{a}}, \widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}}\}$, $\widehat{C}_{f'} = \{C_{\widehat{a}'}, \widehat{a}' \in \widehat{\mathcal{A}}'\}$.

Так как сопрягающий гомеоморфизм h переводит инвариантные многообразия неподвижных точек диффеоморфизма f в инвариантные многообразия неподвижных точек диффеоморфизма f' с сохранением размерности и устойчивости, то $h(\mathcal{M}_f) = \mathcal{M}_{f'}$. Тогда число k_f компонент связности множества $\mathcal{M}_f$ совпадает с числом $k_{f'}$ компонент связности множества $\mathcal{M}_{f'}$.

Определим гомеоморфизм $\widehat{\varphi} = p_{f'} \circ h \circ p_f^{-1} : \widehat{T}_{k_f} \to \widehat{T}_{k_{f'}}$. Возьмем любую точку $\sigma^\delta \in \Sigma^\delta_f$. Покажем, что $\widehat{\varphi}(\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}) = \widehat{\gamma}_{\sigma'^\delta}$ для любого множества $\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta} \in \widehat{\Gamma}^\delta_f$. Действительно, $\widehat{\varphi}(\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}) = p_{f'}(h(p_f^{-1}(\widehat{\gamma}_{\sigma^\delta}))) = p_{f'}(h(W^\delta_{\sigma^\delta} \setminus \sigma^\delta)) = p_{f'}(W^\delta_{\sigma'^\delta} \setminus \sigma'^\delta) = \widehat{\gamma}_{\sigma'^\delta}$.

Выполнение условия 2) определения 1.3 следует из работ [14] и [20], следовательно схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны.

Авторы благодарят В. З. Гринеса за постановку задачи и постоянное внимание к работе и участников семинара под руководством Л. П. Шильникова за активное обсуждение результатов. Особая благодарность С. В. Гонченко за внимательное прочтение статьи, полезные замечания и дополнения. Авторы благодарят грант 08-01-00547 РФФИ.

Список литературы

[1] Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев: Наукова думка, 1979. 174 с.

[2] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях: Ч. 1 // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. / Е. А. Леонтович-Андронова. Горький: ГГУ, 1985. С. 22–38.

[3] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях: Ч. 2 // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. / Е. А. Леонтович-Андронова. Горький: ГГУ, 1987, с. 24–32.

[4] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях //Дифференциальные и интегральные уравнения / Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ, 1985. С. 33—37.

[5] Бонатти Хр., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса – Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Труды Института Математики Стеклова, 2005, т. 250, с. 5–53.

[6] Bonatti Ch., Langevin R. Difféomorphismes de Smale des surfaces. (Astérisque, vol. 250.) Paris: Soc. Math. France, 1998. 243 p.

[7] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой: Ч. 1 // Матем. сб., 1972, № 4, с. 475–492;
Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой: Ч. 2 // Матем. сб., 1973, № 1, с. 139–157.

[8] Гонченко С. В. Модули систем с негрубыми гомоклиническими траекториями (случаи диффеоморфизмов и векторных полей) // Методы качественной теории и теории бифуркаций: Межвуз. сб. науч. тр. / Л. П. Шильников. Горький: ГГУ, 1989. С. 34–49.

[9] Гонченко С. В., Шильников Л. П. Инварианты Ω-сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // Укр. матем. журн., 1990, № 2, с. 153–159.

[10] Гонченко С. В., Шильников Л. П. О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Изв. РАН. Сер. матем., 1992, т. 56, № 6, с. 1165–1197.

[11] Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки, 1993, т. 54, вып. 3, с. 3—17.

[12] Гринес В. З. О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами // Матем. сб., 1997, т. 188, no. 4, с. 57—94.

[13] Langevin R. Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse – Smale d'une surface // Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1993, vol. 43, no. 1, pp. 265–278.

[14] De Melo W. Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms // Topology, 1980, vol. 19, pp. 9–21.

[15] de Melo W., van Strien S. J. Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1987, vol. 7, no. 3, pp. 415–462.

[16] Митрякова Т. М., Починка О. В. Классификация простейших диффеоморфизмов сферы S^2 с одним модулем устойчивости // Современная математика и ее приложения. Институт кибернетики АН Грузии, 2008, т. 54. с. 99–113.

[17] Nielsen J. Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen // Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., 1937, vol. 15, pp. 1—77.

[18] Newhouse S. E., Palis J. Bifurcations of Morse – Smale dynamical systems // Dynamical systems: Proc. Sympos. (Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971) / M. Peixoto. New York: Acad. Press, 1973. P. 303–366.

[19] Palis J. On Morse – Smale dynamical systems // Topology, 1969, vol. 8, pp. 385–404.

[20] Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // Astérisque, 1978, vol. 51, pp. 335–346.

[21] Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems: Proc. Sympos. (Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971) / M. Peixoto. New York: Acad. Press, 1973. P. 389–419.

[22] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 1. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004. 416 с.

[23] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73, no. 6, pp. 747–817 [Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН, 1970, т. 25, № 1, с. 113–185].