УДК 517.938

Стохастические свойства сингулярно гиперболических аттракторов*

Е. А. Сатаев
Обнинский государственный технический университет атомной энергетики
249040, Россия, г. Обнинск, Студгородок, 1
sataev@iate.obninsk.ru

Получено 15 января 2010 г.

В 1998 г. в работе Д. В. Тураева и Л. П. Шильникова было приведено определение псевдогиперболического потока. Псевдогиперболический поток — это такой поток, что в каждой точке фазового пространства имеется разложение касательного пространства в прямую сумму двух подпространств, в одном из которых имеется расширение объема. Независимо в том же году в работе Моралеса (C. Morales), Пацифико (M. J. Pacifico) и Пьюджалса (E. Pujals) было приведено подобное определение сингулярно гиперболического потока. Сингулярно гиперболические потоки удовлетворяют более жестким требованиям, чем псевдогиперболические. Настоящая работа посвящена теории мер Синая – Боуэна – Рюэлля для сингулярно гиперболических аттракторов. Исследуются такие свойства, как эргодичность, перемешивание, непрерывная зависимость инвариантных мер от потока.

Ключевые слова: псевдогиперболичность, сингулярно гиперболическая система, инвариантная мера, эргодичность, перемешивание

E. A. Sataev

Stochastic properties of the singular hyperbolic attractors

In 1998 in paper of D. V. Turaev and L. P. Shilnikov there was introduced the definition of the pseudohyperbolic flow. The pseudohyperbolic flow is the flow such that in every point of the phase space there exists decomposition of the tangent bandle to sum of two spaces such that in one of these spaces there is expanding of volume. Independently in paper of C. Morales, M. J. Pacifico and E. Pujals was introduced the definition of the singular hyperbolic flow. Singular hyperbolic attractors satisfy more strong conditions then pseudohyperbolic ones. This paper is devoted to the theory of Sinai – Bowen – Ruelle measures for singular hyperbolic attractors. There are established such properties as ergodicity, mixing, continuous dependence of the invariant measures on flow.

Keywords: pseudohyperbolicity, singular hyperbolic system, invariant measure, ergodicity, mixing

Mathematical Subject Classification 2000: 37D45

*Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ, грант НШ 8508.2010.1

1. Введение

В 1937 г. появилась работа А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина, в которой было приведено определение грубой системы [1] (в настоящее время употребляется также термин «структурно устойчивая система»). Позднее для систем на плоскости и сфере задача описания всех грубых систем решена усилиями нижегородской школы [1]–[3]. Результаты этих исследований изложены в книгах [4], [5]. Критерий грубости достаточно прост: система грубая, если все состояния равновесия и циклы гиперболичны и нет сепаратрис, идущих из седла в седло. Аналогичные результаты для замкнутых поверхностей получены Пейксото [6]. На поверхности рода 1 и выше к вышеприведенным условиям нужно добавить еще отсутствие незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий.

Грубые двумерные системы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве динамичеких систем.

При исследовании двумерных динамических систем появилась необходимость изучения глобальной бифуркации, связанной с сепаратрисой, идущей из седла в седло. В частном случае сепаратриса может образовывать гомоклиническую петлю, т. е. идти из седла в то же самое седло.

Бифуркацию гомоклинической петли сепаратрисы детально изучала Е. А. Леонтович [7], которая рассмотрела также всевозможные вырожденные случаи. В невырожденном случае из петли сепаратисы рождается предельный цикл, который может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от соотношений между собственными числами уравнения в неподвижной точке.

Естественно возникает задача описания аналогичных бифуркаций в многомерном пространстве. В трехмерном случае бифуркация петли сепаратрисы изучалась Л. П. Шильниковым в шестидесятых годах ([8]–[11]).

В трехмерном пространстве в невырожденном случае неподвижная точка может быть седлом, у которого имеется три вещественных значения, из которых одно положительное и два отрицательных, или седло-фокусом, у которого одно вещественное положительное собственное значение и пара комплексно-сопряженных с отрицательными вещественными частями (заметим, что возможны и другие случаи).

Как показал Л. П. Шильников [8], в случае простой петли сепаратрисы седла с одним положительным и двумя отрицательными собственными значениями в невырожденном случае принципиального отличия от двумерного случая нет. При бифуркации рождается единственный предельный цикл, который может быть устойчивым или седловым в зависимости от соотношений собственных чисел в неподвижной точке.

Принципиально новое явление имеет место при бифуркации петли сепаратрисы седлофокуса. Как оказалось [9], [11], в этом случае при некоторых соотношениях на собственные числа в неподвижной точке появляется сложное инвариантное множество, содержащее бесконечное количество гиперболических циклов в ограниченной области. Позже это явление названо «спиральный хаос».

Ближе к теме настоящей работы другое явление, которое имеет место при бифуркации двойной сепаратрисы седла с одним положительным и двумя отрицательными собственными значениями.

В невырожденном случае у двумерной системы не может быть двойной петли сепаратрис седла типа «восьмерки-бабочки» (т. е. такого поведения, когда обе сепаратрисы неподвижной точки типа седло идут в ту же неподвижную точку и подходят к ней, грубо говоря, с одной стороны, касаясь друг друга). В трехмерном случае это возможно. Эту бифуркацию тоже изучал Л. П. Шильников [10].

Оказалось, что и при бифуркации двойной петли сепаратрис появляется сложное инвариантное множество, содержащее бесконечное множество гиперболических циклов в ограниченной области. Позднее Робинсон (C. Robinson) [12] и Рыхлик (M. Rychlik) [13] показали, что при бифуркации двойной петли сепаратрис при некоторых условиях появляется аттрактор типа аттрактора Лоренца (условия, при которых из двойной петли сепаратрис рождается аттрактор Лоренца, приведены в [14]). Как показано в [15], про реальный аттрактор Лоренца можно с некоторой натяжкой сказать, что он тоже появляется из бифуркации двойной петли сепаратрис.

В шестидесятых годах XX века стало ясно, что грубость системы в размерности 3 и выше связана с гиперболичностью. В связи с этим гиперболические системы изучались довольно интенсивно. Была доказана грубость гиперболического автоморфизма тора, систем Аносова, систем, удовлетворяющих аксиоме A (при дополнительных предположениях). Результаты этих работ изложены во многих обзорах. Приведем ранние [16], [17].

Вместе с классами грубых систем появились примеры систем, в окрестности которых вообще нет грубых систем. Такими примерами являются системы с негрубыми гомоклиническими кривыми в так называемых областях Ньюхауса и системы типа системы Лоренца, которая появилась в работах [18], [19].

Система Лоренца в этом круге вопросов занимает особое место. Эта система изучалась в [20]–[27] (список далеко не полный). Отметим работу [21] как наиболее полную работу тех времен. Кроме полноты, в этой работе имеется явным образом сформулированная модель так называемого геометрического аттрактора Лоренца.

Отметим один вопрос, который имеет отношение к настоящей работе.

Аксиома A С. Смейла для потоков формулируется следующим образом.

1. Множество неблуждающих точек гиперболично.
2. Периодические траектории всюду плотны в множестве неблуждающих точек.
3. Неподвижные точки изолированы в множестве неблуждающих точек.

У аттрактора Лоренца имеется некоторое свойство равномерной гиперболичности (доказана гиперболичность отображения последования [28]; по-видимому, поток является сингулярно гиперболическим, но это не следует из гиперболичности отображения последования и в настоящее время не доказано). Однако неподвижная точка не изолирована в множестве неблуждающих точек, и поэтому аксиома A, очевидно, не выполняется.

Хотелось бы определить общий класс потоков, которые включали бы как поток Лоренца, так и потоки, удовлетворяющие аксиоме A. Ясно, что платой за такое расширение аксиомы A будет потеря структурной устойчивости. Поэтому надо искать другой вид устойчивости при возмущениях.

В настоящее время соответствующее понятие устойчивости пока еще не оформились в сколько-нибудь завершенном виде.

Имеется ряд работ, в которых доказывается, что некоторое свойство динамической системы сохраняется или мало меняется при возмущениях, хотя система не является грубой.

Настоящая работа посвящена одному из видов устойчивости — стохастической устойчивости. Отметим, что понятие стохастической устойчивости имеет ограниченную область применения. Он касается только так называемых стохастических аттракторов.

Поясним понятие стохастической устойчивости.

Рассмотрим поток Φ_t на многообразии, имеющий поглощающую область U (т. е. такую, что $\mathrm{clos}(\Phi_t(U)) \subset U$ при $t > t_0$). Аттрактором называется множество

$$\Lambda = \cap_{t>0}\Phi_t(U).$$

Называя Φ_t потоком, мы допускаем некоторую вольность. На самом деле Φ_t является локальным потоком и полупотоком.

Инвариантная мера μ на Λ называется естественной (или физической), если существует множество $A \subset U$ полной меры, такое, что для всякой непрерывной функции h и всякой точки $x \in A$ имеет место равенство

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h(\Phi_t(x))\,dt = \int_\Lambda h\,d\mu.$$

Аттрактор называется стохастическим, если имеется естественная инвариантная мера с положительной энтропией.

Поток Φ_t называется стохастически устойчивым, если из сходимости $\Phi_t^{(n)}$ к Φ_t имеет место сходимость соответствующих инвариантных мер $\mu^{(n)}$ к мере μ в $*$-слабой топологии.

Для доказательства стохастической устойчивости, как видно из предыдущего, надо сначала доказать существование естественной инвариантной меры для самой системы и для близких систем.

Стохастическая устойчивость не является новым понятием. Стохастическая устойчивость гиперболических диффеоморфизмов и потоков Аносова доказана Я. Г. Синаем [31] и Ю. И. Кифером [32]. Отметим, что они рассматривали устойчивость отосительно малых случайных возмущений. Стохастическая устойчивость потоков, удовлетворяющих аксиоме A, доказана Р. Боуэном и Д. Рюэллем [33].

В 1998 г. в работе Д. В. Тураева и Л. П. Шильникова [34] (см. также [35]) было приведено определение псевдогиперболического потока. Приведем это определение в обозначениях, отличных от [34], но по существу в точности повторяющее соответствующее определение из [34]. Изменение обозначений нужно для согласования с дальнейшим изложением.

Определение 1.1. *Полупоток Φ_t на поглощающей области U называется псевдогиперболическим, если выполнены два следующих условия:*

1. *В каждой точке фазового пространства касательное пространство инвариантным относительно линеаризованного потока образом раскладывается в прямую сумму подпространств E_x^{ss} и E_x^c, непрерывно зависящих от точки, так, что максимальный ляпуновский показатель, отвечающий E_x^{ss}, строго меньше минимального ляпуновского показателя, отвечающего E_x^c: для любой точки $x \in U$, любых ненулевых векторов $u \in E_x^{ss}$, $v \in E_x^c$*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{|d\Phi_t(u)|}{u} < \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{|d\Phi_t(v)|}{v}.$$

2. *Линеаризованный полупоток экспоненциально растягивает объем в ограничении на E_x^c.*

В настоящей работе рассматриваются потоки, удовлетворяющие более жестким условиям. Соответствующее определение (см. определение 2.1) эквивалентно определению сингулярно гиперболического потока, приведенному в [36], [37]. Изменения по сравнению с вышеприведенным определением псевдогиперболического потока касаются двух моментов. Во-первых, в свойствах 1 и 2 требуются равномерные оценки. Во-вторых, пространство E^c_x предполагается двумерным. Двумерность пространства E^c_x используется при доказательстве теоремы о возвратности (см. теорему 3.2 ниже).

В работе [38] доказано, что если аттрактор потока на трехмерном многообразии обладает тем свойством, что он топологически транзитивен, содержит неподвижные точки и топологическая транзитивность сохраняется при возмущении потока, то поток на этом аттракторе является сингулярно гиперболическим. Это является дополнительным основанием для введения сигулярно гиперболических потоков.

2. Основные свойства сингулярно гиперболического аттрактора

2.1. Определение сингулярно гиперболического аттрактора

В настоящей работе рассматривается локальный поток Φ_t, определенный на открытом множестве U n-мерного ориентируемого риманова многообразия M, порожденный гладким (класса C^2) векторным полем $X(x)$.

Касательное пространство в точке $x \in M$ обозначается через T_xM, дифференциал отображения Φ_t обозначается через $d\Phi_t$, длина вектора $v \in T_xM$ обозначается через $|v|$, угол между векторами $u, v \in T_xM$ обозначается через $\angle(u, v)$, расстояние между точками $x, y \in M$ обозначается через $\rho(x, y)$. Риманову метрику мы считаем заданной. Через $\operatorname{clos} A$ обозначается замыкание множества A.

Предполагается, что множество U является инвариантным и поглощающим. Инвариантность означает, что если $t > 0$, то $\Phi_t(U) \subset U$; множество U называется поглощающим, если существует такое $t_0 > 0$, что если $t > t_0$, то $\operatorname{clos} \Phi_t(U)$ — компактное множество, принадлежащее U.

Мы будем предполагать, что

$$\operatorname{clos} \Phi_t(U) \subset U \quad \text{для любого} \quad t > 0. \tag{2.1}$$

Это не ограничивает общности, так как можно показать, что если существует инвариантная поглощающая область в смысле приведенного выше определения, то ее можно изменить так, что для новой области выполнено (2.1).

Аттрактором называется множество

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U).$$

Конус в евклидовом пространстве T определяется подпространством $E \subset T$, которое называется осевым пространством, и величиной α, которая называется углом раствора конуса.

Конусом называется множество $\mathcal{K} \subset T$, состоящее из ненулевых векторов v, таких, что $\angle(v, E) < \alpha$. Размерностью конуса $\mathcal{K}$ называется размерность пространства E.

Мы предполагаем, что на U определено семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss} \subset T_xM$ (эти конусы называются строго устойчивыми) размерности $n-2$; семейство конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ непрерывно зависит от x и инвариантно при движении назад (инвариантность при движении назад означает, что если $t<0$, $\Phi_t(x)$ определено, то $d\Phi_t(\mathcal{K}_x^{ss}) \subset \mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$).

Кроме того, существуют такие константы $c_1>0$, $\gamma_1>0$, что для любой точки $x\in U$, любого $t>0$ и любого вектора $v\in\mathcal{K}_x^{ss}$, такого, что $d\Phi_t(v)\in\mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$, справедливо неравенство

$$|d\Phi_t(v)| < c_1 e^{-\gamma_1 t}|v|.$$

Множество векторов $u\in T_xM$, не принадлежащих конусу $\mathcal{K}_x^{ss}$, является двумерным конусом, который называется центрально-неустойчивым и обозначается через $\mathcal{K}_x^c$. Семейство конусов $\mathcal{K}_x^c$ инвариантно при движении вперед.

В следующем определении через $S(v_1,v_2)$ обозначается площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_1,v_2\in T_xM$.

Определение 2.1. *Поток Φ_t, порожденный векторным полем $X(x)$ на инвариантном поглощающем множестве $U\subset M$, называется сингулярно гиперболическим, если на U имеется инвариантное семейство строго устойчивых конусов и, кроме того,*

1. *существуют такие константы $c_2>0$, $\gamma_2>0$, $T_0>0$, что для любой точки $x\in U$, любого $t>T_0$, любого вектора v, такого, что $d\Phi_t(v)\in\mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{ss}$, и любого $u\in\mathcal{K}_x^c$ имеет место неравенство*
$$\frac{|d\Phi_t(u)|}{|u|} > c_2 e^{\gamma_2 t}\frac{|d\Phi_t(v)|}{|v|};$$
2. *все неподвижные точки гиперболичны;*
3. *существуют такие константы $c_3>0$, $\gamma_3>0$, что для любого $t>0$, любой точки $x\in$ $\in U$ и любых $v_1,v_2\in\mathcal{K}_x^c$, таких, что пространство, порожденное векторами v_1, v_2, принадлежит $\mathcal{K}_x^c$, справедливо неравенство*
$$S\big((d\Phi_t(v_1), d\Phi_t(v_2)\big) > c_3 e^{\gamma_3 t} S(v_1,v_2) \qquad (t>0). \tag{2.2}$$

Неподвижные точки. Как было показано в [37], [39], неподвижные точки, принадлежащие сингулярно гиперболическому аттрактору, бывают двух типов. Первый тип называется типом (L); эти точки характеризуются тем, что имеется два вещественных собственных числа $\lambda_1>0>\lambda_2$, $\lambda_1+\lambda_2>0$, а остальные собственные числа лежат в области $\mathrm{Re}\lambda<\lambda_2$. Неподвижная точка типа (L) имеет $(n-1)$-мерное устойчивое многообразие, $(n-2)$-мерное строго устойчивое многообразие и одномерное неустойчивое многообразие, которое разделяется на две сепаратрисы. При этом строго устойчивое многообразие не принадлежит аттрактору (см. [37]).

Второй тип неподвижных точек — это точки, которые имеют два собственных числа с положительной вещественной частью. Это могут быть два вещественных числа или пара комплексно-сопряженных чисел. Пересечение некоторой окрестности такой точки с аттрактором состоит только из этой точки и окрестности ее неустойчивого многообразия [39]. Траектории, покидающие некоторую окрестность такой точки, не возвращаются в эту окрестность. Поэтому точки второго типа можно исключить из области U вместе с некоторой окрестностью и входящими в нее траекториями.

Мы предполагаем, что все неподвижные точки в окрестности U являются точками типа (L). Множество неподвижных точек обозначим через Fix. Это множество состоит из конечного числа точек $Q_1,\ldots,Q_k$.

2.2. Инвариантные семейства пространств и многообразий

Строго устойчивые пространства и многообразия. Из существования системы конусов $\mathcal{K}_x^{ss}$ следует существование семейства $(n-2)$-мерных подпространств

$$E_x^{ss} = \cap_{t>0} d\Phi_{-t}(\mathcal{K}^{ss}_{\Phi_t(x)}),$$

определенных на множестве U, и семейства двумерных подпространств

$$E_x^{c} = \cap_{t>0} d\Phi_{t}(\mathcal{K}^{c}_{\Phi_{-t}(x)}),$$

определенных на Λ. Пространство E_x^{ss} называется строго устойчивым пространством, пространство E_x^c называется центрально-неустойчивым пространством.

Семейство пространств E_x^{ss} порождает семейство многообразий $W^{ss}(x)$, которые называются строго устойчивыми многообразиями. Многообразие $W^{ss}(x)$ является гладким (класса C^2) многообразием, которое в каждой точке $y \in W^{ss}(x)$ касается пространства E_y^{ss} (точнее, пространство E_y^{ss} является касательным пространством к многообразию $W^{ss}(x)$ в точке $y \in W^{ss}(x)$). В общем случае гладкого частично гиперболического потока класс гладкости многообразия $W^{ss}(x)$ такой же, как и класс гладкости векторного поля, задающего поток.

Для систем Аносова существование строго устойчивых многообразий доказано Д. В. Аносовым [16]; теория инвариантных многообразий изложена в [29].

Многообразия $W^{ss}(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^{ss}(x)$, то

$$\rho(x(t), y(t)) \to 0, \text{если} t \to +\infty.$$

Различают локальные и глобальные многообразия. Локальное строго устойчивое многообразие $W^{ss}_\epsilon(x)$ — это часть строго устойчивого многообразия, являющаяся шаром радиуса ϵ относительно внутренней метрики многообразия $W^{ss}(x)$. Глобальным строго устойчивым многообразием называется множество

$$W^{ss}_{gl}(x) = \cup_{t>0} d\Phi_{-t}(W^{ss}_\epsilon(\Phi_t(x)).$$

Под многообразием $W^{ss}(x)$ мы понимаем локальное многообразие неопределенного размера, обычно такого, какой нужен.

Известно [39], что $X(x) \in E_x^{ss}$ тогда и только тогда, когда x принадлежит строго устойчивому многообразию неподвижной точки.

Устойчивые пространства и многообразия. Обозначим через E_x^0 одномерное подпространство пространства T_xM, порожденное вектором $X(x)$.

Устойчивым пространством называется пространство $E_y^s = E_y^{ss} \oplus E_y^0$. Устойчивое многообразие $W^s(x)$ — это многообразие, которое в каждой точке y касается пространства E_y^s. Многообразия $W^s(x)$ характеризуются тем, что если $y \in W^s(x)$, то существует такое $\tau \in \mathbf{R}^1$, что

$$\rho(x(t), y(t+\tau)) \to 0, \text{если} t \to +\infty.$$

Многообразие $W^s(x)$ является объединением строго устойчивых многообразий, проходящих через точки траектории $x(t)$. Это почти то же самое, что объединение траекторий, проходящих через многообразие $W^{ss}(x)$.

Ориентируемость. В каждом пространстве E_x^{ss} можно выбрать одну из двух ориентаций. Семейство пространств называется ориентируемым, если можно выбрать ориентацию, непрерывно зависящую от точки $x \in U$.

Если семейство пространств E_x^{ss} неориентируемо, то существует двуслойное накрытие множества U, на котором семейство пространств E_x^{ss} является ориентируемым.

Следует отметить, что это накрытие не обязательно продолжается до накрытия всего многообразия M.

Мы предполагаем, что семейство пространств E_x^{ss} ориентируемо.

Центрально-неустойчивые пространства. Центрально-неустойчивым пространством называется пространство

$$E_x^c = \cup_{t>0} d\Phi_t(\mathcal{K}^c_{\Phi_{-t}(x)}).$$

Пространства E_x^c определены и непрерывно зависят от точки x на множестве Λ. На окрестность множества Λ эти пространства, вообще говоря, не имеют однозначного продолжения.

Известно [39], что если $x \in \Lambda$, то $X(x) \in E_x^c$. Отсюда сразу же получаем, что если поток определен на компактном многообразии M без края, $U = M$, то поток является потоком Аносова [37].

Множества $\boldsymbol{M(b;\delta)}$. Эти множества играют важную роль в дальнейших построениях.

Пусть δ — фиксированная раз и навсегда константа, $2\delta < \gamma_3$, b — положительное число.

Рассмотрим множества

$$M(b;\delta) = \{x \in \Lambda : \rho(x(t), \mathrm{Fix}) \geqslant be^{-\delta|t|} \text{для всех} t < 0\}, \tag{2.3}$$

где $x(t)$ — траектория точки $x \in \Lambda$.

Смысл этого определения в том, что отрицательные траектории точек $x \in M(b;\delta)$ не подходят слишком близко к неподвижным точкам. Поэтому на этих множествах имеются равномерные оценки.

Кроме множеств $M(b;\delta)$ мы иногда будем рассматривать множества

$$M(b;\delta;T) = \{x \in \Lambda : \rho(x(t), \mathrm{Fix}) \geqslant be^{-\delta|t|} \text{для всех} t \in [-T, 0]\}. \tag{2.4}$$

Нетрудно показать, что если $b_1 < b_2$, то $M(b_2;\delta) \subset M(b_1;\delta)$, и что если $t > 0$, то

$$\Phi_{-t}(M(b;\delta)) \subset M(be^{-\delta t};\delta).$$

Через $M(0;\delta)$ обозначается множество

$$M(0;\delta) = \cup_{b>0} M(b;\delta).$$

Множества $M(b;\delta)$ являются замкнутыми, но не инвариантными. Множество $M(0;\delta)$ инвариантно, но не замкнуто.

В работах [39], [40] множества $M(b;\delta)$ определены иначе. Пусть $\widehat{M}(b;\delta)$ — те множества, которые определены в [39], [40].

Соотношения между множествами $M(b;\delta)$ и $\widehat{M}(b;\delta)$ можно выразить в следующем утверждении, которое оставим без доказательства.

Существует константа $C > 0$, такая, что для любого $b > 0$

$$\widehat{M}(Cb;\delta) \subset M(b;\delta); \qquad M(Cb;\delta) \subset \widehat{M}(b;\delta).$$

Строго неустойчивые пространства. Строго неустойчивое пространство E_x^{uu} точки x — это множество таких векторов $v \in T_xM$, что

$$\lim_{t\to-\infty} |d\Phi_t(v)| = 0.$$

Строго неустойчивые пространства существуют не для всех точек. В работе [39] доказано, что если $x \in M(b;\delta)$, то пространство E_x^{uu} существует, пространства E_x^{uu} непрерывно зависят от точки x на каждом множестве $M(b;\delta)$, на каждом множестве $M(b;\delta)$ справедливо неравенство $\angle(E_x^s, E_x^{uu}) > cb^2$, и если $v \in E_x^{uu}$, $t < 0$, то $|d\Phi_t(v)| < ce^{-|t|(\gamma_3-2\delta)}|v|$ с некоторой константой $c > 0$, зависящей от b.

Особенность сингулярно гиперболических потоков состоит в том, что угол между вектором $X(x)$ и пространством E_x^{uu} может быть как угодно малым. Кроме того, вообще говоря, нет непрерывной зависимости пространства E_x^{uu} и многообразия $W^{uu}(x)$ от точки x на множестве $M(0;\delta)$.

Строго неустойчивые многообразия. Строго неустойчивым многообразием точки $x \in \Lambda$ называется многообразие $W^{uu}(x)$, состоящее из таких точек $y \in \Lambda$, что

$$\lim_{t\to-\infty} \rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0.$$

В работе [40] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Существует такая константа $\epsilon_1 > 0$, что для каждой точки $x \in \in M(b,\delta)$ определена кривая $W^{uu}(x)$ длины $\epsilon_1 b$, называемая строго неустойчивым многообразием; при этом выполнены свойства*

1. $W^{uu}(x) \subset M(\epsilon_1 b;\delta)$;
2. *касательная к кривой $W^{uu}(x)$ в каждой точке $y \in W^{uu}(x)$ совпадает с пространством E_y^{uu};*
3. *семейство многообразий $W^{uu}(x)$ непрерывно зависит от x в C^1-топологии на каждом множестве $M(b,\delta)$;*
4. *для каждого $b > 0$ существует такая константа $c = c(b) > 0$, что если $y \in W^{uu}(x)$, $t < 0$, то $\rho(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) < ce^{-|t|(\gamma_3-2\delta)}\rho(x,y)$.*

Отметим, что из свойства 1 следует, что если $x \in \Lambda$, то $W^{uu}(x) \subset \Lambda$.

3. Меры Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-меры)

Инвариантные меры типа Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-меры) впервые были построены Я. Г. Синаем (см. [31], [17]) для диффеоморфизма Аносова. Впоследствии конструкция этих мер была перенесена Р. Боуэном и Д. Рюэллем на случай диффеоморфизмов и потоков, удовлетворяющих аксиоме A С. Смейла. Для общего сингулярно гиперболического потока SBR-меры построены в [40]. Другое построение для потока на трехмерном многообразии и топологически транзитивного аттрактора имеется в [45]. Существование инвариантных мер для модели аттрактора Лоренца без предположения гладкости слоения, но при различных дополнительных предположениях доказывалось в работах [27], [43], [44].

Мы будем использовать построение инвариантных мер, приведенное в [40].

Семейство условных мер. Для точек $x \in M(0;\delta)$ обозначим через $J^{uu}(x)$ величину

$$J^{uu}(x) = \frac{1}{|v(0)|}\,\frac{d}{dt}|v(t)|\bigg|_{t=0},$$

где $v(t) = d\Phi_t v(0)$, $v(0) \in E^{uu}_x$. Из инвариантности семейства пространств E^{uu}_x следует, что $v(t) \in E^{uu}_{x(t)}$.

Пусть W — кривая, которая является отрезком многообразия $W^{uu}(x)$. На кривой W определена мера Лебега, которая порождена римановой длиной. Определим меру μ_W на кривой W так, что эта мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и плотность $p(x)$ меры μ_W относительно меры Лебега определяется так, что для любых точек $x, y \in W$

$$\frac{p(x)}{p(y)} = \exp\Big(\int_{-\infty}^{0}\big(J^{uu}(y(t)) - J^{uu}(x(t))\big)\,dt\Big). \tag{3.1}$$

Мера μ_W называется условной мерой.

Определение условных мер в [40] отличается от вышеприведенного, но эквивалентно ему.

Семейство условных мер инвариантно в том смысле, что если $W_2 = \Phi_t(W_1)$, то $\Phi_t(\mu_{W_1}) = \mu_{W_2}$.

Связки. Связкой мы называем множество, состоящее из отрезков строго неустойчивых многообразий точек множества $M(b;\delta)$, соединяющих два локальных устойчивых многообразия. При этом левые концы этих отрезков принадлежат одному локальному устойчивому многообразию, которое называется левым граничным многообразием, а правые концы — другому граничному многообразию, которое называется правым граничным многообразием.

Мы говорим, что две связки не пересекаются, если все общие точки этих двух связок принадлежат одному локальному устойчивому многообразию. Иначе говоря, либо эти связки не имеют общих точек, либо все общие точки лежат на одном устойчивом многообразии, которое для одной из этих связок является левым граничным многообразием, для другой — правым.

Нетрудно убедиться в том, что пересечение двух связок является связкой и что объединение двух связок можно представить как объединение некоторого количества (не более 5) непересекающихся связок.

Поперечным размером связки назовем максимальный диаметр пересечения связки с локальным устойчивым многообразием.

Пусть P — связка, ν — некоторая мера, определенная на P. Разбиение связки на строго неустойчивые многообразия является непрерывным и потому измеримым. Согласно теории измеримых разбиений, на почти каждом отрезке W определена условная мера ν_W.

Назовем меру ν, определенную на связке, допустимой, если условные меры ν_W на каждом строго неустойчивом многообразии этой связки совпадают с условными мерами μ_W, определенными выше.

Определение SBR-меры

Определение 3.1. *Мера μ называется SBR-мерой, если она инвариантна, $\mu(M(0;\delta)) = 1$ и ограничение меры μ на любую связку положительной меры является допустимой мерой.*

Отметим, что из равенства $\mu(M(0;\delta)) = 1$ следует существование строго неустойчивого многообразия $W^{uu}(x)$ для почти каждой точки $x \in \Lambda$.

SBR-мера на аттракторе интересна потому, что она является «физической». Это означает следующее.

Пусть ν — мера Лебега на окрестности U. «Физическая мера» для потоков — это предел при $T \to +\infty$ семейства

$$\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_t(\nu)\, dt.$$

Если мера μ «физическая», а поток Φ_t эргодичен на Λ, то существует множество $A \subset U$ полной меры, такое, что для любой непрерывной функции $f(x)$ и любой точки $x \in A$ справедливо равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\Phi_t(x))\, dt = \int_\Lambda f(x)\, d\mu(x).$$

Теорема о возвратности. Теорема о возвратности доказана в [40]. Из нее следует равенство $\mu(M(0;\delta)) = 1$ для меры, полученной в дальнейших построениях. Как следствие, получаем, что множетво $M(b;\delta)$ при достаточно малом b непусто.

Кривую $I \subset U$ мы будем называть b-неустойчивой, если угол между касательной к кривой I и пространством E^s_x больше, чем b^2.

Пусть I — b-неустойчивая кривая. Определим меру $\widehat{\mu}_I$, которая сосредоточена на кривой I и совпадает с мерой Лебега, т. е. мера всякой кривой $I_1 \subset W$ определяется как $\widehat{\mu}_I(I_1) = \frac{l(I_1)}{l(I)}$, где через $l(\cdot)$ обозначена обычная длина.

В работе [40] доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Существуют константы $N_1 > 0$, $\kappa > 0$ со следующими свойствами.*

Для любых $b_1, b_2 > 0$ существует такое $T_0 > 0$, что для любого $t > T_0$ и для каждой b_2-неустойчивой кривой I найдется множество $\Delta \subset I$, состоящее из непересекающихся отрезков $\Delta_1, \ \ldots, \Delta_m$, таких, что

1. *$\widehat{\mu}_I(\Delta) > (1 - N_0 b_1^\kappa)$;*
2. *для каждого отрезка Δ_j имеет место вложение $\Phi_t(\Delta_j) \subset M(b_1;\delta;T)$;*
3. *$\Phi_t(\Delta_j)$ является b_1-неустойчивой кривой.*

Построение SBR-меры. SBR-мера строится следующим способом.

Пусть I — некоторая кривая, трансверсальная устойчивым многообразиям, $\widehat{\mu}_I$ — мера, сосредоточенная на кривой I и совпадающая на I с мерой Лебега.

Рассмотрим семейство мер

$$\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_t(\widehat{\mu}_I)\, dt.$$

Из теоремы о возвратности следует, что если μ — предельная мера семейства μ_T, то для любого (достаточно малого) $b > 0$ справедливо неравенство

$$\mu(M(b;\delta)) > 1 - N_0 b^\kappa. \tag{3.2}$$

Докажем это неравенство.

Из теоремы о возвратности следует, что для всякой предельной меры μ семейства μ_T, любого $T_0 > 0$ и достаточно малого $b_1 > 0$ верно неравенство

$$\mu(M(b_1;\delta;T_0)) \geqslant (1 - N_1 b_1^{\varkappa}). \tag{3.3}$$

Действительно, если T достаточно велико, то для любого фиксированного $b_1 > 0$

$$\mu_T(M(b_1;\delta;T_0)) \geqslant 1 - N_1 b_1^{\varkappa}.$$

Следовательно, то же самое равенство верно и для предельной меры семейства μ_T (так как для любого замкнутого множества G и любой последовательности мер μ_n, сходящейся к мере μ, справедливо неравенство $\mu(G) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu_n(G)$). