

# Гамильтоновость и интегрируемость задачи Сулова

**А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев**

Институт компьютерных исследований  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1  
borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

*Получено 11 ноября 2009 г.*

В работе рассмотрены вопросы о гамильтонизации и интегрируемости неголономной задачи Сулова и ее обобщения, предложенного Чаплыгиным. Вопросы важны для понимания качественных особенностей динамики этой системы и, в частности, связаны с нетривиальным асимптотическим поведением (то есть некоторой задачей рассеяния). Статья развивает общий подход авторов, основанный на изучении иерархии динамического поведения неголономных систем.

Ключевые слова: гамильтонова система, скобки Пуассона, неголономная связь, инвариантная мера, интегрируемость

**A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev**

## **Hamiltonian representation and integrability of the Suslov problem**

We consider the problems of Hamiltonian representation and integrability of the nonholonomic Suslov system and its generalization suggested by S. A. Chaplygin. These aspects are very important for understanding the dynamics and qualitative analysis of the system. In particular, they are related to the nontrivial asymptotic behaviour (i. e. to some scattering problem). The paper presents a general approach based on the study of the hierarchy of dynamical behaviour of nonholonomic systems.

Keywords: Hamiltonian system, Poisson bracket, nonholonomic constraint, invariant measure, integrability

Mathematical Subject Classification 2000: 34D20, 70E40, 37J35

## Введение

В работе рассмотрены две задачи из неголономной механики. Отметим, что публикация данной работы в выпуске, посвященном 75-летию Л. П. Шильникова, неслучайна. Неголономная механика (даже если ограничиться рассмотрением задач, связанных с качением твердых тел без проскальзывания) более богата и многообразна по динамическому поведению, чем обычная гамильтонова динамика. Например, в работе [30] показано, что поведение «кельтского камня»<sup>1</sup> может быть связано с существованием странных аттракторов, в то же время в другой неголономной системе, связанной с качением шара по искривленной поверхности, мы исследовали устойчивость стационарных вращений модели КАМ-теории. Таким образом, неголономные системы, являющиеся классической областью механики, требуют для своего изучения общие методы качественной теории нелинейной динамики.

Школе Л. П. Шильникова принадлежит наиболее видный вклад в развитие методов качественного исследования динамических систем общего вида (не обязательно гамильтоновых). В книгах [28, 29] изложены общие методы исследования, которые могут быть с успехом применены и в таком классе задач, как неголономные системы.

В данной работе рассмотрены две задачи, исследование которых также сопряжено с качественными методами. Первой является классическая задача Суслова. Хотя ее решение и сводится к квадратурам, эти квадратуры малоэффективны. Поэтому мы останавливаемся на более детальном изучении качественных свойств асимптотического поведения этой системы. Вторая задача представляет собой обобщение предыдущей задачи, предложенное Чаплыгиным, и уже в принципе не сводится к квадратурам. Но, как оказалось, она тоже имеет асимптотическое поведение, для анализа которого необходимо использовать как качественные, так и компьютерные методы.

## 1. Уравнения движения и гамильтонова форма

**Уравнения движения, первые интегралы, инвариантная мера.** Задача Суслова (впервые введенная в [1]) описывает движение твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a}) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость в «теле»,  $\mathbf{a}$  — (единичный) вектор, неподвижный в теле.

Возможная реализация этой связи при помощи острых колесиков внутри сферической оболочки была предложена Вагнером в работе [19], см. рис. 1. Сам Суслов предложил реализацию связи в виде нескручиваемой нити, соединяя последовательно несколько кардановых шарниров [1]. Однако корректность такой реализации связи (1.1) до сих пор не доказана, несмотря на то что она используется даже в современных работах. Кроме того, имеется ряд препятствий для такого доказательства:

- все известные реализации неголономных связей при помощи предельных переходов связаны с наличием *вязкого* трения в исходной системе [26], в то время как упругая

<sup>1</sup>Так называется задача о вращении вокруг вертикали твердого тела в виде «лодочки» на шероховатой плоскости. В этой системе, имитируемой многочисленными игрушками, имеется различие между динамическими и геометрическими характеристиками (не улавливаемое на глаз). Вследствие этого кельтский камень при закрутке вокруг вертикальной оси постоянно останавливается и начинает вращаться в противоположном направлении. Такого рода реверс является весьма неожиданным и до сих пор не имеет полного динамического объяснения.

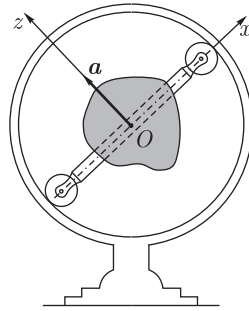


Рис. 1

нескручиваемая нить является консервативной. Получающиеся в таком случае при предельном переходе связи являются голономными (реализация Вагнера связи (1.1) может рассматриваться как предельный случай качения колесика по шероховатой поверхности и с этой точки зрения вполне корректна);

- известно (см., например, [24]), что поворот нити на ненулевой угол может возникнуть не за счет ее скручивания, а за счет изменения формы (см. рис. 2). В этом случае упругая нить не может реализовывать связь на промежутке движения.

Г. К. Сулов [1] и П. В. Воронец [2] также рассматривали более сложную задачу о движении двух тел, соединенных нескручиваемой нитью. Вследствие тех же причин постановка задачи не совсем корректна, и механический смысл результатов пока не ясен. Нерешенным остается и вопрос о реализации неоднородной связи Сулова  $(\omega, \mathbf{a}) = d \neq 0$ , которую в [1] предложено осуществлять при помощи прикрепления нескручиваемой нити к часовому механизму.

