УДК 517.953

Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур*

Н. Н. Нефедов
физический факультет, кафедра математики
Московский государственный университет им. М. в. Ломоносова
119992, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы
nefedov@phys.msu.ru

Получено 5 ноября 2009 г.

Предложена общая схема асимптотического исследования вопросов существования и устойчивости контрастных структур. Эта схема основана на развитии асимптотического метода дифференциальных неравенств, разработанного ранее автором для различных классов сингулярно возмущенных задач.

Ключевые слова: контрастные структуры, сингулярные возмущения, дифференциальные неравенства

N. N. Nefyodov

General scheme of asymptotic investigation of stable contrast structures

General scheme of asymptotic investigation of the questions of existence and stability of the contrast structures is proposed. This scheme is based on the development of the asymptotic method of differential inequalities, which was developed by author for different classes of singularly perturbed problems.

Keywords: contrast structures, singular perturbations, differential inequalities
Mathematical Subject Classification 2000: 35B25, 35B35

*Работа частично поддержана РФФИ, пр. № 10-01-00319.

1. Контрастные структуры

Контрастными структурами принято называть решения с внутренним слоями нелинейных сингулярно возмущенных уравнений. Интерес к исследованиям таких решений стимулируется большим количеством приложений в различных областях, а также возникающими новыми сложными математическими вопросами.

Если рассмотреть задачу об асимптотическом исследовании стационарных решений задачи (решений соответствующей эллиптической задачи)

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^2, \\ &u(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathcal{D} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Δ — лапласиан, то контрастная структура может быть определена следующим образом.
Контрастная структура типа ступеньки — это решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), которое близко к двум различным решениям вырожденного уравнения $f(u, x, 0) = 0$ по разные стороны от некоторой замкнутой кривой Γ (положение кривой Γ не известно заранее, а определяется в ходе построения асимптотики).

При изучении контрастных структур в различных классах задач весьма эффективным оказался асимптотический метод дифференциальных неравенств, основные идеи которого излагаются ниже.

2. Основные идеи асимптотического метода дифференциальных неравенств

В наших работах [1, 4, 5, 6] была разработана общая схема строгого исследования контрастных структур в сингулярно возмущенных задачах для уравнений в частных производных, основанная на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств. Ниже для простоты изложения мы поясним эту схему на примере задачи (1.1), не конкретизируя требования, при которых ее реализация возможна. Эта схема состоит из двух основных этапов: построения формальной асимптотики контрастной структуры и ее модификации для построения верхнего и нижнего решений задачи.

2.1. Построение формальной асимптотики

Пусть Γ_0 — некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая, лежащая в $\mathcal{D}$. Введем в окрестности Γ_0 локальную систему координат r, y. Введем затем кривую Γ_ε, задаваемую в локальной системе координат в виде ряда по степеням ε:

$$r = R(y, \varepsilon) = \varepsilon R_1(y) + \varepsilon^2 R_2(y) + \cdots . \tag{2.1}$$

Контрастные структуры типа ступеньки в задаче (1.1) и других аналогичных задачах изучаются при предположении, что нелинейность f является бистабильной, т. е. имеет два устойчивых корня $\varphi^{(\pm)}(x)$ и неустойчивый $\varphi^{(0)}(x)$, таких, что $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$ при $x \in \overline{\mathcal{D}}$. Положение кривой перехода Γ между корнями $\varphi^{(-)}$ и $\varphi^{(+)}$ обычно определяется условием

$$u(x, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma,$$

(т. е. Γ определяется как проекция кривой пересечения поверхностей решения $u(x,\varepsilon)$ и $\varphi^{(0)}(x)$ на область $\mathcal{D}$). Кривые Γ_0 и Γ_ε определяются в ходе построения асимптотики так, что Γ_ε является асимптотическим приближением Γ.

Кривая Γ_ε делит $\overline{\mathcal{D}}$ на внутреннюю $\overline{\mathcal{D}}^{(+)}$ и внешнюю $\overline{\mathcal{D}}^{(-)}$ по отношению к ней области.

В области $\overline{\mathcal{D}}^{(+)}$ рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u - f(u,x,\varepsilon) = 0\,, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}^{(+)}, \\ &u(x) = \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Асимптотику $U^{(+)}$ задачи (2.2) строим по методу пограничных функций (см. [2], [1]) в виде

$$U^{(+)}) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(+)} + Q_i^{(+)}\right), \tag{2.3}$$

где $\bar{u}^{(+)}$ and $Q^{(+)}$ обозначают регулярную и погранслойную вблизи Γ_ε части асимптотики.

В области $\overline{\mathcal{D}}^{(-)}$ рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u - f(u,x,\varepsilon) = 0\,, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}^{(-)}, \\ &u(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathcal{D}, \quad u(x) = \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Асимптотику $U^{(-)}$ задачи (2.4) строим аналогично в виде

$$U^{(-)}) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(-)} + Q_i^{(-)} + \Pi_i\right), \tag{2.5}$$

где $\bar{u}^{(+)}$ обозначает регулярную часть асимптотики, а Π_i и $Q_i^{(-)}$ — погранслойные части асимптотики вблизи границы $\partial\mathcal{D}$ и Γ_ε соответственно. В качестве главных членов регулярных частей асимптотик выбираются $\bar{u}_0^{(\pm)} = \varphi^{(\pm)}$, а функции $Q_i^{(\pm)}$ служат для описания переходного слоя вблизи Γ.

В силу построения (см. [2], [1]) асимптотики (2.3) и (2.5) удовлетворяют задачам (2.2) и (2.4) по невязке с точностью $O(\varepsilon^{n+2})$, в частности,

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon U^{(+)}) = L_{0R}\bar{u}_0^{(+)} + L_{0IL}Q_0^{(+)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \left((L_R^{(+)}\bar{u}_i^{(+)} + \bar{f}_i^{(+)}) + (L_{IL}^{(+)}Q_i^{(+)} + q_i^{(+)}) \right) + O(\varepsilon^{n+2}) = \\ &= O(\varepsilon^{n+2}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

т. к. все члены в сумме, кроме последнего, равны нулю в силу уравнений для коэффициентов асимптотики. В (2.6) $L_{0R}\bar{u}_0^{(+)} = 0$ и $L_{0IL}Q_0^{(+)} = 0$ — нелинейные уравнения для определения нулевых членов асимптотики (2.3). Остальные коэффициенты асимптотики определяются из линейных уравнений с помощью обратимых операторов: $L_R^{(+)}$ — оператора, порождающего регулярную часть асимптотики, и оператора $L_{IL}^{(+)}$, порождающего погранслойную часть асимптотики. Аналогичное (2.6) представление имеет место и для задачи (2.5):

$$\begin{aligned} L_\varepsilon U^{(-)}) = L_{0R}\bar{u}_0^{(-)} + L_{0IL}Q_0^{(-)} + L_{0BL}\Pi_0 + \\ + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \Big(((L_R^{(-)}\bar{u}_i^{(-)} + \bar{f}_i^{(-)}) + (L_{IL}^{(-)}Q_i^{(+)} + q_i^{(-)}) + (L_{BL}\Pi_i - \pi_i) \Big) + \\ + O(\varepsilon^{n+2}) = O(\varepsilon^{n+2}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $L_{0BL}\Pi_0 = 0$ — нелинейное уравнение для определения нулевого члена, а коэффициенты следующих порядков погранслойной части асимптотики вблизи границы $\partial\mathcal{D}$ определяются из линейных уравнений с помощью обратимого оператора L_{BL}. Остальные члены в (2.7) полностью аналогичны соответствующим членам в (2.6).

В силу задач (2.2) и (2.4) асимптотики $\bar{U}^{(+)}$ и $\bar{U}^{(-)}$ являются сшитыми до непрерывности (выполнено условие C-сшивания) на кривой Γ_ε. Эта кривая (т. е. кривая Γ_0 и коэффициенты R_i в разложении (2.1)) определяется из условия C^1-сшивания асимптотик $\bar{U}^{(+)}$ и $\bar{U}^{(-)}$ на Γ_ε

$$\varepsilon\frac{\partial \bar{U}^{(-)}}{\partial r} = \varepsilon\frac{\partial \bar{U}^{(+)}}{\partial r} \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \tag{2.8}$$

рассматриваемого в соответствующем приближении по ε. При этом Γ_0 обычно определяется из нелинейной задачи. Для определения R_i получаются линейные уравнения вида

$$A^\Gamma R_i = H_i, \tag{2.9}$$

где A^Γ — обратимый оператор, H_i — известная на каждом шаге функция.

2.2. Асимптотический метод дифференциальных неравенств

Определение. *Функции $\alpha(x,\varepsilon)$ и $\beta(x,\varepsilon)$ называются нижним и верхним решениями задачи (1.1), если они удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned} (i) \qquad & L_\varepsilon\alpha(x,\varepsilon) := \varepsilon\Delta\alpha(x,\varepsilon) - f(\alpha(x,\varepsilon),x,\varepsilon) \geqslant 0, \\ & L_\varepsilon\beta(x,\varepsilon) \leqslant 0, \quad x \in \mathcal{D}, \\ (ii) \qquad & \alpha(x,\varepsilon) \leqslant g(x) \leqslant \beta(x,\varepsilon), \quad x \in \partial\mathcal{D}. \end{aligned}$$

Хорошо известно (см., например, [3]), что если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1.1), т. е. они удовлетворяют неравенствам

$$\alpha(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,\varepsilon), \quad x \in \overline{\mathcal{D}}, \tag{2.10}$$

то задача (1.1) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(x,\varepsilon) \leqslant u(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,\varepsilon), \quad x \in \overline{\mathcal{D}}. \tag{2.11}$$

При построении формальной асимптотики основным требованием к линейным операторам L_R, L_{BL} и A^Γ является их обратимость. При построении нижнего и верхнего решений наши требования более жесткие: мы требуем, чтобы неравенства $L_R\delta\bar{u} < 0$, $L_{BL}\delta\Pi < 0$ и $A^\Gamma\delta R < 0$ имели положительные решения в тех же классах, где с помощью этих операторов строятся соответствующие разложения. Тогда, если добавить $\delta\bar{u}$, $\delta\Pi$ к $n+1$ члену в соответствующем разложении регулярной и погранслойной частей асиптотики и $-\delta R$

к разложению кривой перехода Γ_ε для построения верхнего решения $\beta_{n+1}(x,\varepsilon)$, и $-\delta\bar{u}$, $-\delta\Pi$, δR для построения нижнего решения $\alpha_{n+1}(x,\varepsilon)$, то проверка по стандартной схеме (см. [4]) показывает, что $\alpha_{n+1}(x,\varepsilon)$ и $\beta_{n+1}(x,\varepsilon)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}&L_\varepsilon\alpha_{n+1}(x,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}g(x,\varepsilon), L_\varepsilon\beta_{n+1}(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{n+1}g(x,\varepsilon), \quad x\in\mathcal{D},\\&\alpha_{n+1}(x,\varepsilon)\leqslant g(x)\leqslant\beta_{n+1}(x,\varepsilon), \quad x\in\partial\mathcal{D},\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $g(x,0)>0$ в $\overline{\mathcal{D}}$. Кроме того, по построению

$$\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}=O(\varepsilon^n)>0. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) следует, что $\alpha_{n+1}(x,\varepsilon)$ и $\beta_{n+1}(x,\varepsilon)$ являются нижним и верхним решениями задачи (1.1), и, следовательно, существует решение $u(x,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha_{n+1}(x,\varepsilon)\leqslant u(x,\varepsilon)\leqslant\beta_{n+1}(x,\varepsilon). \tag{2.14}$$

А так как по построению и

$$\beta_{n+1}-U_{n+1}=O(\varepsilon^n), \tag{2.15}$$

то из (2.14), (2.15) следует, что решение задачи (1.1) удовлетворяет следующей оценке:

$$|u(x,\varepsilon)-U_{n-1}(x,\varepsilon)|=O(\varepsilon^n), \quad x\in\overline{\mathcal{D}}.$$

2.3. Устойчивость контрастных структур

Весьма важным для приложений является вопрос об устойчивости по Ляпунову стационарных решений $u_s(x,\varepsilon)$ начально-краевой задачи (1.1). Это приводит к необходимости рассмотрения нестандартной задачи на собственные значения для уравнения

$$\varepsilon^2\Delta v-f_u(u_s,x,\varepsilon)v=\lambda v, \quad x\in\mathcal{D}, \tag{2.16}$$

(функция $f_u(u_s,x,\varepsilon)$ меняет знак в узкой области переходного слоя). Известно, что знак главного собственного значения дает ответ об асимптотической устойчивости или неустойчивости стационарного решения. Развитый подход позволяет получить информацию о знаке главного собственного значения (2.16) и, тем самым, дать ответ на сложный с теоретической точки зрения и важный для приложений ответ об устойчивости по Ляпунову стационарных контрастных структур. Можно показать, что при условиях реализации предложенной выше схемы построения нижних и верхних решений стационарные решения (а также периодические в соответствующих периодических по времени краевых задачах) асимптотически устойчивы с областью устойчивости

$$[\alpha_k(x,\varepsilon),\beta_k(x,\varepsilon)],$$

где асимптотический порядок k размера этой области достаточно просто подсчитывается в каждой конкретной задаче.

В заключение отметим, что предложенная схема имеет широкое применение в различных классах сингулярно возмущенных задач.

Список литературы

[1] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и прикл. матем., 1998, т. 4, вып. 3, с. 799–851.

[2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990. 208 с.

[3] Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum, 1992. 777 p.

[4] Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния, 1995, т. 31, № 7, с. 1142–1149.

[5] Нефедов Н. Н. Контрастные структуры типа всплеска в системах реакция-диффузия // Фундамент. и прикл. матем., 2006, т. 12, вып. 5, С. 121–134.

[6] Нефедов Н. Н., Никитин А. Г. Метод дифференциальных неравенств для контрастных структур типа ступеньки в сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнениях в пространственно двумерном случае // Дифференц. ур-ния, 2006, т. 42, № 5, с. 690–700.