УДК 537.86/.87, 530.182

Автоколебания динамических и стохастических систем и их математический образ — аттрактор

В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, Г. И. Стрелкова
Физический факультет
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
Международный институт нелинейной динамики
410012, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
wadim@info.sgu.ru, vadivasovate@yandex.ru, strelkovagi@info.sgu.ru

Получено 9 ноября 2009 г.

В работе с единых позиций анализируются автономные и неавтономные колебания динамических и стохастических систем. Вводится определение аттрактора неавтономной системы. Предложено определение автоколебаний и автоколебательной системы, обобщающее концепцию А. А. Андронова, введенную для автономных систем с одной степенью свободы.

Ключевые слова: автоколебания, динамический хаос, аттрактор, флуктуации

V. S. Anishchenko, T. E. Vadivasova, G. I. Strelkova
Self-sustained oscillations of dynamical and stochastic systems and their mathematical image – an attractor

In the present paper autonomous and nonautonomous oscillations of dynamical and stochastic systems are analyzed in the framework of common concepts. The definition of an attractor is introduced for a nonautonomous system. The definitions of self-sustained oscillations and a self-sustained oscillatory system is proposed, that generalize A. A. Andronov's concept introduced for autonomous systems with one degree of freedom.

Keywords: self-sustained oscillations, dynamical chaos, attractor, fluctuations
Mathematical Subject Classification 2000: 74H65, 37B55, 70K75

Введение

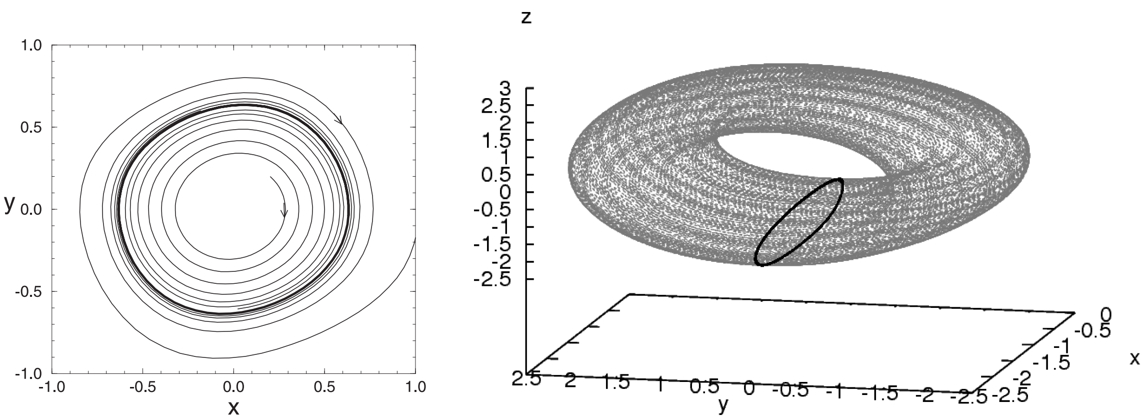
Одним из важнейших типов колебательных процессов в природе являются так называемые автоколебательные процессы, или автоколебания. Автоколебания отличаются рядом характерных свойств, выделяющих их из общего широкого класса колебательных явлений, и составляют предмет одного из важных разделов теории нелинейных колебаний.

Впервые термины «автоколебания» и «автоколебательные системы» были введены А. А. Андроновым почти сто лет назад. Андронов подчеркнул целесообразность выделения автоколебательных систем как особого класса многочисленных и практически важных систем. Общей чертой этих систем, согласно Андронову, «является их способность совершать *автоколебания*, т. е. такие колебания, амплитуда которых, с одной стороны, в течение долгого времени может оставаться постоянной, а с другой стороны, вообще говоря, не зависит от начальных условий и определяется не начальными условиями, а свойствами самой системы» [1]. Андронов отмечает, что независимость параметров колебаний от начальных условий является характерным признаком автоколебаний, однако это свойство не абсолютно и может распространяться не на все начальные состояния, а на некоторую конечную область фазового пространства. То есть возможны несколько стационарных процессов с различными параметрами колебаний, которые устанавливаются в зависимости от того, в какой области выбрано начальное состояние. В наше время это явление получило название мультистабильности. Другой типичной чертой автоколебаний, согласно А. А. Андронову, является подкачка энергии от постоянного источника, осуществляемая в некоторые моменты времени и регулируемая самой системой, т. е. «*за счет непериодического источника энергии создается периодический процесс*» [1].

А. А. Андроновым была создана теория автоколебательных систем с одной степенью свободы и предложен математический образ автоколебаний на фазовой плоскости — устойчивый предельный цикл. За прошедшие годы в теории нелинейных колебаний был получен ряд новых принципиальных результатов, связанных с открытием и исследованием широкого класса колебательных процессов, которые рассматриваются как автоколебания. Естественно попытаться понять, в чем состоит сходство всех известных автоколебательных процессов, каковы различия между ними и насколько они соответствуют определению А. А. Андронова. Кроме того, возникает потребность обобщить понятие автоколебаний на еще более широкий класс систем, которые традиционно к автоколебательным не относились, но имеют с ними много общих черт. Речь идет о неавтономных системах, находящихся под действием непериодических, в том числе случайных, внешних сил. Такой подход требует рассмотрения с более общих современных позиций понятия аттрактора как математического образа автоколебаний. Если с регулярными аттракторами автоколебательных систем проблем не возникает, то вопрос об аттракторах хаотических автоколебаний, колебаний в неавтономных системах с непериодическим воздействием и колебаний, возникающих под действием шума, требует детального обсуждения. В настоящей статье мы попытаемся предложить единую концепцию автоколебаний в динамических и стохастических системах, рассмотреть математические образы соответствующих автоколебаний в виде аттракторов той или иной структуры и сформулировать наиболее общее определение автоколебаний.

1. Предельный цикл Пуанкаре как образ периодических автоколебаний по Андронову

Автоколебания систем с одной степенью свободы, по Андронову, суть устойчивые грубые периодические колебания, образом которых на фазовой плоскости является асимпто-



а *б*

Рис. 1. Регулярные аттракторы автоколебательных систем: *а* — предельный цикл на плоскости; *б* — притягивающий двумерный тор в R^3. Темные точки соответствуют сечению Пуанкаре.

тически устойчивая изолированная замкнутая траектория — притягивающий предельный цикл Андронова–Пуанкаре Γ_0 (рис. 1*а*). Под изолированной замкнутой траекторией понимается такая, окрестность которой не содержит никаких других предельных траекторий, за исключением ее самой. Асимптотическая устойчивость означает, что малое возмущение траектории на цикле экспоненциально убывает, асимптотически стремясь к нулю при $t \to \infty$. Иначе говоря, асимптотически устойчивый предельный цикл притягивает траектории из некоторой окрестности. Независимо от того, выбраны начальные условия внутри цикла Γ_0 или снаружи, фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к предельному циклу Γ_0 и остаются на нем! Индивидуальная траектория (частное решение), безусловно, будет зависеть от начальных условий, но предельное множество — нет. Это означает, что колебания, соответствующие одному и тому же предельному циклу, в зависимости от начальных условий будут иметь разную фазу. Вне цикла Γ_0 движения носят переходный, нестационарный характер, на предельном цикле — это установившийся строго периодический процесс. Совершенно ясно, что реализация предельного цикла возможна исключительно в нелинейных диссипативных системах. Средняя дивергенция векторного поля для траекторий внутри цикла должна быть положительной, вне цикла — отрицательной. Это возможно лишь в случае, когда, во-первых, в системе присутствуют и диссипация, и подкачка энергии, а во-вторых, соотношение между диссипацией и подкачкой зависит от мгновенного состояния. В случае периодических автоколебаний затраченная энергия восполняется строго за период колебаний.

Множества, подобные асимптотически устойчивому предельному циклу Γ_0, сейчас принято называть аттракторами. Аттрактор представляет собой инвариантное (то есть не изменяющееся под действием оператора эволюции) притягивающее предельное множество в фазовом пространстве динамической системы (ДС). Фазовые траектории из некоторой области (бассейна притяжения) «притягиваются» к аттрактору в пределе $t \to \infty$ и остаются на нем.

Естественно обобщить определение А. А. Андронова на случай динамической системы с размерностью фазового пространства $N > 2$. Пусть имеется автономная динамическая система конечной размерности N

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \qquad \boldsymbol{x} \in R^N, \qquad \boldsymbol{\mu} \in R^m, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор состояния, $\boldsymbol{\mu}$ — векторный параметр. Если система (1.1) имеет устойчивое периодическое решение $\boldsymbol{x}(t+T) \equiv \boldsymbol{x}(t)$, то ему отвечает аттрактор в виде устойчивого предельного цикла в N-мерном фазовом пространстве, который является математическим образом периодических автоколебаний.

2. Квазипериодические автоколебания. Регулярные аттракторы ДС

Подход А. А. Андронова можно применить и к квазипериодическим устойчивым колебаниям автономной системы, которые также можно назвать автоколебаниями. Пусть, к примеру, динамическая система (1.1) имеет устойчивое двухчастотное колебательное решение $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(\omega_1 t,\ \omega_2 t)$. Асимптотическая устойчивость решения $\boldsymbol{x}$ означает, что независимо от начальных данных фазовые траектории из некоторой области фазового пространства в пределе $t \to \infty$ стремятся к инвариантному двумерному тору T^2 (рис. 1*б*). Поверхность тора является притягивающим предельным множеством (аттрактором), соответствующим квазипериодическим автоколебаниям.

Как мы видим, определение автоколебаний, данное А. А. Андроновым, полностью можно отнести и к случаю квазипериодических автоколебаний. Автономная система с полутора и более степенями свободы может поддерживать устойчивые колебания за счет энергии постоянного источника. Затраты энергии на рассеяние в данном случае компенсируются не строго периодически, а с некоторой «погрешностью», что приводит к более сложному характеру колебаний. Однако при этом сохраняются оба требования: решение устойчивое и в установившемся режиме не зависит от начального состояния. Все приведенные рассуждения справедливы и для случая квазипериодических колебаний с n независимыми частотами ω_n, $n > 2$. Стационарные траектории в этом случае будут принадлежать n-мерному тору в фазовом пространстве ДС (1.1).

Назовем периодические и квазипериодические автоколебания *регулярными*, подразумевая их детерминированный характер и свойство повторяемости с заданной точностью через определенное время (период или квазипериод). Итак, математическими образами регулярных автоколебаний являются аттракторы в виде предельного цикла и тора. Будем называть такие аттракторы *регулярными*, так как они соответствуют регулярным колебаниям и, кроме того, имеют простую геометрическую структуру, являясь многообразиями (кривая, поверхность, гиперповерхность)[1]. К регулярным аттракторам также следует отнести асимптотически устойчивые точки равновесия (узел и фокус). Однако система, обладающая только такими аттракторами, по определению Андронова не является автоколебательной.

3. Хаотические автоколебания

Открытие и исследование динамического хаоса показали, что динамические системы могут иметь соответствующие установившимся режимам решения, которые не являются ни периодическими, ни квазипериодическими. Такое поведение возникает не только под действием внешней силы, но также характерно для широкого класса автономных нелинейных диссипативных систем с размерностью фазового пространства $N \geqslant 3$. Таким обра-

[1] Напомним, что в сечении Пуанкаре периодическим колебаниям соответствует аттрактор в виде неподвижной точки или совокупности конечного числа точек, а двухчастотным квазипериодическим колебаниям — инвариантная замкнутая кривая.

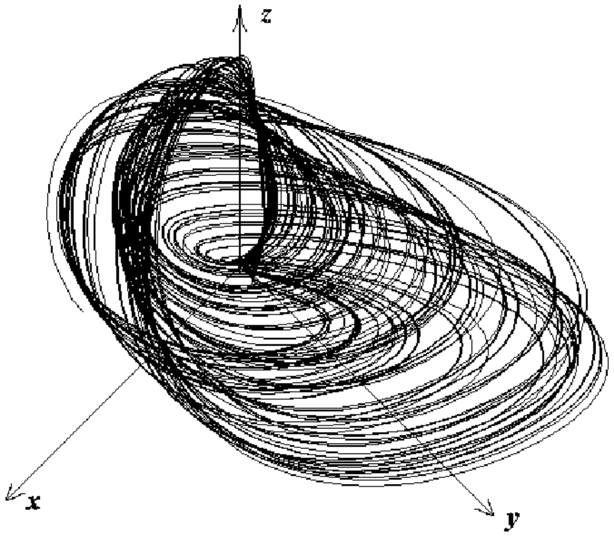


Рис. 2. Хаотический аттрактор в генераторе Анищенко–Астахова.

зом, возможны хаотические автоколебания, обладающие лишь частичной и нерегулярной во времени повторяемостью. В фазовом пространстве им соответствует предельное множество со сложной геометрической структурой, называемое хаотическим, или странным, аттрактором (см. рис. 2). Распространяется ли определение Андронова на этот случай? Формально — нет, поскольку хаотические решения являются неустойчивыми по Ляпунову, хотя и принадлежат аттрактору, а сам хаотический аттрактор в большинстве случаев не является структурно устойчивым (грубым) [2, 3]. Однако если рассматривается автономная диссипативная система, то с физической точки зрения возникающие в ней хаотические колебания суть не что иное, как автоколебания в полном соответствии с представлениями Андронова: их характер не зависит от начального состояния (выбираемого в некоторой области), а рассеяние энергии компенсируется подкачкой от постоянного источника. Разница лишь в том, что компенсация затрат энергии в таких системах также регулируется самой системой, но происходит не регулярно. Равенство поступающей и расходуемой энергии выполняется в среднем по времени лишь в пределе $t \to \infty$.

Чтобы обобщить понятие автоколебаний на случай динамического хаоса, приходится отказываться от требования грубости и устойчивости решений. При этом сохраняется главное и практически наиболее важное требование: независимость стационарного режима от начального состояния, т. е. наличие хаотического аттрактора, как образа хаотических автоколебаний. Тогда хаотические колебания как решение задачи Коши для автономной динамической системы (1.1), которому отвечает образ в виде хаотического аттрактора, можно трактовать как автоколебания. Характеристики и свойства хаотических автоколебаний определяются структурой хаотических аттракторов и могут быть соответствующим образом классифицированы. С физической точки зрения такой подход безусловно плодотворен, так как отражает принципиально важное свойство автоколебательной системы независимо от начальных условий «самонастраиваться» на некий режим функционирования, определяющийся исключительно внутренними параметрами и характеристиками автономной нелинейной диссипативной системы. Отметим, что практически во всех научных работах авторы рассматривают режим динамического хаоса в качестве автоколебательного, не отмечая противоречия такого подхода определению автоколебаний по А. А. Андронову.

С обобщением понятия аттрактора на системы с хаотическим поведением связаны определенные проблемы. Данное нами ранее определение не является математически строгим. До настоящего времени не существует единого общепринятого определения аттрактора, которое бы было математически непротиворечивым и находилось в соответствии с экспериментально наблюдаемым множеством типов установившихся колебаний. Различают максимальный аттрактор, вероятностно предельное множество по Милнору, статистически предельное множество по Ильяшенко [4]. Наиболее часто используется определение аттрактора как *максимального аттрактора поглощающей области*. Приведем данное определение.

Пусть автономная ДС задана оператором эволюции $T^\tau\colon R^N \to R^N$ и пусть B есть *поглощающая область* в R^N, то есть для B выполняется условие $T^\tau \overline{B} \subset B$, $\tau > 0$. *Максимальным аттрактором* A_{max} в поглощающей области B называется множество

$$A_{max} = \bigcap_{\tau>0} T^\tau B.$$

Некоторое инвариантное множество A назовем *аттракторм* ДС, если существует поглащающая область, для которой A является максимальным аттрактором. *Бассейном (областью) притяжения* аттрактора A называется множество U, такое, что все траектории из U стремятся к A при $t \to \infty$.

Определить хаотический аттрактор просто как притягивающее предельное множество не достаточно. Действительно, что собой представляет притягивающее предельное множество хаотической системы? Известно, что для большинства динамических систем то, что обычно называют хаотическим аттрактором, на самом деле представляет собой квазиаттрактор, состоящий из различных инвариантных подмножеств: аттракторов, репеллеров и седел, гомоклинических и гетероклинических орбит, причем в него оказываются включены и регулярные аттракторы [2]. Траектории на хаотическом квазиаттракторе, вообще говоря, не являются эргодическими, так как не заполняют всюду плотно весь квазиаттрактор. Однако присутствие в системе даже очень малого шума, например, ошибок, связанных с конечной разрядностью при проведении численного моделирования, объединяет все множества и бассейны притяжения аттракторов (как правило, очень узкие). Траектории становятся действительно эргодическими. Но при этом возникает новый вопрос: что такое аттрактор в системе с шумом? Мы вернемся к этому вопросу позже, а сейчас рассмотрим случай неавтономноых систем с регулярным внешним воздействием.

4. Колебания неавтономных систем

Рассмотрим режим колебаний в неавтономной динамической системе

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in R^N, \quad \boldsymbol{\mu} \in R^m. \tag{4.1}$$

В случае неавтономной системы оператор эволюции зависит не только от интервала времени, на котором рассматривается изменение состояния ДС, но также от начального момента времени. Поэтому, чтобы однозначно определить состояние, надо задать не только фазовые координаты, но и момент времени. Другими словами, время t само является фазовой координатой. Таким образом, под действием оператора эволюции одна из фазовых координат, а именно t, неограниченно растет, и фазовые траектории не принадлежат ограниченной области пространства состояний (R^N, t).

4.1. Сведение системы с регулярным воздействием к автономной форме

Если воздействующая на систему внешняя сила является периодической, то система (4.1) может быть приведена к автономному виду, так что траектории на аттракторе будут ограничены. Например, пусть на динамическую систему (1.1) действует гармоническая внешняя сила $C\sin(\omega_{\text{вн}}t)$ и система описывается неоднородным уравнением:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, C\sin(\omega_{\text{вн}}t)). \tag{4.2}$$

В этом случае можно представить неавтономную систему в автономной форме. Для этого нужно ввести фазу воздействия $\Psi = \omega t$ и добавить в (4.2) уравнение для фазы Ψ. Получаем

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \mu, \mathrm{C}\sin(\Psi)), \\ \dot{\Psi} &= \omega_{\text{вн}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Теперь состояние системы задается вектором с $N+1$ компонентами: x_1, x_2, $\ldots$, x_N, Ψ. Если предполагать, что переменная Ψ определена на всей действительной оси, то новая переменная ничего не дает, и фазовые траектории остаются неограниченными, как и прежде. Однако можно перейти к ограниченным фазовым траекториям, если положить, что $\Psi \in [0, 2\pi]$, и ввести цилиндрическое фазовое пространство. На рис. 3 показаны фазовые траектории неавтономной системы, лежащие на цилиндре (в целях наглядности приведена только одна динамическая переменная x). В частности, цилиндр охватывает устойчивая (притягивающая) траектория Γ_1, удовлетворяющая определению предельного цикла. Формально мы имеем дело с автономной системой (4.3), имеющей аттрактор в виде предельного цикла Γ_1 на цилиндре. Можно ли в этом случае говорить об автоколебаниях? Вопрос не простой и требует обсуждения. Если подходить к вопросу чисто формально, то, казалось бы, мы имеем дело с автоколебаниями: система (4.3) — автономная, имеет аттрактор в виде притягивающего предельного цикла, установившиеся колебания не зависят от начальных условий. Все требования по Андронову здесь выполняются. Однако с физической точки зрения есть принципиальное отличие системы (4.3) от классической автоколебательной системы, такой, например, как осциллятор Ван дер Поля. В системе (4.3) *неявно* присутствует внешняя сила, которая, по существу, является причиной колебаний, а собственная активная колебательная мода в системе отсутствует.

По-видимому, можно выделить формальные признаки, по которым модель типа (4.3) может быть отличима от «настоящей» автоколебательной системы (например, цилиндрическое фазовое пространство). Но нас больше интересуют различия в поведении системы, в характере установившихся в ней колебаний. Особенности неавтономных колебаний проявляются, если, в свою очередь, подать на систему (4.3) внешнее воздействие и попытаться синхронизовать колебания. Как известно, характерной особенностью автоколебаний является их способность «быть синхронизированными». Иначе говоря, автоколебательная мода системы должна обладать некоторой способностью к адаптации, к изменению своих характеристик в соответствии с управляющим сигналом. Под синхронизацией мы понимаем здесь синхронизацию в смысле Гюйгенса, а именно подстройку характерных частот и фаз автоколебаний, в отличие от полной синхронизации, имеющей место только при взаимодействии полностью идентичных систем или от эффекта подавления автоколебательного режима. Если колебания системы (4.3) не являются автоколебательной модой, а порождаются внешней силой, то синхронизовать их невозможно. Таковы колебания в неавтономном диссипативном осцилляторе, например, в осцилляторе Дуффинга. Вместе с тем, неавтономная система может представлять собой генератор с внешним периодическим воздействием.

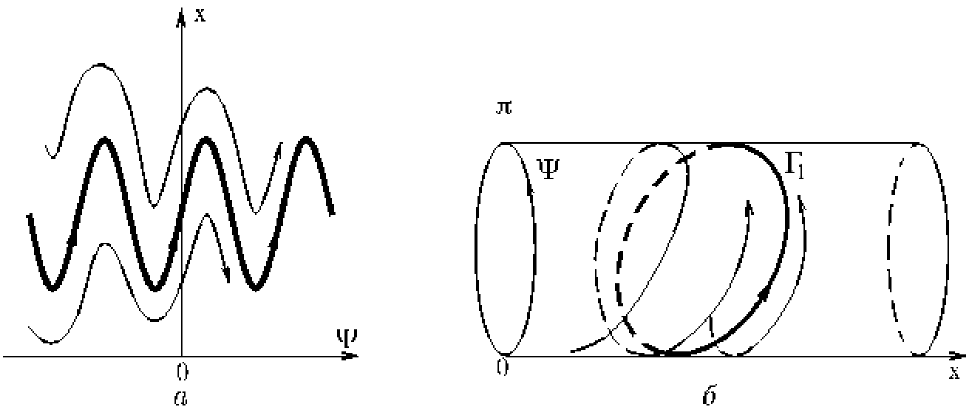


Рис. 3. Фазовые портреты неавтономной системы $\dot{x} = f(x) + B\sin\omega t$: (*а*) для $\Psi = \omega t$, определенной на интервале $(-\infty, +\infty)$, и (*б*) для $\Psi \in [0, 2\pi]$.

В этом случае имеется колебательная мода, которая может быть захвачена, в то же время имеется частота или частоты, навязываемые системе извне. Они остаются постоянными. Таким образом, возможна лишь частичная синхронизация.

Приведенные рассуждения позволяют нам сделать следующее заключение: автоколебания предполагают в качестве необходимого условия наличие аттрактора в динамической системе. Однако этого не достаточно. С физической точки зрения целесообразно ввести дополнительное требование — возможность фазо-частотной синхронизации этого аттрактора. В этом плане и периодические колебания, и квазипериодический режим, и динамический хаос могут удовлетворять указанным двум требованиям. Периодические колебания в системе (4.3), которым соответствует предельный цикл на цилиндре, не удовлетворяют второму условию и в этом смысле не являются автоколебаниями.

4.2. Обобщение понятия аттрактора на случай неавтономной системы с произвольным воздействием

Если внешнее воздействие на систему (4.1) является нерегулярным (хаотическим или случайным), то представление системы в автономном виде невозможно[2]. Как ввести понятие аттрактора для неавтономной системы в общем случае? Поскольку состояние неавтономной системы задается не только вектором $\boldsymbol{x} \in R^N$, но и текущим моментом времени t, то фазовое пространство должно представлять собой уже не арифметическое пространство R^N, а функциональное пространство. В качестве фазового пространства для всех неавтономных систем в R^N может служить пространство H, которому принадлежат все ограниченные интегрируемые вектор-функции $\boldsymbol{x}(t)$.[3] В H можно задать скалярное произведение

$$\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)\rangle \int_0^\infty (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \exp(-\beta t) dt, \quad \beta > 0, \tag{4.4}$$

[2]Точнее говоря, в случае хаотического воздействия система легко сводится к автономной, если ее дополнить уравнениями системы, генерирующей хаотический сигнал воздействия. Однако если эти уравнения не известны, то задача сведения системы к автономному виду оказывается не выполнимой.

[3]Мы используем идеи, высказанные в частной беседе профессором В. С. Афраймовичем, и выражаем ему свою благодарность.

и норму

$$||\boldsymbol{x}(t)|| = \sqrt{\int_0^\infty |\boldsymbol{x}(t)|^2 \exp(-\beta t) dt}. \tag{4.5}$$

Скобки (,) обозначают скалярное произведение векторов в R^N, а скобки $< \, , >$ — скалярное произведение вектор-функций. Таким образом, H есть пространство Гильберта. Величина β — некоторая заданная константа. Если решение системы (4.1) $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ стремится по норме к ∞ медленнее, чем $\exp(\beta t)$, то оно также принадлежит H.

Определим оператор эволюции в H следующим образом:

$$T_\tau \{\boldsymbol{x}(t)\} := \boldsymbol{x}(t + \tau). \tag{4.6}$$

Действие оператора качественно проиллюстрировано на рис. 4. Заметим, что $\boldsymbol{x}(t + \tau)$ не обязательно является решением системы (4.1) $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{y}_0)$ для какого-то начального $\boldsymbol{y}_0$.

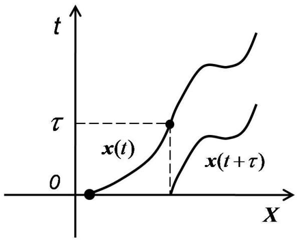


Рис. 4. Иллюстрация действия оператора эволюции в H.

Оператор эволюции (4.6) обладает тем же характерным свойством, что и оператор эволюции автономной системы, определенный в R^N:

$$T_{\tau_1+\tau_2} = T_{\tau_1} o T_{\tau_2} = T_{\tau_2} o T_{\tau_1},$$

где символ o обозначает суперпозицию операторов.

Для автономной ДС справедливо следующее утверждение: если M есть множество решений, то

$$T_\tau M = M, \tag{4.7}$$

где T_τ — оператор эволюции автономной системы. Для неавтономной ДС (4.1) свойство (4.7), вообще говоря, не выполняется. Определим множество M' как

$$M' = \bigcup_{\tau=0}^{\infty} T_\tau M, \tag{4.8}$$

где T_τ — оператор эволюции неавтономной системы, заданный соотношением (4.6). Тогда для M' аналогично (4.7) получаем

$$T_\tau M' = M'. \tag{4.9}$$

Назовем *поглощающей областью* в M' множество $U \in M'$, для которого $T_\tau U \in U$. Тогда для неавтономной системы (4.1) с оператором эволюции (4.6) в H можно определить *максимальный аттрактор* в полной аналогии с определением (3.1). *Максимальный* *аттрактор* A динамической системы (4.1) в области U есть

$$A = \bigcap_{\tau=0}^{\infty} T_\tau U. \tag{4.10}$$

Таким образом, понятие аттрактора чисто формально можно обобщить на случай неавтономной системы с произвольным внешним воздействием. Однако такое обобщение мало что дает с точки зрения наглядности и экспериментальной наблюдаемости аттрактора, поскольку введенный в рассмотрение аттрактор представляет собой множество в функциональном пространстве.

Можно определить аттрактор неавтономной системы и по-другому, рассматривая множество точек X_t в R^N, принадлежащих фазовым траекториям в фиксированный момент времени t. Определенный на этом множестве оператор эволюции $T_\tau(t) : X_t \to X_{t+\tau}$ зависит от момента времени и не удовлетворяет условию (4.7). Используя заданный таким образом оператор эволюции, можно дать определение поглащающей области и максимального аттрактора $A(t)$ в R^N, аналогичное (3.1). Множество $A(t)$ в этом случае можно наглядно представить как множество точек в R^N, но оно оказывается зависящим от выбранного момента времени t, хотя в любой момент остается топологически эквивалентным. Подобный подход используется в [5] для определения аттрактора в системах со случайным возмущением оператора эволюции.

4.3. Аттрактор системы с шумом

Внешнее воздействие на систему может быть случайным. Более того, можно утверждать, что любая реальная система подвергается случайным воздействиям. В этом случае поведение системы представляет собой случайный процесс $\boldsymbol{x}(t)$. Переменная $\boldsymbol{x}(t)$ в каждый момент времени случайным образом принимает одно из множества возможных значений в R^N, даже если начальное состояние $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ строго задано. При определенных условиях в системе устанавливается стационарная плотность вероятности $p^{\text{ст}}(\boldsymbol{x})$, не меняющаяся во времени и не зависящая (в определенной мере) от начальной плотности вероятности $p_0(\boldsymbol{x})$.

Когда говорят об аттракторе в фазовом пространстве R^N динамической системы с шумом, то обычно подразумевают область, в которой фазовые траектории проводят большую часть времени в соответствии с распределением $p^{\text{ст}}(\boldsymbol{x})$. Эту область иногда называют *стохастическим аттрактором* (стохастическим равновесием, стохастическим циклом и т. д.). Однако употребление данного термина в указанном смысле не соответствует строгому определению и не является общепринятым. Далее мы определим *стохастический аттрактор* несколько иначе, в соответствии с работами [6, 7, 5]. Можно также употребить термин «зашумленный аттрактор» (noisy attractor). Границы зашумленного аттрактора строго не определены: при гауссовом шуме фазовая траектория теоретически может попасть в любую точку фазового пространства. Следует также отметить, что размерность зашумленного аттрактора совпадает с размерностью фазового пространства: это — область, имеющая ненулевой объем, в отличие от аттрактора диссипативной детерминированной автономной системы. Данное интуитивное определение зашумленного аттрактора по сути совпадает со статистическим предельным множеством [4] в случае, когда в системе есть шум.

Пусть имеется динамическая система, задаваемая векторным дифференциальным уравнением, правая часть которого зависит от некоторого случайного (в общем случае многокомпонентного) воздействия $\boldsymbol{\xi}(t)$,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in R^N, \quad \boldsymbol{\xi} \in R^N, \quad \boldsymbol{\mu} \in R^m. \tag{4.11}$$

В [5] такие системы отнесены к классу случайных динамических систем (random dynamical system).

Если зафиксировать реализацию внешнего случайного воздействия $\boldsymbol{\xi}(t)$, то система (4.11) будет представлять собой детерминированную неавтономную систему со сложным, нерегулярным сигналом воздействия. К такой системе применимы все рассуждения, приведенные в предыдущем разделе. Множество точек в R^N, определяющих мгновенные состояния системы (4.11) в фиксированный момент времени t для множества всевозможных начальных состояний в момент времени $t_0 \to -\infty$ и одной и той же реализации случайного воздействия $\boldsymbol{\xi}(t)$, назовем согласно [5] *случайным,* или *стохастическим,* аттрактором (random attractor) системы (4.11). Это множество, вообще говоря, зависит от выбора момента t и реализации $\boldsymbol{\xi}(t)$, но в предположении эргодичности случайного возмущения его геометрические свойства будут неизменными во времени и не зависящими от реализации $\boldsymbol{\xi}(t)$.

Стохастический аттрактор дает представление об устойчивости поведения ДС со случайным воздействием и сложности динамической компоненты оператора эволюции. На рис. 5 в качестве примера приведен вид стохастического аттрактора в осцилляторе Дуффинга с аддитивным шумом

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = \sqrt{2D}n(t), \tag{4.12}$$

где $n(t)$ — нормированный источник белого гауссова шума, D — константа, задающая интенсивность шума.

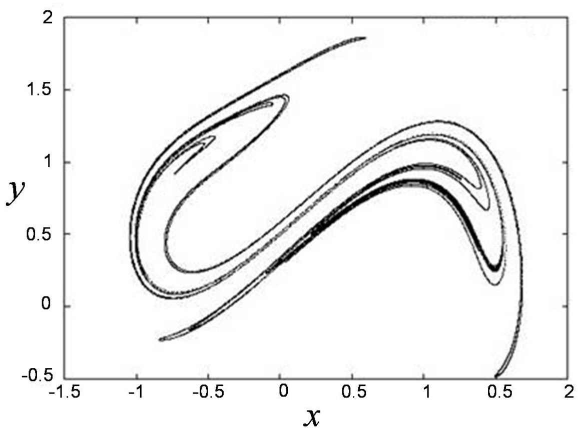


Рис. 5. Пример хаотического стохастического аттрактора в осцилляторе Дуффинга с шумом

При выбранных значениях γ и D стохастический аттрактор является хаотическим и имеет сложную канторову структуру. Соответствующий старший ляпуновский показатель положителен. Изменяя γ или D, можно добиться превращения стохастического аттрактора в единственную точку, что соответствует переходу системы в устойчивый режим — старший ляпуновский показатель становится отрицательным. Кроме стохастических аттракторов, аналогичным образом можно ввести в рассмотрение и другие стохастические предельные множества (репеллеры и седла), что позволяет построить теорию так называемых динамических бифуркаций в системах со случайными воздействиями [5].

К системе (4.11) может быть применено определение аттрактора произвольной неавтономной системы, данное ранее. Под состоянием в этом случае понимается случайная функция $\boldsymbol{x}(t)$. Случайный оператор эволюции, заданный соотношением (4.6), будет удовлетворять свойству (4.7). Однако использование такого определения на практике не удобно.

5. Автоколебания в зашумленных системах

Математическая модель системы с шумом (неважно, с внешним или внутренним) является неавтономной, поскольку задается уравнениями, содержащими зависящие от времени случайные возмущения. Если учесть шум в автогенераторе, то можем ли мы в этом случае говорить об автоколебательном режиме? С физической точки зрения, очевидно, можем, по крайней мере, если шум слабый (что обычно имеет место) и не приводит к подавлению автоколебаний. В системе с источниками шума установившийся режим характеризуется стационарной плотностью вероятности $p^{\text{ст}}(\boldsymbol{x})$, не зависящей от начального состояния (или начального распределения вероятности), и определяется параметрами системы. Параметры шума, при условии его слабой интенсивности, играют гораздо меньшую роль. Исключением являются системы, находящиеся вблизи стохастической бифуркации [5].

Как мы уже говорили, критерием существования автоколебательного режима является возможность синхронизации колебаний. В случае зашумленного автогенератора естественно говорить о *режиме эффективной синхронизации* [8, 9]. Разумеется, эффективная синхронизация не является строгой. Фазовый захват наблюдается на конечных интервалах времени. Границы области эффективной синхронизации не определяются точно, так как не связаны с бифуркационными переходами. Тем не менее, физический эффект частотно-фазового захвата автоколебаний при достаточно слабом шумовом воздействии сохраняется.

Можно отметить, что эффективная синхронизация наблюдается как для зашумленных генераторов периодических автоколебаний, так и для зашумленных генераторов хаоса. В обоих случаях имеет место один и тот же эффект [10].

6. Стохастические автоколебания

Мы подошли к главному вопросу, который хотим рассмотреть в данной работе. Дело в том, что можно выделить класс нелинейных диссипативных систем, которые в отсутствие шума не являются автоколебательными, но в которых шум приводит к возникновению колебаний, обладающих чертами автоколебательного режима. В литературе такие системы обычно называют *стохастическими осцилляторами*, хотя, на наш взгляд, правильнее было бы назвать их *стохастическими генераторами* или *стохастическими автоколебательными системами*, а возникающие в них индуцированные шумом колебания — *стохастическими автоколебаниями.*

Различают два типа таких систем (хотя, возможно, есть и другие): *бистабильные осцилляторы* и *возбудимые осцилляторы.* Общей чертой стохастических осцилляторов является то, что за счет энергии стационарного источника шума в них возникают и поддерживаются незатухающие случайные колебания со следующими свойствами:
1) колебания являются стационарными с почти постоянной амплитудой, определяемой, главным образом, параметрами системы и слабо зависящей от характеристик шума;

2) в некотором диапазоне частот система усиливает мощность шума (т. е. она не является просто пассивным нелинейным фильтром), причем спектрально-корреляционные характеристики колебаний определяются свойствами системы и слабо зависят от соответствующих характеристик шума;
3) колебания системы обладают некоторыми свойствами «синхронизуемости» как под действием внешней силы, так и в результате взаимодействия.

В чем принципиальная разница стохастического осциллятора с шумом и диссипативного нелинейного осциллятора, возмущаемого регулярным сигналом? Почему индуцированные шумом колебания имеют сходство с автоколебаниями? На наш взгляд, дело в том, что, в отличие от регулярного (периодического или квазипериодического) воздействия, широкополосный шум «не навязывает» динамической системе заданных извне характерных частот. Поэтому колебания такой неавтономной системы можно рассматривать как некоторую независимую колебательную моду, обладающую типичными свойствами автоколебаний: независимостью режима от начального состояния и способностью к синхронизации.

Рассмотрим более подробно различные типы стохастических осцилляторов.

6.1. Бистабильные стохастические осцилляторы

Бистабильный стохастический осциллятор — это нелинейный диссипативный осциллятор, имеющий в отсутствие внешнего воздействия два устойчивых состояния равновесия[4] и находящийся под действием шума. Шум приводит к случайным переключениям системы между состояниями равновесия, которые и представляют собой «автоколебания». Средняя амплитуда стохастических колебаний определяется расстоянием между точками равновесия, а средняя частота переключений ω_{K} (*частота Крамерса*) зависит от высоты потенциального барьера, разделяющего состояния равновесия и интенсивности шума.

Модель бистабильного осциллятора может быть представлена в виде

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = \sqrt{2D} n(t), \tag{6.1}$$

где $n(t)$ — нормированный источник белого гауссова шума, D — интенсивность шума, $U(x)$ — потенциальная функция, имеющая два минимума (две потенциальные ямы) и максимум между ними, γ — параметр диссипации. При выборе $U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ из (6.1) получаем стохастический осциллятор Дуффинга (4.12) (по-другому называемый *осциллятором Крамерса*). При сильной диссипации ($\gamma \to \infty$) можно перейти к одномерной модели передемпфированного осциллятора Крамерса

$$\frac{dx}{d\tau} + x^3 - x = \sqrt{2D} n(\tau), \tag{6.2}$$

где $\tau = \gamma t$ — «быстрое время». Модель (6.2) является базовой моделью при исследовании таких явлений, как *стохастический резонанс* и *стохастическая синхронизация*. Однако мы в качестве примера бистабильного стохастического осциллятора рассмотрим более общую двумерную модель (4.12).

На рис. 6 приведены некоторые характеристики стохастических колебаний в системе (4.12). На первый взгляд, индуцированные шумом колебания в бистабильной системе

[4]В принципе, можно рассматривать и мультистабильные стохастические осцилляторы со многими состояниями равновесия.

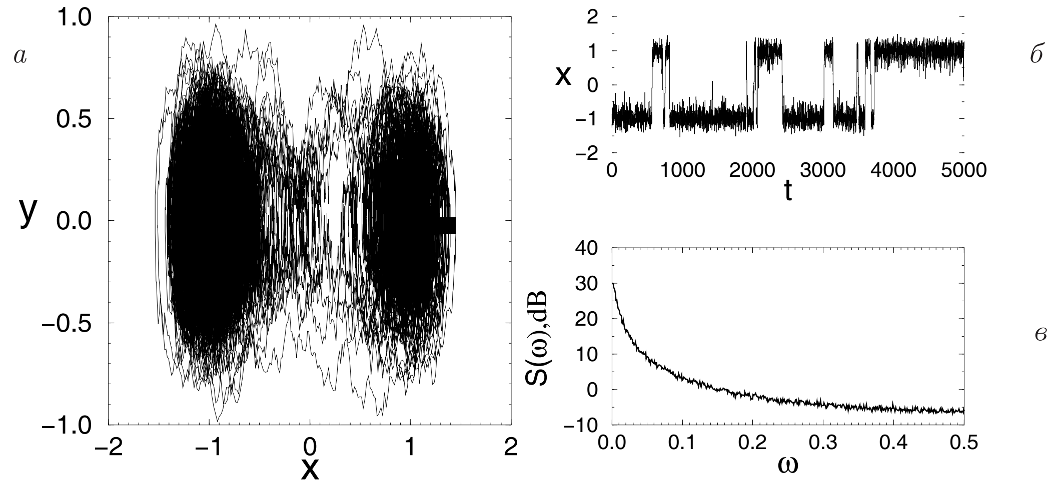


Рис. 6. Стохастические колебания в системе (4.12) при $\gamma = 1$, $D = 0.06$: *а* — фазовый портрет; *б* — вид колебаний во времени; *в* — спектральная плотность мощности колебаний, нормированная на спектральную плотность мощности шума.

не похожи на автоколебательный режим, например, на зашумленный предельный цикл. В спектре отсутствует линия на характерной частоте колебаний (частоте Крамерса). Стохастический аттрактор (в смысле Арнольда) не имеет форму замкнутой кривой, а является, в зависимости от значений γ и D, либо единственной точкой, перемещающейся по фазовой плоскости, либо множеством с фрактальной структурой, пример которого был дан на рис. 5. Однако системе (4.12) и подобным ей системам присущи все выделенные нами свойства стохастических автоколебаний. Переключения, вызванные шумом, являются стационарными случайными колебаниями с почти постоянной амплитудой. Спектр имеет форму лоренциана с максимумом в нуле, полуширина которого соответствует частоте переключений и определяется интенсивностью шума и высотой потенциального барьера. Характер спектра свидетельствует о перераспределении мощности широкополосного шума в область низких частот. Принципиально важное свойство системы (4.12), позволяющее сопоставлять стохастические колебания с автоколебаниями, состоит в эффекте частичной синхронизации. Речь здесь идет о так называемой стохастической синхронизации бистабильных осцилляторов [11, 12, 13].

Рассмотрим осциллятор (4.12), добавив к шуму внешнее гармоническое воздействие

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = C\cos\omega_{\text{вн}}t\sqrt{2D}n(t), \tag{6.3}$$

где амплитуда воздействия C является подпороговой, т. е. без шума внешняя сила не может вызывать переключения. Зафиксируем частоту воздействия $\omega_{\text{вн}}$ и рассмотрим зависимости частоты переключений ω_{K} от интенсивности шума D. Начиная с некоторого значения амплитуды C, эти зависимости имеют почти горизонтальный участок, соответствующий эффекту захвата частоты переключений на частоте воздействия (рис. 7). Захват не является строгим (частоты совпадают не полностью), так что можно говорить лишь об эффективной (частичной) синхронизации.

Интенсивность шума D можно рассматривать как внутренний параметр стохастического автогенератора, на который на заданной частоте воздействует гармоническая сила. Меняя D, мы изменяем характерное время системы $T_K = 2\pi/\omega_K$ и «подстраиваем» стохастический автогенератор под внешнее воздействие. При достаточной амплитуде гармониче-

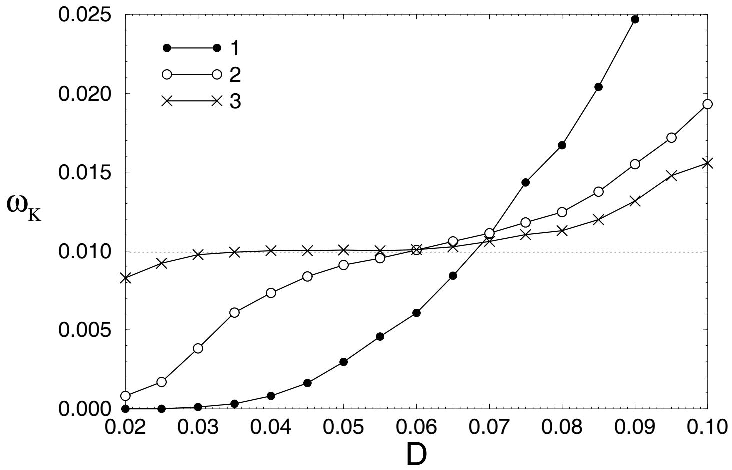


Рис. 7. Эффект частичного захвата частоты в системе (6.3). Зависимость средней частоты переключений от интенсивности шума при $\gamma = 1$, $\omega_{\text{вн}} = 0.01$ и различных амплитудах гармонического воздействия: $C = 0$ (кривая 1); $C = 0.2$ (кривая 2); $C = 0.3$ (кривая 3).

ского сигнала существует область значений D, в которой частота ω_{K}, несмотря на изменение интенсивности шума, остается близка к частоте воздействия $\omega_{\text{вн}}$. Это — область синхронизации. Однако «синхронизуемость» бистабильных систем является свойством, не вполне аналогичным тому же свойству «настоящих» генераторов. Действительно, если зафиксировать параметры генератора и изменять частоту внешнего сигнала, то в некотором интервале частоты $\omega_{\text{вн}}$ будет наблюдаться захват собственной частоты. Для бистабильного стохастического осциллятора, зафиксировав интенсивность шума и изменяя частоту воздействия, захват частоты Крамерса в общем случае наблюдать не удается.

6.2. Возбудимые стохастические осцилляторы

Возбудимый осциллятор — это система, имеющая устойчивое состояние равновесия и метастабильное состояние возбуждения. Выведенная из равновесия внешним толчком система переходит в состояние возбуждения, из которого снова релаксирует к равновесию. Случайные воздействия определенной силы заставляют систему снова и снова переходить в возбужденное состояние. Возникающие под действием шума стохастические колебания представляют собой последовательность случайных импульсов, обычно малой длительности. Подобные процессы часто встречаются в биофизике. Импульсы возбуждения там обычно называют *спайками*.

Существует оптимальная интенсивность шума D, для которой последовательность импульсов возбудимой системы оказывается наиболее близка к регулярной. В качестве меры нерегулярности импульсов часто используется отношение среднеквадратичных флуктуаций интервала T между последовательными импульсами к среднему значению этого интервала

$$R = \frac{\sqrt{< T^2 > - < T >^2}}{< T >}. \tag{6.4}$$

Экспериментальные исследования и теоретический анализ показывают, что зависимость R от D носит нелинейный характер и при некотором значении $D = D_m$ имеет минимум, соответствующий наибольшей упорядоченности последовательности импульсов, т. е. близости ее к периодической последовательности. О максимальной упорядоченности при определенной интенсивности шума свидетельствуют также форма спектра мощности и скорость спада автокорреляционной функции колебаний. Это явление получило название *когерентного резонанса* (КР) [14].

В режиме КР возбудимый стохастический осциллятор по своим свойствам очень похож на автоколебательную систему. Шум вызывает стационарные колебания почти постоянной амплитуды, в спектре которых присутствует четкий пик на частоте $\omega_0 = \dfrac{1}{<T>}$. Эта характерная частота может быть захвачена при внешнем воздействии на систему в точности так же, как захватывается частота автогенератора (с учетом шума). Для возбудимого осциллятора, в отличие от бистабильного осциллятора, можно наблюдать захват частоты, зафиксировав интенсивность шума и меняя частоту воздействия в некоторой области значений [11, 15]. Возможна также взаимная синхронизация возбудимых систем.

Одним из классических примеров возбудимого осциллятора является система Фитцхью–Нагумо [16, 17]. Она качественно описывает действие регенеративных механизмов зажигания в нервной клетке. В несколько упрощенном виде динамика системы с учетом шума задается уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x - a + \sqrt{2D}n(t), \end{aligned} \tag{6.5}$$

где x — быстрая переменная (активатор), y — медленная переменная (ингибитор), ε — малый параметр, определяющий отношение временных масштабов активатора и ингибитора. В качестве источника флуктуаций в уравнение по y добавлен аддитивный гауссов белый шум с интенсивностью D. Параметр a задает положение точки равновесия в системе без шума.

В системе (6.5) при $D = 0$ имеется точка равновесия Q, которая с учетом того, что $\varepsilon > 0$, устойчива при $a^2 > 1$. Если $1 < a^2 < 1 + 2\sqrt{\varepsilon}$, то точка — устойчивый фокус, а если $a^2 > 1 + 2\sqrt{\varepsilon}$, то устойчивый узел. Рассмотрим систему (6.5) при $a^2 > 1$. Так как ε мало, то можно выделить медленные движения вдоль кривой $y = x - \dfrac{x^3}{3}$ и быстрые движения вдоль прямых, параллельных оси абсцисс. Они представлены на рис. 8. Отрезок кубической кривой AC соответствует неустойчивым движениям. Ветви DA и BC являются устойчивыми. Точка равновесия Q находится на левой ветви кривой. Она соответствует невозбужденному состоянию системы, а правая ветвь кривой медленных движений соответствует состоянию возбуждения. Действие шума выводит систему из состояния равновесия. Изображающая точка на фазовой плоскости попадает в область неустойчивости, совершает быстрое движение вдоль горизонтальной линии l_1 и попадает на участок кривой BC (т. е. в состояние возбуждения). Двигаясь вдоль кривой BC, она достигает точки C и возвращается на ветвь DA вдоль линии l_2 (см. рис. 8). Двигаясь вдоль кривой DA, точка снова попадает в окрестность состояния равновесия Q. Таким образом, под действием шума изображающая точка описывает «зашумленный предельный цикл» $ABCD$, и в (6.5) возникает последовательность случайных импульсов возбуждения.

На рис. 9 представлена зависимость величины R от интенсивности шума, полученная для системы (6.5). Она демонстрирует минимум R при некотором значении интенсивности шума $D \approx 0.0025$, что говорит об эффекте КР.

Характеристики режима колебаний в окрестности минимального значения R представлены на рис. 10. На фазовом портрете (рис. 10*a*) виден «зашумленный предельный цикл».

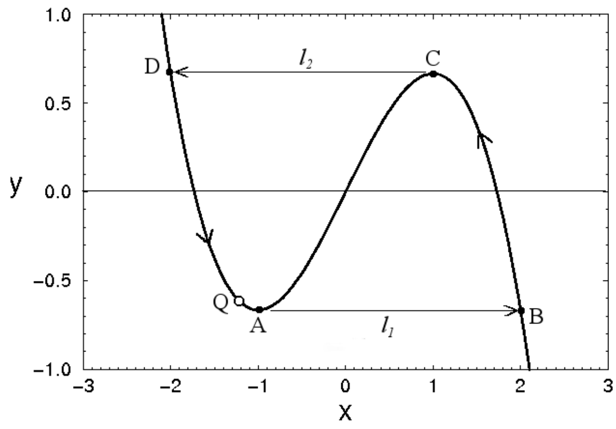


Рис. 8. Иллюстрация, поясняющая возникновение стохастических колебаний в системе (6.5)

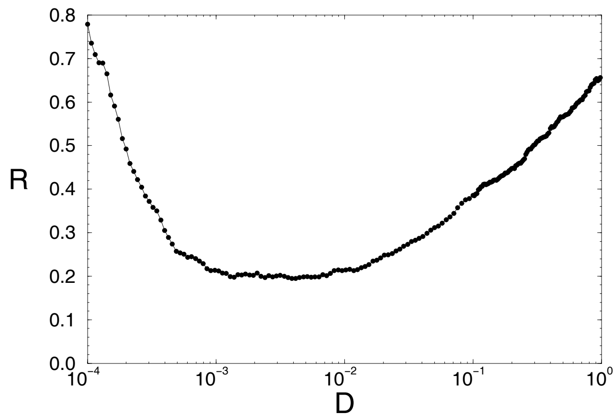


Рис. 9. Зависимость величины R от интенсивности шума D при $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$ в системе (6.5).

Реализация колебаний представляет собой последовательность коротких импульсов, повторяющихся с достаточно высокой регулярностью (рис. 10*б*), а в спектре присутствует четко выраженный основной спектральный максимум на частоте ω_0, близкой к средней частоте следования импульсов (рис. 10*в*). Заметим, что случайный аттрактор (random attractor) системы в данном режиме представляет собой единственную точку на фазовой плоскости (система устойчива), совершающую движения в окрестности петли $ABCD$.

Наличие в спектре мощности колебаний характерной частоты ω_0 отличает возбудимый стохастический осциллятор от бистабильного и делает данный тип стохастических колебаний в большей степени сходным с автоколебаниями. Частота ω_0 может быть захвачена внешним гармоническим сигналом. Добавим во второе уравнение системы (6.5) гармоническую силу $f(t) = C \cos \omega_1 t$ и рассмотрим зависимость отношения частот $\Theta = \omega_0/\omega_1$ от частоты воздействия ω_1 при фиксированных значениях параметров системы, интенсивности шума и амплитуды воздействия. Результаты расчетов, полученные для трех значений амплитуды C, приведены на рис. 11. Можно сказать, что в (6.5) имеет место классический случай эффективной синхронизации в полной аналогии с синхронизацией зашумленного автогенератора. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что возбудимые системы по совокупности свойств очень близки к обычным автоколебательным системам.

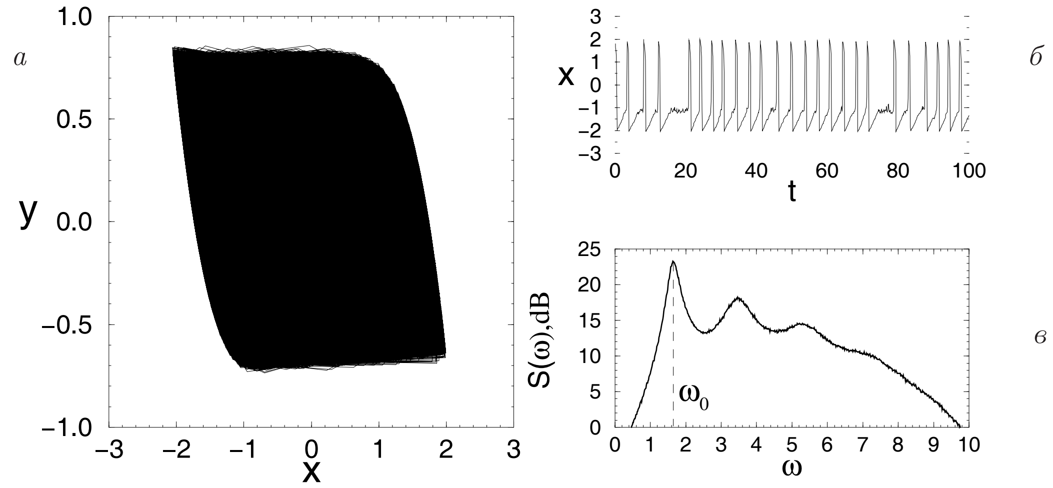


Рис. 10. Стохастические колебания в системе (6.5) при $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, $D = 0.0025$: *а* — фазовый портрет; *б* — вид колебаний во времени; *в* — спектральная плотность мощности колебаний, нормированная на спектральную плотность мощности шума. Вертикальная пунктирная линия на рис. *в* соответствует спектральному максимуму на частоте ω_0.

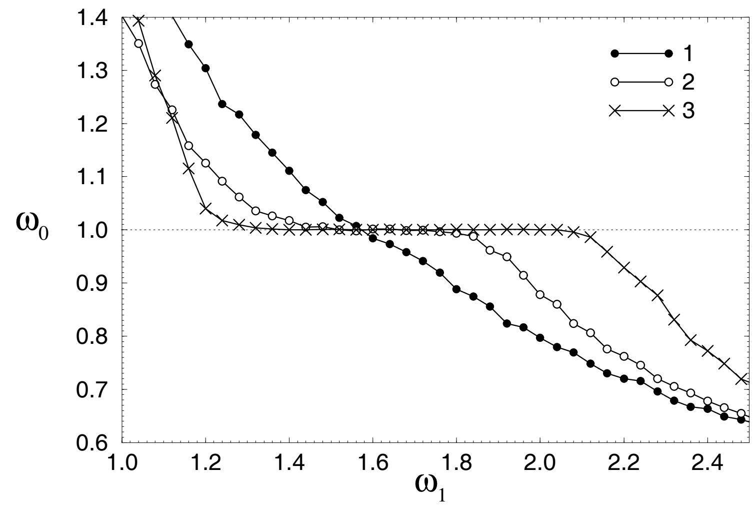


Рис. 11. Зависимость $\Theta = \omega_0/\omega_1$ от частоты ω_1 в системе (6.5) при интенсивности шума $D = 0.0025$ и внешнем гармоническом воздействии $f(t) = C\cos\omega_1 t$ с различными значениями амплитуды C: $C = 0.05$ (кривая 1); $C = 0.2$ (кривая 2); $C = 0.5$ (кривая 3). Параметры системы: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$.

Генерируемый такими системами процесс колебаний естественно назвать стохастическими автоколебаниями.

7. Выводы

Анализ различных колебательных процессов в нелинейных автономных и неавтономных диссипативных динамических и стохастических системах, приведенный в настоящей работе, позволяет сделать следующие выводы. Фундаментальная важность понятий «автоколебания» и «автоколебательная система», введенных А. А. Андроновым для динамических систем на фазовой плоскости, делает целесообразной попытку расширить и обобщить это определение на существенно более широкий класс процессов и систем, включая стохастические. Мы пришли к выводу, что автоколебания могут иметь место в хаотических и зашумленных системах. Для этого достаточно выполнения двух условий. Первое заключается в существовании аттрактора, что по сути означает главную особенность автоколебаний — независимость установившегося процесса колебаний от начальных данных, выбранных в некоторой области (в области притяжения аттрактора). Второе условие требует возможности синхронизации указанного типа колебаний. Другими словами, если есть аттрактор и система демонстрирует эффект частотной синхронизации, то мы имеем дело с автоколебательным процессом.

Такое определение не вступает в противоречие с определением А. А. Андронова: и предельный цикл, и тор реализуют эффекты внешней и взаимной синхронизации. Это касается также и режимов детерминированного хаоса, синхронизация которых исследовалась в многочисленных работах последних лет. Однако вынужденные колебания нелинейных осцилляторов под действием периодической силы не удовлетворяют второму условию: аттрактор в системе есть, но отсутствует эффект синхронизации колебаний.

Все вышесказанное касается и динамики нелинейных диссипативных систем в присутствии шумовых возмущений. Колебания в таких системах формально характеризуются наличием аттрактора в пространстве решений M'. Однако не все типы стохастических колебаний демонстрируют эффекты частотной синхронизации. Если вызванные шумом колебания проявляют свойства частотной синхронизации (в смысле эффективной синхронизации Р. Л. Стратоновича), то такие колебания мы будем называть стохастическими автоколебаниями, а соответствующие системы — автоколебательными.

Отметим еще одну деталь. Согласно А. А. Андронову, энергия, необходимая на поддержание автоколебаний, черпается из постоянного источника. Предлагаемое нами обобщение не вводит никаких ограничений на характер источника энергии. В принципе, автоколебательная система может пополнять свою энергию за счет переменного или даже шумового источника. Главное, чтобы характерные частоты колебаний определялись самой системой, а не частотными характеристиками источника энергии. Сходный подход к обобщению концепции автоколебаний развивается в [18].

Сформулированные условия стохастических автоколебаний (наличие аттрактора и возможность их синхронизации) мы рассматриваем и обосновываем в качестве достаточных. Являются ли они необходимыми? По всей видимости, нет. Вопрос формулировки необходимых и достаточных условий реализации стохастических автоколебаний требует дальнейших исследований.

В заключение отметим, что данная работа посвящается крупному ученому, нашему учителю и замечательному человеку, профессору Леониду Павловичу Шильникову в связи с его юбилеем — 75-летием со дня рождения.

Работа выполнена в рамках АВЦП МО и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2010 годы».

Список литературы

[1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.

[2] Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence / G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 1–34.

[3] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990 (2-е изд. М.: УРСС, 2009).

[4] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций. Сер. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986.

[5] Arnold L. Random dynamical systems. Berlin: Springer, 2003.

[6] Schmalfuss B. The random attractor of the stochastic Lorenz system // ZAMP, 1997, vol. 48, pp. 951–975.

[7] Crauell H., Debussche A., Flandoli F. Random attractors // J. Dynam. Differential Equations, 1997, vol. 9, pp. 307–341.

[8] Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.

[9] Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.

[10] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

[11] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2003.

[12] Neiman A. B. Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E, 1994, vol. 49, pp. 3484–3488.

[13] Shulgin B. V., Neiman A. B., Anishchenko V. S. Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force //Phys. Rev. Lett., 1995, vol. 75, pp. 4157–4160.

[14] Pikovsky A., Kurths J. Coherence resonance in a noisy driven excitable system // Phys. Rev. Lett., 1997, vol. 78, pp. 775–778.

[15] Han S. K., Yim T. G., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V. Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett., 1999, vol. 83(9), pp. 1771–1774.

[16] FitzHugh R. A. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J., 1961, vol. 1, pp. 445–466.

[17] Scott A. C. The electrophysics of a nerve fiber // Rev. Mod. Phys., 1975, vol. 47, pp. 487–533.

[18] Landa P. S. Nonlinear oscillation and waves in dynamical systems. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.