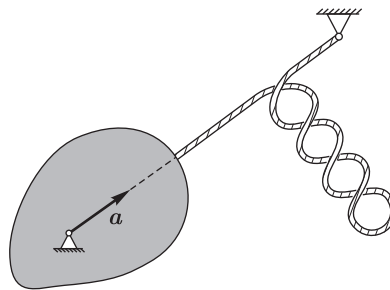


Рис. 2. Иллюстрация возможной ситуации, при которой предложенная Суловым нескручиваемая нить не накладывает связи.

Выберем подвижную систему координат  $Oxyz$ , связанную с телом таким образом, что  $Oz \parallel \mathbf{a}$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  направим таким образом, что компонента тензора инерции  $I_{12} = 0$ . Уравнение связи в этом случае имеет вид

$$\omega_3 = 0, \quad (1.2)$$

а уравнения движения, описывающие эволюцию угловой скорости с учетом связи, представляются в форме

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + M_1, & I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + M_2, \\ I_{13}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_2 &= (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 + \lambda + M_3, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $M_i$  — компоненты момента внешних сил, а  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа. Ясно, что последнее уравнение используется лишь для определения  $\lambda$  и может быть опущено. Положение тела описывается уравнениями Пуассона

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — проекции ортов неподвижных осей на систему координат  $Oxyz$ , связанную с телом.

Пусть тело движется в осесимметричном потенциальном поле, т.е. можно выбрать неподвижные орты так, чтобы потенциал зависел лишь от одного из них,  $U = U(\gamma)$ . В этом случае  $M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$ , и для векторов  $\omega, \gamma$  получаем замкнутую систему

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) допускают интеграл энергии и геометрический интеграл

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) + U(\gamma), \quad \gamma^2 = 1. \quad (1.5)$$

Система (1.4) обладает также инвариантной мерой

$$(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)^{-1} d\omega_1 d\omega_2 d\gamma, \quad (1.6)$$

которая, однако, является сингулярной. Это препятствует применению геометрического варианта теоремы Эйлера–Якоби, сформулированного в [3], хотя и позволяет при наличии дополнительного интеграла получить явные квадратуры.

**Гамильтоново представление.** Несмотря на то, что система (1.4) является неголономной, ее можно записать в обобщенной гамильтоновой форме с вырожденной скобкой Пуассона. При этом оказывается, что соответствующая пуассонова структура при определенном выборе потенциала  $U(\gamma)$  содержит сингулярности, что, в свою очередь, приводит к эффектам, которые не встречаются в «стандартных» гамильтоновых системах.

Рассмотрим сначала случай  $U = 0$ , когда уравнения для  $\omega_1, \omega_2$  отделяются и справедливо следующее

**Предложение 1.** Уравнения, описывающие эволюцию  $\omega_1, \omega_2$  при  $U = 0$ , представляются в гамильтоновой форме со скобкой Ли–Пуассона на соответствующей двумерной разрешимой алгебре.

*Доказательство.*

Скобка Ли–Пуассона двумерной разрешимой алгебры имеет вид

$$\{X, Y\} = Y. \quad (1.7)$$

Сделаем замену переменных

$$X = I_{13}I_{22}\omega_2 - I_{23}I_{11}\omega_1, \quad Y = I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2. \quad (1.8)$$



Несложно показать, что

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \{X, H_0\} = Y^2, & \dot{Y} &= \{Y, H_0\} = -\frac{1}{I_{11}I_{22}}XY, \\ H_0 &= \frac{I_{13}^2 I_{22} + I_{23}^2 I_{11}}{I_{11}I_{22}} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_{11}I_{22}} X^2 + Y^2 \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

■

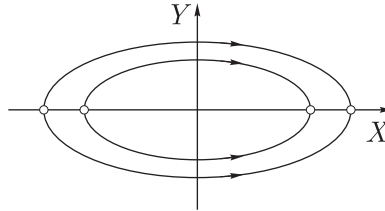


Рис. 3.

Напомним, что симплектические листы скобки (1.7) устроены следующим образом: два двумерных листа — верхняя и нижняя полуплоскости ( $Y > 0$  и  $Y < 0$ ), каждая точка прямой  $Y = 0$  — нульмерный симплектический лист. Траектории системы (1.9) на плоскости  $X, Y$  представляют собой дуги эллипса  $H_0 = \text{const}$  (см. рис. 3) и неподвижные точки на прямой  $Y = 0$ .

Легко видеть, что уравнения (1.9) обладают инвариантной мерой  $\rho dX dY$ , плотность которой  $\rho = \frac{1}{Y}$  сингулярна на прямой  $Y = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** На первый взгляд, предложение 1 противоречит утверждениям работы [3] о несуществовании инвариантной меры и, как следствие этого, негамильтоновости задачи Сулова. Вообще, согласно [4], для существования инвариантной меры уравнений Эйлера–Пуанкаре на алгебре Ли необходима ее унимодулярность. Рассмотренная двумерная разрешимая алгебра Ли не является унимодулярной. Кажущееся противоречие объясняется тем, что мера уравнений (1.9) является сингулярной, что не мешает предъявить обобщенную гамильтонову запись и ввести канонические (симплектические) переменные в каждой отдельной полуплоскости, например  $q = \ln Y$ ,  $p = X$ . *Кстати, в этих переменных гамильтониан  $H_0$  совпадает с гамильтонианом простейшей цепочки Тоды.*

Расширить пуассонову структуру (1.7) на полную систему (1.4) в явном виде не удастся.

Явное интегрирование уравнений (1.9) выполняется в полярных координатах на плоскости  $X, Y$ :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2h_0 I_{11} I_{22}} \cos \varphi, & Y &= \sqrt{2h_0} \sin \varphi, \\ \frac{\varphi}{2} &= \arctg e^{-\varkappa(t+t_0)}, & \varkappa &= \sqrt{\frac{2h_0}{I_{11} I_{22}}}, \end{aligned}$$

где  $H_0 = h_0$  — значение постоянной интеграла.

Таким образом, предельное значение угловой скорости тела при  $t \rightarrow \pm\infty$  определяется соотношениями

$$\omega_1 = \mp \frac{\sqrt{2h_0 I_{11} I_{22} I_{23}}}{I_{13}^2 I_{22} + I_{23}^2 I_{11}}, \quad \omega_2 = \pm \frac{\sqrt{2h_0 I_{11} I_{22} I_{13}}}{I_{13}^2 I_{22} + I_{23}^2 I_{11}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. После подстановки решения  $\omega(t)$  в уравнение Пуассона  $\dot{\gamma} = \gamma \times \omega$  в системе (1.4) получаем линейную неавтономную систему, решение которой в квадратурах в общем случае невозможно. Ее решение встретится на комплексной плоскости времени [27]. Вагнер [19] свёл задачу интегрирования этих уравнений к уравнению типа Риккати при помощи метода Дарбу [31].

Рассмотрим теперь вопрос о гамильтонизации системы (1.4) при наличии потенциала  $U(\gamma)$ . В общем случае этот вопрос практически не изучен. При дополнительном ограничении, что вектор  $\mathbf{a}$  направлен вдоль главной оси тензора инерции (т. е. нужно положить  $I_{13} = I_{23} = 0$ ), система (1.4) обладает стандартной инвариантной мерой  $d^2\omega d^3\gamma$ , и после замены времени  $\gamma_3 dt = d\tau$  на поверхности уровня  $\gamma^2 = 1$  система представляется в форме натуральной лагранжевой системы [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma'_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ L &= \frac{1}{2} \left( I_{22}(\dot{\gamma}'_1)^2 + I_{11}(\dot{\gamma}'_2)^2 \right) - \bar{U}_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $\dot{\gamma}'_i = \frac{d\gamma_i}{d\tau}$ ,  $\bar{U}_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2) = U(\gamma)|_{\gamma_3 = \pm \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}$ , знаки  $\pm$  соответствуют верхней и нижней полусферам. Ясно, что после преобразования Лежандра получим гамильтоновы уравнения, где гамильтонианом является интеграл энергии (1.5), после ограничения на сферу  $\gamma^2 = 1$ .

Заметим, что как замена времени, так и ограничение на сферу имеют особенности в точках  $\gamma_3 = 0$ , поэтому, точнее говоря, уравнения (1.10) описывают две различные системы (соответствующие верхней  $\gamma_3 > 0$  и нижней  $\gamma_3 < 0$  полусферам), которые определены на открытом (некомпактном) подмножестве плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$ , заданном неравенством  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 < 1$ . Если функция  $U(\gamma)$  — четная по  $\gamma_3$ , эти системы идентичны.

В работе [6] поставлен вопрос о гамильтонизации системы (1.4) без замены времени и для потенциала  $U(\gamma_3) = \mu\gamma_3$  найдена соответствующая пуассонова структура ранга 4, но гамильтонианом при этом является функция  $\gamma^2$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пуассонова структура в [6] была обнаружена при помощи анализа показателей Ковалевской, которые связаны с ветвлением общего решения на комплексной плоскости времени и методом Ковалевской–Ляпунова (тестом Пенлеве) анализа интегрируемости. Показатели Ковалевской определены для квазиоднородных систем, к которым относится задача Суллова в однородном поле тяжести. Как показано в [6], при наличии пуассоновой структуры (которая является тензорным инвариантом) в ситуации общего положения показатели Ковалевской являются спаренными, исключая показатели, соответствующие функциям Казимира. Таким образом, анализ показателей Ковалевской может рассматриваться (для квазиоднородных систем) как один из тестов на возможность гамильтонизации.

Результат [6] допускает обобщение:

**Теорема 1.** Если в системе (1.4)  $I_{13} = I_{23} = 0$  (т. е. вектор  $\mathbf{a}$  направлен вдоль главной оси инерции) и  $U(\gamma) = \mu\gamma_3 + V(\gamma_1, \gamma_2)$ , то уравнения движения представляются в гамильтоновой форме

$$\dot{\omega}_i = \{\omega_i, H\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{\gamma_i, H\}, \quad H = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) \quad (1.11)$$

со скобкой Пуассона (указаны только ненулевые)

$$\begin{aligned} \{\omega_1, \gamma_2\} &= I_{11}^{-1}\mu, & \{\omega_2, \gamma_1\} &= -I_{22}^{-1}\mu, \\ \{\omega_1, \gamma_3\} &= -I_{11}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \gamma_2}, & \{\omega_2, \gamma_3\} &= I_{22}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \gamma_1}, & \{\gamma_1, \gamma_3\} &= -\omega_2, & \{\gamma_2, \gamma_3\} &= \omega_1. \end{aligned} \quad (1.12)$$



*Доказательство* заключается в простой проверке уравнений и тождества Якоби. ■

Если функция  $V(\gamma_1, \gamma_2)$  не имеет особенностей, то уравнения представляются в гамильтоновой форме (1.11) во всем фазовом пространстве.

Ранг пуассоновой структуры (1.12) при  $\mu \neq 0$  равен 4, а при  $\mu = 0$  равен 2. Таким образом, на первый взгляд кажется, что при  $\mu = 0$  система (1.11) интегрируема при произвольном потенциале  $V(\gamma_1, \gamma_2)$ , так как может быть ограничена на двумерный симплектический лист и тем самым сведена к системе с одной степенью свободы. Тем не менее, это не так, действительно, достаточно в системе (1.10) положить  $I_{11} = I_{22}$  и взять потенциал некоторой неинтегрируемой натуральной системы на плоскости. Поведение такой системы будет хаотическим. Это объясняется тем, что для сложных пуассоновых структур глобальных функций Казимира может не существовать, так как различные обобщения теорем Дарбу на случай вырожденных пуассоновых структур носят локальный характер. Возникающая здесь ситуация аналогична вопросу о существовании первых интегралов: если локально любая система интегрируема по теореме о выпрямлении, то существование глобальных первых интегралов является исключением.

Отметим также, что если функции Казимира для полупростых алгебр Ли (параметризующие орбиты коприсоединенного представления) хорошо известны и описаны во многих учебниках по алгебрам Ли, то, в общем случае (например, для общих разрешимых алгебр Ли) глобальных функций Казимира (или их части) может и не существовать.

В связи с этим возникает интересный вопрос: *можно ли указать пример пуассоновой структуры ранга два, такой, что для произвольной (аналитической) функции Гамильтона соответствующая гамильтонова система не является интегрируемой?*

То есть, другими словами, симплектические листы такой пуассоновой структуры должны быть «хаотически вложены» в фазовое пространство. В общем случае вопрос может быть сформулирован следующим образом: изучить препятствия к существованию глобальных аналитических функций Казимира для аналитических пуассоновых структур произвольного ранга. Аналогичный вопрос о существовании аналитических интегралов для гамильтоновых систем был поставлен А. Пуанкаре, который и указал основные динамические эффекты, препятствующие их существованию. С современным состоянием проблемы можно ознакомиться по замечательной книге В. В. Козлова [4].

Пусть теперь потенциал  $U(\gamma)$  произвольный. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\pm}(\gamma) &= \gamma_3 + V_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2), \\ V_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2) &= U(\gamma)|_{\gamma_3 = \pm \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}} \mp \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где верхний знак соответствует  $\gamma_3 > 0$ , а нижний —  $\gamma_3 < 0$ . Согласно теореме 1 получаем, что уравнения движения представляются в гамильтоновой форме в двух различных (некомпактных) областях фазового пространства  $\gamma_3 > 0$  и  $\gamma_3 < 0$ . Поскольку в потенциале  $\tilde{U}_{\pm}$  входит корень, система определена лишь в области  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \leq 1$ , при этом в скобке Пуассона (1.12) появляется сингулярность при  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ .

Заметим, что такое представление в гамильтоновой форме в различных открытых областях фазового пространства не противоречит существованию у системы в целом особенностей, не характерных для гамильтоновых систем со скобкой Пуассона без сингулярностей. Так, в работе [8] приведены потенциалы  $U = U(\gamma_1, \gamma_2)$ , для которых система (1.4) интегрируема, а поверхность уровня первых интегралов диффеоморфна ориентируемому двумерному многообразию рода  $g \geq 2$  (т. е. сфере с двумя и более ручками). В то же время в каноническом гамильтоновом случае, согласно теореме Лиувилля–Арнольда, возможны лишь торы

(т. е.  $g = 1$ ). Это кажущееся противоречие (которое рассматривалось Я. В. Татариновым как реальное отличие интегрируемых неголономных систем от гамильтоновых) связано с сингулярностями пуассоновой структуры и неприменимостью канонической версии теоремы Лиувилля–Арнольда для системы в целом. В частности, для рассматриваемых в работе [8] систем на общей поверхности уровня первых интегралов векторное поле обращается в нуль.

Укажем также связь между гамильтоновостью после замены времени  $\gamma_3 dt = d\tau$  (см. (1.10)) и гамильтоновостью с использованием представления (1.13).

Используем следующее хорошо известное

**Предложение 2.** Пусть задана гамильтонова система в канонической форме

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

После замены времени  $\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) dt = d\tau$  эти уравнения движения на уровне энергии  $H = h$  эквивалентны уравнениям движения гамильтоновой системы

$$\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \bar{H} = \frac{1}{\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p})} (H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - h).$$

Применяя это предложение к системе (1.11) на уровне  $H = \frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1}{2}$  и выбирая  $\Pi = \gamma_3$ , в точности получим гамильтонову систему, соответствующую (1.10).

Все известные интегрируемые обобщения задачи Суслова, при которых добавляются некоторые дополнительные потенциальные члены, соответствуют случаям разделения переменных в системе (1.10) либо в декартовых, либо в параболических координатах [8, 21].

**Задача Суслова с гироскатом.** Возможно гироскатическое обобщение уравнений (1.4) [9, 10]. Если гироскатический момент равен  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ , уравнения движения представляются в виде

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + k_3) + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + k_3) + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1, \end{aligned}$$

при этом форма первых интегралов (1.5) не меняется.

После замены времени  $\gamma_3 dt = d\tau$  и ограничения на сферу  $\bar{U}_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2) = U(\gamma)|_{\gamma_3 = \pm\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}$  получим уравнения

$$\begin{aligned} I_{22}\gamma_1'' &= -\frac{\partial \bar{U}_{\pm}}{\partial \gamma_1} \pm \gamma_2' \frac{(I_{13}\gamma_2' - I_{23}\gamma_1' + k_3)}{\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}, \\ I_{11}\gamma_2'' &= -\frac{\partial \bar{U}_{\pm}}{\partial \gamma_2} \mp \gamma_1' \frac{(I_{13}\gamma_2' - I_{23}\gamma_1' + k_3)}{\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

**Предложение.** При  $I_{13} = I_{23} = 0$  уравнения (1.14) можно записать в гамильтоновой форме, если положить  $p_1 = I_{22}\gamma_1'$ ,  $p_2 = I_{11}\gamma_2'$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{d\tau} &= \{\gamma_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \{p_i, H\}, \\ H &= \frac{1}{2} \left( \frac{p_1^2}{I_{22}} + \frac{p_2^2}{I_{11}} \right) + \bar{U}_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2), \end{aligned}$$



где скобка Пуассона

$$\{\gamma_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_1, p_2\} = \pm \frac{k_3}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}.$$

Ясно, что в этом случае уравнения можно также представить в лагранжевой форме (1.10), если, например, положить

$$L = \frac{1}{2}(I_{22}\gamma_1'^2 + I_{11}\gamma_2'^2) - \bar{U}_{\pm}(\gamma_1, \gamma_2) \mp k_3\gamma_1' \operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2}}\right).$$

Многомерные аналоги задачи Суслова исследовались в работах [11, 12, 13, 14] в основном с точки зрения интегрируемости и аналитических свойств общего решения. Вопрос о гамильтоновости этих аналогов, видимо, нигде не рассматривался.

## 2. Показатели Ковалевской и дополнительный интеграл

**Показатели Ковалевской.** Запишем уравнения (1.4) при  $U = 0$  в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

где введены обозначения  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , а  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  — правые части уравнений (1.4). Вследствие однородности (в общем случае — квазиоднородности), уравнения допускают частное решение в виде

$$x_{\mu} = c_{\mu} t^{-\alpha_{\mu}}, \quad \mu = 1, \dots, 5, \quad (2.2)$$

где постоянные коэффициенты  $c_{\mu}$  удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$v_{\mu}(c_1, \dots, c_5) = -\alpha_{\mu} c_{\mu}, \quad \mu = 1, \dots, 5, \quad (2.3)$$

и в общем случае могут быть комплексными. В рассматриваемом случае частное решение (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu} &= 1, \quad \mu = 1, \dots, 5, \\ c_1 &= \frac{-I_{11}I_{22}I_{23} \pm i\sqrt{I_{11}I_{22}I_{13}I_{21}}}{I_{13}^2I_{22} + I_{23}^2I_{11}}, \quad c_2 = \frac{I_{11}I_{22}I_{13} \pm i\sqrt{I_{11}I_{22}I_{23}I_{11}}}{I_{13}^2I_{22} + I_{23}^2I_{11}}, \\ c_3 &= c_4 = c_5 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для решения (2.4) вычислим показатели Ковалевской [17], которые являются собственными числами матрицы  $\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{c}) + \boldsymbol{\alpha} \right\|$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  получаем

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -1, \quad \rho_2 = 2, \quad \rho_3 = 1, \\ \rho_{4,5} &= 1 \pm \frac{\sqrt{(I_{11}I_{23}^2 - I_{22}I_{13}^2 \pm 2i\sqrt{I_{11}I_{22}I_{13}I_{23}})(I_{11} - I_{22})I_{11}I_{22}}}{I_{13}^2I_{22} + I_{23}^2I_{11}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для того чтобы система (1.4) обладала дополнительным интегралом движения, согласно методу Ковалевской–Ляпунова необходимо предположить, чтобы показатели (2.5)

являлись целыми действительными числами (более строгий тест Ковалевской–Ляпунова требует еще и их неотрицательности, см. подробнее [17]). Это условие выполняется при следующих ограничениях на моменты инерции системы:

$$\begin{aligned} 1) \quad I_{13} = 0, \quad I_{11} = I_{22} + \frac{I_{23}^2}{I_{22}} k^2 &\Rightarrow \rho_{4,5} = 1 \pm k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 2) \quad I_{23} = 0, \quad I_{22} = I_{11} + \frac{I_{13}^2}{I_{11}} k^2 &\Rightarrow \rho_{4,5} = 1 \pm k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее мы будем рассматривать только первый случай в (2.6), т. к. второй легко получается из него путем замены индексов 1 и 2.

**Алгебраический первый интеграл.** Условие (2.6) является необходимым для существования дополнительного интеграла движения. Докажем теперь достаточность этих условий для нечетных  $k$ .

**Теорема.** При выполнении условий (2.6) при  $I_{13} = 0$  для нечетных  $k = 2n + 1$  система (1.4) обладает дополнительным алгебраическим интегралом движения степени  $k = 2n + 1$  по импульсам

$$F_n = \omega_1 \gamma_1 f_1^{(n)} + \omega_2 \gamma_2 f_2^{(n)} + I_{23} \omega_2 \gamma_3 f_3^{(n)}, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{f}_n = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}) = \left( \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{U} \right) \hat{\mathbf{f}}_n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, I_{23}^2 \omega_2^2), \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_0 - 2k\mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_0 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{11}} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{I_{22}} & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{I_{23}^2}{I_{22}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{I_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{23}^2}{I_{22}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а  $\hat{\mathbf{f}}_n$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}_n$  с нулевым собственным значением, т. е.  $\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{f}}_n = 0$ .

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся алгоритмом, развитым в работах [15, 16], который для наших целей необходимо модернизировать. Сделаем замену переменных и времени

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_1^2, \quad u_2 = \omega_2^2, \quad u_3 = I_{23}^2 \omega_2^2, \\ s_1 &= \frac{\gamma_1}{I_{23} \omega_2}, \quad s_2 = \frac{\gamma_2}{I_{23} \omega_1}, \quad s_3 = \frac{\gamma_3}{I_{23} \omega_2}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \omega_1 \omega_2^2 I_{23}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В новых переменных уравнения движения принимают вид

$$u'_1 = \frac{2}{I_{11}}, \quad u'_2 = \frac{2}{I_{22}}, \quad \mathbf{s}' = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{s}, \quad (2.9)$$



где  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ , а штрих означает дифференцирование по новому времени  $\tau$ . Интеграл системы (2.9) будем искать в форме

$$F_n = \sum_{i=1}^3 u_i s_i f_i^{(n)}(u). \quad (2.10)$$

Из условия сохранения интеграла (2.10) получим уравнение для вектор-функции  $\mathbf{f}_n$

$$2\mathbf{U}\widehat{D}\mathbf{f}_n = \mathbf{A}_0\mathbf{f}_n, \quad (2.11)$$

где введен дифференциальный оператор  $\widehat{D} = -\frac{1}{J_{11}}\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{1}{J_{22}}\frac{\partial}{\partial u_2}$ .

Очевидным решением уравнения (2.11) является постоянный вектор  $\mathbf{f}_0$ , такой, что  $\mathbf{A}_0\mathbf{f}_0 = 0$ . Причем условие существования этого вектора  $\det \mathbf{A}_0 = 0$  совпадает с условием (2.6) для  $k = 1$ ; таким образом, для  $n = 0$  ( $k = 1$ ) теорема доказана.

Для доказательства теоремы при произвольном  $n$  заметим, что при замене

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{U}\widehat{\mathbf{f}}_1 \quad (2.12)$$

уравнения для  $\widehat{\mathbf{f}}_1$  примут вид, аналогичный (2.11):

$$2\mathbf{U}\widehat{D}\widehat{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{A}_1\widehat{\mathbf{f}}_1, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - 2\mathbf{C}. \quad (2.13)$$

Решением уравнения (2.13) является собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}_1$  с нулевым собственным значением.

Последовательно применяя замену (2.12)  $(n - 1)$  раз с матрицами  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-1}$ , снова получим уравнение вида (2.11), решение которого может быть найдено из уравнения  $\mathbf{A}_n\widehat{\mathbf{f}}_n = 0$ , а условие его существования в точности совпадает с условием (2.6) при нечетных  $k = 2n + 1$ . ■

Вопрос о существовании дополнительного алгебраического интеграла при четных  $k$  остается открытым.

**Абсолютная динамика.** Как уже было сказано выше, движение в абсолютном пространстве (т. е. движение тела относительно неподвижных осей) представляет собой переход от одного стационарного вращения (при  $t \rightarrow -\infty$ ) к другому (при  $t \rightarrow +\infty$ ). Ось вращения в системе координат, связанной с телом, при этом меняет направление на обратное, а в неподвижной системе координат происходит поворот оси вращения на некоторый угол. Таким образом, вопрос об абсолютном движении в задаче Суслова можно интерпретировать как некоторую задачу рассеяния. Для частного случая  $I_{13} = 0$  (либо, соответственно,  $I_{23} = 0$ ) явное аналитическое выражение для угла поворота оси найдено в недавней работе [18].

Было показано, что угол  $\Delta\Psi$  между осями предельных стационарных вращений не зависит от энергии и при  $I_{13} = 0$  определяется соотношением

$$\cos \frac{\Delta\Psi}{2} = \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) / \operatorname{ch}\left(\frac{\pi k}{2d}\right), \quad (2.14)$$

$$k = \frac{\sqrt{I_{22}(I_{11} - I_{22})}}{I_{23}}, \quad d = \sqrt{\frac{I_{11} - I_{22}}{I_{22}}}.$$

Как видно из (2.14), при нечетных  $k$  (т. е. когда имеется указанный выше интеграл) правая часть обращается в нуль, поэтому ось вращения в абсолютной системе координат, так же как и в связанной с телом, меняет направление на обратное, т. е.  $\Delta\Psi = \pm\pi$ . Вопрос о значении угла поворота оси вращения в общем случае  $I_{23}, I_{13} \neq 0$  пока остается открытым.

### 3. Качение динамически несимметричного шара по плоскости при добавлении связи Суслова

В своей неопубликованной работе С. А. Чаплыгин рассматривает модификацию задачи (блестяще решенной им ранее) о движении динамически несимметрично уравновешенного шара по плоскости, когда к шару прикреплена нескручиваемая нить. Точный год написания этой работы неизвестен, но ясно, что она была выполнена до 1903 г., так как в дальнейшем С. А. Чаплыгин переключился на проблемы гидроаэромеханики. В данном случае имеются уже две неинтегрируемые (неголономные) связи: во-первых, условие отсутствия проскальзывания в точке контакта шара и плоскости, во-вторых, равенство нулю проекции угловой скорости на некоторую фиксированную в теле ось. Хотя предложенная Чаплыгиным (видимо, независимо от Суслова) реализация связи также оказывается не совсем корректной, задача является весьма содержательной с точки зрения ее явного интегрирования и специальных методов асимптотического анализа. Кроме того, в работе [20] хотя бы была предложена вполне корректная реализация этих двух связей, использующая «компактную» версию задачи Чаплыгина о шаре (шаровой подвес) и реализующую связь Суслова при помощи тонких колесиков, аналогично Вагнеру [19], см. рис. 4. К сожалению, Чаплыгин не продвинулся в решении этой задачи, и вопрос об ее анализе до сих пор остаётся открыт. По-видимому, в общем случае она не является интегрируемой и не обладает инвариантной мерой (даже сингулярной). Мы здесь укажем лишь одно несложное наблюдение, позволяющее свести анализ этой системы к одной задаче рассеивания и более четко сформулировать открытые вопросы.

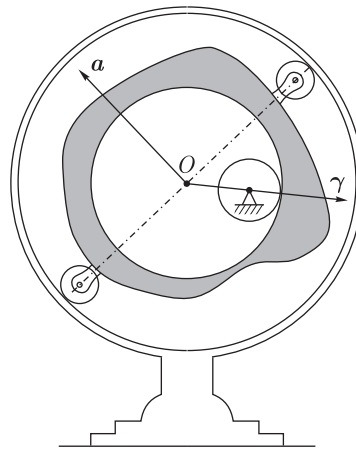


Рис. 4. Возможная реализация системы, описывающей динамику шара Чаплыгина со связью Суслова.

Уравнения движения системы при наличии двух указанных связей в системе координат, жестко связанной с шаром, имеют вид

$$\hat{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)\omega_2 \\ (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)\omega_1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega,$$

где  $\gamma$  — вектор нормали к плоскости,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0)$  — угловая скорость шара,  $\hat{\mathbf{I}}$  — тензор инерции относительно точки контакта

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{11} + mR^2(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) & -mR^2\gamma_1\gamma_2 \\ -mR^2\gamma_1\gamma_2 & I_{22} + mR^2(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) \end{pmatrix},$$

$m, R$  — соответственно, масса и радиус шара,  $I_{ij}$  — компоненты тензора инерции относительно центра масс, причем оси системы координат выбраны так, что  $I_{12} = 0$ .

Уравнения (3.1) обладают очевидными интегралами движения

$$H = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{I}}\hat{\omega}, \hat{\omega}) - \text{энергия}, \tag{3.2}$$

$$(\gamma, \gamma) = 1 - \text{геометрический интеграл},$$

где  $\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$ .

Для интегрируемости по Эйлера–Якоби не хватает еще одного дополнительного интеграла и инвариантной меры. Однако ни инвариантная мера (пусть даже сингулярная), ни первые интегралы, указанные в предыдущем пункте, непосредственно не обобщаются на систему (3.1), в которой, в отличие от предыдущего случая, уравнения для угловых скоростей уже не отделяются.

Совместный уровень первых интегралов (3.2)  $\mathcal{M}_h = \{ \hat{\omega}, \hat{\gamma} \mid H = h, \gamma^2 = 1 \}$  в общем случае представляет собой трехмерное многообразие, которое проецируется на плоскость угловых скоростей  $(\omega_1, \omega_2)$  внутрь полосы, ограниченной двумя эллипсами (см. рис. 5):

$$\sigma_1: 2h = I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2, \quad \sigma_2: 2h = (I_{11} + mR^2)\omega_1^2 + (I_{22} + mR^2)\omega_2^2.$$

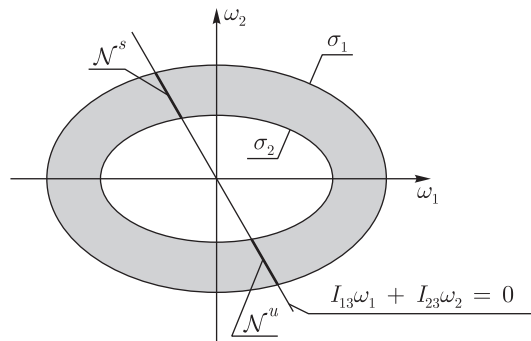


Рис. 5. Область возможных движений при фиксированном значении энергии.

Согласно (3.1), вследствие положительной определенности  $\hat{\mathbf{I}}$  при условии

$$I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0 \tag{3.3}$$

угловые скорости остаются постоянными,  $\omega_1, \omega_2 = \text{const}$ , (при этом, как известно, угловая скорость постоянна в неподвижной системе координат). Уравнение (3.3) (как видно из рис. 5) определяет внутри  $\mathcal{M}_h$  пару инвариантных двумерных подмногообразий  $\mathcal{N}^u, \mathcal{N}^s$ , диффеоморфных сфере. Вычисляя производную величины  $I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2$  в окрестности этих многообразий, можно показать, что подмногообразие  $\mathcal{N}^u$  неустойчиво, а  $\mathcal{N}^s$  устойчиво.

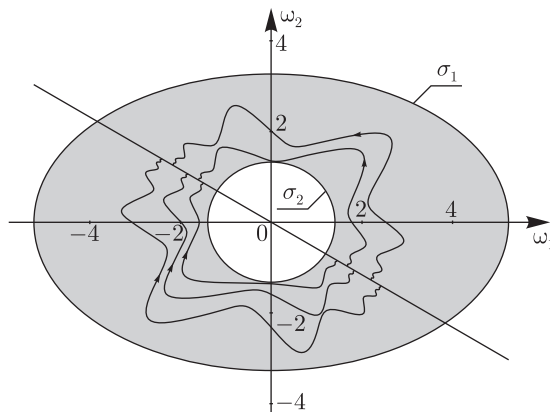


Рис. 6. Характерный вид проекций траекторий на плоскость  $(\omega_1, \omega_2)$  при  $I_{11} = 1, I_{22} = 1.5, I_{13} = 0.7, I_{23} = 1.2, m = 10, R = 1, h = 10$ .

Покажем теперь, что справедливо следующее

**Предложение 3.** *Всякая траектория системы (2.14) при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к  $\mathcal{N}^s$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  к  $\mathcal{N}^u$ .*

*Доказательство.*

Выполним линейную замену переменных (1.8) и на плоскости  $(X, Y)$  перейдем к полярным координатам

$$X = \rho \cos \varphi, \quad Y = \rho \sin \varphi.$$

При этом многообразие  $\mathcal{N}^u$  определяется соотношением  $\varphi = \pi$ , а  $\mathcal{N}^s$  — соответственно  $\varphi = 0$ .

Производная угла  $\varphi$  представима в форме

$$\dot{\varphi} = -\frac{(A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2)}{(I_{11}I_{23}^2 + I_{22}I_{13}^2)B(X^2 + Y^2)}Y = -k(X, Y)Y,$$

$$B = I_{11}I_{22} + d(I_{11}\gamma_1^2 + \gamma_3^2) + I_{22}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) + d^2\gamma_3^2,$$

$$A_{11} = I_{13}^2I_{22} + I_{11}I_{23}^2 + ((I_{13}^2 + I_{23}^2)\gamma_3^2 + (\gamma_2I_{23} + I_{13}\gamma_1)^2)d,$$

$$A_{22} = I_{11}I_{22}(I_{13}^2I_{22} + I_{11}I_{23}^2) + ((I_{11}^2I_{23}^2 + I_{13}^2I_{22}^2)\gamma_3^2 + (-I_{13}I_{22}\gamma_2 + I_{11}I_{23}\gamma_1)^2)d,$$

$$A_{12} = ((\gamma_2I_{23} + I_{13}\gamma_1)(-I_{13}I_{22}\gamma_2 + I_{11}I_{23}\gamma_1) + I_{13}I_{23}(-I_{22} + I_{11})\gamma_1^2)d,$$

где  $d = mR^2$ .

Причем, согласно этим соотношениям, всюду внутри области возможных движений на плоскости  $(X, Y)$  функция  $k(X, Y) > 0$ ; следовательно, в верхней полуплоскости ( $Y > 0$ ) функция  $\varphi(t)$  монотонно убывает, а в нижней ( $Y < 0$ ) — монотонно возрастает. Кроме того, можно показать, что при  $t \rightarrow +\infty$  функция  $\varphi(t)$  сколь угодно близко приближается к значению  $\varphi_+ = 0$ , а при  $t \rightarrow -\infty$ , соответственно, к  $\varphi_- = \pi$ . ■

Характерный вид проекций траекторий системы на плоскость  $(\omega_1, \omega_2)$  приведен на рис. 6.

Несложно понять, что инвариантные многообразия  $\mathcal{N}^u, \mathcal{N}^s$  заполнены периодическими траекториями, для которых вектор  $\boldsymbol{\omega}$  постоянен, а вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  описывает окружности на сфере вокруг оси, задаваемой вектором  $\boldsymbol{a} = (I_{23}, -I_{13}, 0)$  (параллельным  $\boldsymbol{\omega}$ ).

Таким образом, для всякой траектории системы  $\sigma(t) = (\omega(t), \gamma(t))$  пределы  $\cos \theta_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \gamma(t), \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right)$  и  $\cos \theta_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \gamma(t), \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right)$ , где  $\theta_+, \theta_-$  суть некоторые константы.

ЗАМЕЧАНИЕ. На первый взгляд кажется, что естественным образом можно определить одномерное отображение рассеяния

$$S: \theta_- \rightarrow \theta_+.$$

Тем не менее, численные эксперименты показывают, что помимо угла важна также «фаза» рассеяния, так что корректно определяемое отображение рассеяния должно быть двумерным.

Авторы выражают признательность за полезные замечания А. Maciejewski и М. Przybylska, с которыми мы неоднократно имели дискуссии на семинарах в ИКИ в г. Ижевске, а также Ю. Н. Федорову за полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. и при частичной поддержке РФФИ (код проекта 09-01-12151). Работа И. С. Мамаева и А. А. Килина выполнена при поддержке грантов Президента РФ для поддержки молодых ученых — докторов наук (код проекта МД-5239.2008.1) и кандидатов наук (МК-6376.2008.1) соответственно.

## Список литературы

- [1] Сулов Г. К. Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
- [2] Воронец П. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости // Изв. Киев. ун-та Св. Владимира, 1903, т. 43, № 1, с. 1–66.
- [3] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–101.
- [4] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995. 432 с.
- [5] Харламова-Забелина Е. И. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наложении неголономной связи // Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. 20, вып. 1, с. 69–75.
- [6] Borisov A. V., Dudoladov S. L. Kovalevskaya exponents and Poissonian structures // Regul. Chaotic Dyn., 1999, vol. 4, no. 3, pp. 13–20.
- [7] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989 [Olver P. Application of Lie groups to differential equations. New York: Springer, 1986].
- [8] Татаринев Я. В. Разделяющие переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1988, вып. 23, с. 160–174.
- [9] Харламова Е. И. Движение по инерции гиростата, подчиненного неголономной связи // МТТ, 1971, вып. 3, с. 130–132.
- [10] Харламов П. В. Гиростат с неголономной связью // МТТ, 1971, вып. 3, с. 120–130.
- [11] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of  $n$ -dimensional rigid body dynamics // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 1995, vol. 168, pp. 141–171.
- [12] Jovanović B. Non-holonomic geodesic flows on Lie groups and the integrable Suslov problem on  $SO(4)$  // J. Phys. A, 1998, vol. 31, pp. 1415–1422.
- [13] Zenkov D. V., Bloch A. M. Dynamics of the  $n$ -dimensional Suslov problem // J. Geom. Phys., 2000, vol. 34, pp. 121–136.



- [14] Jovanović B. Some multidimensional integrable cases of nonholonomic rigid body dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 1, pp. 125–132.
- [15] Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской и интегрируемые системы классической динамики: I, II // Регулярная и хаотическая динамика, 1996, т. 1, № 1, с. 15–37.
- [16] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2005. 576 с.
- [17] Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996. 244 с.
- [18] Fedorov Yu. N., Maciejewski A. J., Przybylska M. Suslov problem: integrability, meromorphic and hypergeometric solutions // Nonlinearity, 2009, vol. 22, pp. 2231–2259.
- [19] Вагнер Г. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1941, вып. 5, с. 301–327.
- [20] Борисов А. В., Мамаев И. С. Шар Чаплыгина, задача Суслова и задача Веселовой, интегрируемость и реализация связей // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2002. 324 с.
- [21] Dragović V., Gajić B., Jovanović B. Generalizations of classical integrable nonholonomic rigid body systems // J. Phys. A, 1998, vol. 31, pp. 9861–9869.
- [22] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [23] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [24] Fuller F. B. The writhing number of a space curve // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, vol. 68, no. 4, pp. 815–819.
- [25] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.
- [26] Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // ДАН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 550–554.
- [27] Козлова Э. П. К задаче Суслова // Изв. АН СССР, МТТ, 1989, вып. 1, с. 13–16.
- [28] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 1. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004. 416 с.
- [29] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 2. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютер. исслед., 2009. 548 с.
- [30] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Успехи физич. наук, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [31] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris, 1889. 522 p.