

Применение методов качественной теории управляемых динамических систем к исследованию неавтономных дифференциальных уравнений

Н. Н. Бутенина, В. С. Метрикин

ННГУ им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
n.n.butenina@mail.ru, v.s.metrikin@mail.ru

Получено 25 декабря 2009 г.

Для неавтономных систем дифференциальных уравнений второго порядка, являющихся представителями семейства управляемых динамических систем с заданными ограничениями на управление, приведены приемы построения границ областей управляемости и достижимости; введено понятие особых точек и особых траекторий; проведено исследование структуры проколотой окрестности особой точки; рассмотрены различные конкретные примеры, имеющие самостоятельный интерес.

Ключевые слова: управляемая динамическая система, метод сравнения, неавтономные системы, особые точки, особые траектории

N. N. Butenina, V. S. Metrikin

Studying the nonautonomous differential equations by methods of qualitative theory of control dynamical systems

For nonautonomous systems of differential equations of second order which represent the family of control dynamical systems with given constraints on the control, we propose a method for constructing the borders of controllability and attainability. For this, we introduce the notions of singular points and singular trajectories, and study the structure of punctured neighborhood of a singular point. Some concrete examples of self interest are considered.

Keywords: control dynamical system, comparison method, nonautonomous systems, singular points, singular trajectories

Mathematical Subject Classification 2000: 49J15, 49K15

К настоящему времени достаточно полно разработаны методы качественного исследования аффинно управляемых динамических систем второго порядка. Изучена структура границ областей управляемости в заданное состояние и достижимости — из заданного состояния. Исследованы бифуркации указанных областей при изменении ограничений на управление. Очевидно, что каждая неавтономная система дифференциальных уравнений второго порядка, входящая в семейство УДС, обладает свойствами, общими для всех систем этого семейства, что позволяет дать информацию о свойствах решений рассматриваемых ниже конкретных динамических систем.

В работе на основе методов теории управляемых динамических систем (УДС) предлагаются приемы качественного изучения структуры фазового пространства обыкновенных неавтономных дифференциальных уравнений с одной степенью свободы.

Построение на фазовой плоскости непокидаемых и недостижимых областей

Рассмотрим аффинно управляемую динамическую систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = P_0(x, y) + u(t)P_1(x, y) \equiv P(t, x, y), \\ \dot{y} = Q_0(x, y) + u(t)Q_1(x, y) \equiv Q(t, x, y), \end{cases}$$

где $u(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, принимающая значения на заданном промежутке $u_1 \leq u(t) \leq u_2$.

Известно [1, 2], что границы непокидаемых и недостижимых областей содержат лишь особые полутраектории сшитых (u_1, u_2) - или (u_2, u_1) -систем, обладающих свойством одностороннего пересечения. Построив фазовый портрет УДС при $u_1 \leq u(t) \leq u_2$, укажем

1. непокидаемые области, из которых решение с начальными точками внутри области не выйдет при возрастании t (область достижимости);
2. недостижимые области для тех решений, которые имеют начальные точки вне области $U(\Omega_0)$ ($U(\Omega_0)$ — область управляемости УДС в точку Ω_0).

Так, например, рассматривая УДС вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5x + 5x^2 + xy + u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \end{cases}$$

и положив $u(t) = \mu$, $-1 \leq \mu \leq 1$, построим особые интервалы [3], содержащие седла и узлы автономных μ -систем. Область достижимости из точек особого интервала (O_1, O_2) , где O_1 (O_2) состояние равновесия вспомогательной автономной системы, соответствующей $\mu = 1$ ($\mu = -1$), ограничена сшитыми ω -сепаратрисами седла C_1 , соответствующего $\mu = 1$ [2] (рис. 1). Эти сепаратрисы пересекаются. Следовательно, решение системы, имеющее при $t = t_0$ точку в этой области, при $t > t_0$ из этой области не выходит. Численные расчеты показали, что в этой области находится устойчивое предельное множество траекторий системы, в которой вместо $u(t)$ подставлена конкретная функция, изменяющаяся в указанных для $u(t)$ пределах. В частности, $u(t) = \sin(t)$, $u(t) = \cos(t)$ и другие.

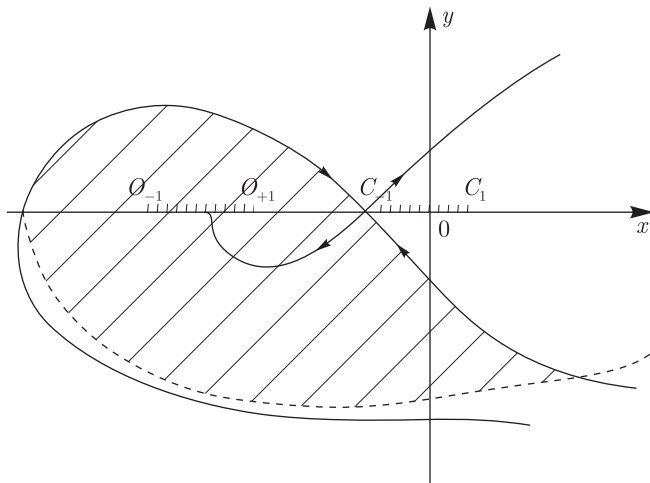


Рис. 1.

Исследование особых точек неавтономной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим неавтономную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P_0(x, y) + f(t)P_1(x, y) \equiv P(t, x, y), \\ \dot{y} = Q_0(x, y) + f(t)Q_1(x, y) \equiv Q(t, x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $(x, y) \in D$ (D — конечная область), $f(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, принимающая значения на промежутке $[u_1, u_2]$. Система (1) является конкретным представителем УДС, т. е. общие свойства систем этого семейства верны для (1).

Определение. Точку (t^*, x^*, y^*) , $-\infty < t^* < \infty$, назовем *особой* точкой неавтономной динамической системы (1), если в этой точке правые части рассматриваемой системы обращаются в нуль:

$$\begin{cases} P(t^*, x^*, y^*) = 0, \\ Q(t^*, x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

В особой точке векторное поле (1) не определено. Для исследования поведения траекторий системы (1) в проколотой окрестности такой точки воспользуемся методами качественного исследования управляемых динамических систем.

Обозначим $f(t^*) = \mu^*$. Известно [1, 2], что все особые точки рассматриваемой системы (1) (при фиксированных значениях $f(t)$) лежат на контактной кривой $F = Q_1P_0 - Q_0P_1 = 0$. Если в особой точке M_0 $\text{grad } F \neq 0$, при увеличении μ^* простая особая точка с индексом $(+1)$ [(-1)] перемещается по контактной кривой вправо (влево) по отношению к $\text{grad } F$ в рассматриваемой точке. Если $\text{grad } F = 0$, указанная особая точка неподвижна [2].

Векторное поле μ -системы ($f(t) \equiv \mu = \text{const}$) в точке, лежащей в области F^+ ($F > 0$) [F^- ($F < 0$)], вращается при увеличении μ в положительном (отрицательном) направлении. Указанные свойства системы (1) применяются при исследовании окрестности особых точек неавтономных систем дифференциальных уравнений.

Таким образом, исследовав структуру окрестности особой точки (t^*, x^*, y^*) автономной системы дифференциальных уравнений методом сравнения векторных полей АДС ($t = t^*$)



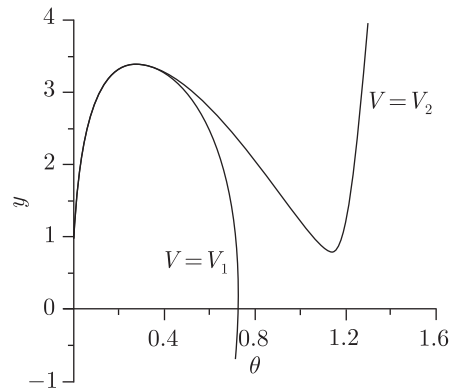


Рис. 2. Качественно различные фазовые траектории.

и УДС ($0 < |t - t^*| < \delta$) при достаточно малых δ , можно описать структуру окрестности особой точки неавтономной системы.

Впервые с помощью введенных понятий особых точек удалось разобраться в необычном на первый взгляд поведении фазовых траекторий математической модели, описывающей статическое напряженно-деформированное состояние трубопровода при укладке J -методом [4].

Дифференциальные уравнения этой математической модели представляют собой неавтономную нелинейную систему вида

$$\begin{cases} \theta' = y = P(\tau, \theta, y), \\ y' = H \sin(\theta) - (W\tau - V) \cos(\theta) = Q(\tau, \theta, y), \end{cases} \quad (2)$$

где штрих означает производную по τ , $y(\tau)$ имеет физический смысл безразмерной кривизны трубы, V и H — внешние эффективные силы, действующие в каждом поперечном сечении трубы, а θ — угол между горизонталью и касательной к оси трубы. Численное решение системы (2), удовлетворяющее граничным и начальным условиям $\theta(0) = y(0) = y(l) = 0$, $\theta(l) < \pi/2$, $\int_0^l \sin(\theta(t)) dt = 1$, при достаточно малых значениях параметра V не вызывает затруднений. Однако, как показывают расчеты, существует критическое значение $V = V^*$, при переходе через которое скачком изменяется характер исследуемого решения. Если $0 < V < V^*$, график решения на фазовой плоскости $\{\theta, y\}$ пересекает интервал $(0, \pi/2)$ оси θ в некоторой точке $M(\theta_m, 0)$, при этом $|\theta_m - \pi/2| \geq r > 0$ при всех указанных V . Если $V > V^*$, исследуемое решение не имеет общих точек с интервалом $(0, \pi/2)$ оси θ . Данное утверждение подтверждает рисунок 2, на котором показаны две фазовые траектории системы (1), построенные для $V = V_1 < V^*$ и $V = V_2 > V^*$.

Причины такого поведения траекторий нашли точное объяснение с помощью методов качественной теории УДС и введенного понятия особой точки.

Доказано [4], что система (2) при $V = V^*$ имеет седловую особую точку $M^*(\tau = \tau^*, \theta = \theta^*, y^* = 0)$. При $V = V^*$ траектория решения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям $\tau = 0, \theta = 0, y = 0$, лежит при $\tau \in (0, \tau^*)$ в полуполосе $\Pi\{\theta \in (0, \pi/2), y \in (0, \infty)\}$ и при $\tau \rightarrow \tau^*$ стремится к особой точке $(\tau^*, \theta^*, 0)$. Такую траекторию естественно назвать *особой*, т. к. она разделяет траектории различного поведения. При $V < V^*$ ($V > V^*$), сколь угодно близкой к V^* , траектория с нулевыми начальными значениями имеет один максимум на интервале $(0, V^*)$ и пересекает интервал $(0, \theta^*)$, переходя в нижнюю полуплос-

кость (не пересекает ось θ на интервале $(0, \pi/2)$), выходит из полуполосы $\Pi\{\theta \in (0, \pi/2), y \in (0, \infty)\}$ через луч $\{\theta = \pi/2, y > 0\}$. Проведенный анализ позволил найти критическое значение параметра V , при превышении которого поставленная задача не имеет физически реализуемого решения, т. е. такого решения, которое бы предсказывало угол θ между трубой и горизонталью в рамках $[0, \pi/2]$. Значение этого параметра определяется из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} y(\tilde{L}) = 0, \\ \operatorname{tg}(\theta(\tilde{L})) = (W\tilde{L} - V)/H. \end{cases}$$

Описанные выше решения ($V \neq V^*$) определены на больших интервалах, чем *особое* решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку при $V = V^*$ решение с нулевыми начальными условиями определено на интервале $(0, \tau^*)$, то непрерывная зависимость решения от параметра при $|V - V^*| < \delta$ имеет место лишь на этом интервале.

Дальнейшие исследования показали, что особые точки неавтономных дифференциальных уравнений известны математикам очень давно.

Простейшим примером является уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + t, \end{cases} \quad (3)$$

описывающее колебания осциллятора под действием вынуждающей силы.

При фиксированном t , $t = t^+$, соответствующая автономная система имеет особую точку $(t^+, 0)$ типа «центр». Особые точки неавтономной системы: $x = t$, $y = 0$, где $-\infty < t < +\infty$.

Если начальные условия t_0, x_0, y_0 таковы, что

$$(x_0 - t_0)^2 + (y_0 - 1)^2 = 1,$$

траектория системы при увеличении t окажется в сколь угодно близкой окрестности особой точки. В указанной точке векторное поле системы (3) не определено. Положив в (3) $t = t_0$, $x = t_0$, $y = 0$, получим $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

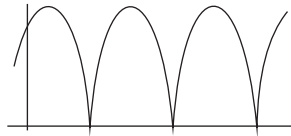
При фиксированном $t = t_0$ имеем автономную линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + t_0. \end{cases} \quad (4)$$

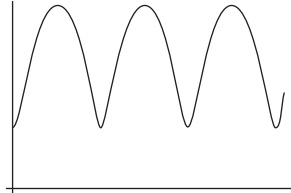
Эта система имеет особую точку ($x = t_0, y = 0$; «центр»), все траектории в окрестности этой точки замкнуты.

При увеличении t ($t > t_0$) график решения системы (3) с начальными условиями $t = t_0, x = t_0, y = 0$ пересекает траектории вспомогательной автономной системы (4) в положительном направлении. При уменьшении t ($t < t_0$) — в отрицательном направлении. Особая точка $t = t_0, x = t_0, y = 0$ — точка возврата. При нулевых начальных условиях решение системы (3) определено при $0 < t < 2\pi$, а при начальных условиях $t = 2\pi k, x = 2\pi k, y = 0$ — на интервалах $(2\pi k, 2\pi(k+1))$. Эта хорошо известная циклоида содержит счетное число особых точек и особых траекторий уравнений (3), определенных на интервалах $(2\pi k, 2\pi(k+1))$ и соединяющих особые точки.

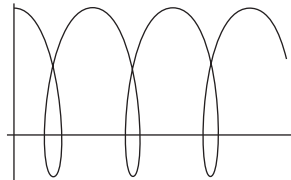
Таким образом, траектория системы (3) имеет особые точки тогда и только тогда, когда при $t = t_0$ начальная точка (x_0, y_0) принадлежит указанной выше окружности. В этом случае график решения имеет вид



Если начальная точка (x_0, y_0) лежит внутри окружности, то решение имеет вид



Если начальная точка x_0, y_0 лежит вне окружности, то график решения особенностей не имеет, т.к. в каждой точке самопересечения кривой направление движения определено однозначно:



Образование петель связано с перемещением при увеличении t особой точки вспомогательной автономной системы вправо по оси x .

Приведем пример существенно нелинейной системы, описывающей динамику простейшего виброударного механизма. Уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sqrt{2}\dot{x} + 2x = \sin t, & x < \delta, \\ \dot{x}^+ = -R(t)\dot{x}^-, & x = \delta. \end{cases}$$

Очевидно, что если ограничителя нет, то из любой начальной точки мы приходим к периодическому движению.

Пусть $t = 0, x_0 = -1, y_0 = 2, \delta = 0,52, R = 0,5$. Поведение фазовых траекторий при заданных начальных условиях и указанных значениях параметров изображено на рис. 3. На рис. 4 представлена соответствующая осциллограмма ($x = x(t)$).

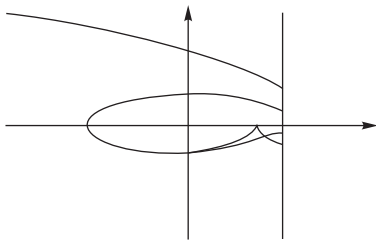


Рис. 3.

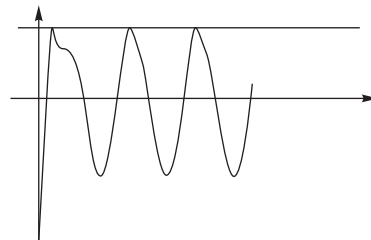


Рис. 4.

Из этих рисунков видно, что пик (максимум) соответствует удару об ограничитель. Почти пологий участок графика осциллограммы соответствует прохождению через особую точку. С течением времени устанавливается периодическое движение.

На рис. 5 представлен портрет фазовых траекторий при $t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 2$ и указанных выше параметрах, а на рис. 6 — соответствующая осциллограмма.

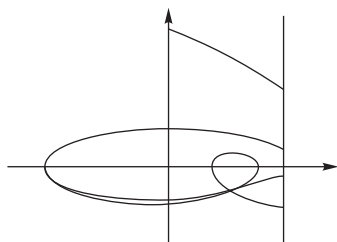


Рис. 5.

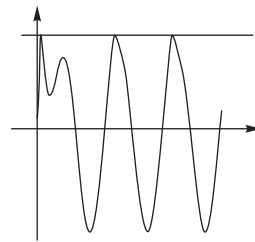


Рис. 6.

На графике осциллограммы выделена часть ее, соответствующая «петле» рис. 5, порожденной особой точкой.

На рисунках четко прослеживается известный факт, обнаруживаемый при исследовании различных режимов в системах с ударными взаимодействиями, а именно: возникновение более сложного (с увеличением числа ударных взаимодействий за период движения) или простейшего (с уменьшением числа ударных взаимодействий) режима происходит в основном в результате касания траектории системы поверхности ударных взаимодействий. В результате этого либо рождается дополнительный удар, либо происходит исчезновение удара. Вполне возможно, что описанные ситуации обусловлены появлением или исчезновением особых точек.

Исследованные системы являются прекрасной иллюстрацией к теореме, приведенной Ф. Хартманом в [5, 118], которая утверждает, что верхняя (нижняя) граница максимального интервала существования решения является, полунепрерывной снизу (сверху) функцией параметров и начальных условий, и не обязана быть непрерывной.

Теорема ([5]). Пусть

1. $y' = f(t, y, z)$, где z — вектор параметров;
2. $f(t, y, z)$ непрерывна на открытом (t, y, z) множестве E ;
3. Для каждого $(t_0, y_0, z) \in E$ задача Коши с фиксированным z имеет единственное решение $y(t) = \eta(t, t_0, y_0, z)$;
4. $\omega_- < t < \omega_+$ является максимальным интервалом существования решения $y(t) = \eta(t, t_0, y_0, z)$.

Тогда $\omega_+ = \omega_+(t_0, y_0, z)$ (или $\omega_- = \omega_-(t_0, y_0, z)$) является полунепрерывной снизу (сверху) функцией от $(t_0, y_0, z) \in E$, а $y(t) = \eta(t, t_0, y_0, z)$ — непрерывна на множестве $\omega_- < t < \omega_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что $\omega_+ [\omega_-]$ может принимать значение $+\infty [-\infty]$. Полунепрерывность снизу функции ω_+ в точке (t_1, y_1, z_1) означает, что если $t^0 < \omega_+(t_1, y_1, z_1)$, то $\omega_+(t_0, y_0, z) \geq t^0$ для всех (t_0, y_0, z) , близких к (t_1, y_1, z_1) . Другими словами, $\omega_+(t_1, y_1, z_1) \leq \liminf \omega_+(t_0, y_0, z_0)$.

Список литературы

- [1] Байтман М. М. Об областях управляемости на плоскости // Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 4, с. 579–593.

- [2] Butenina N. N. The structure of the boundary curve for planar controllability domains // *Methods of qualitative theory of differential equations and related topics*. (Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 200.) Providence, RI: AMS, 2000. P. 73–86.
- [3] Бутенина Н. Н., Сизова Н. А. Особые интервалы управляемой динамической системы второго порядка: Математическое моделирование и оптимальное управление *Вестн. Нижегородского университета*, 1997, С. 108-115.
- [4] Бутенина Н. Н., Метрикин А. В. Об особенностях поведения фазовых траекторий в математической модели прокладки глубоководного трубопровода *J-методом* // *Сб. научных трудов. Нижегородский филиал института машиноведения РАН, Н. Новгород*, 2005, с. 9–19.
- [5] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.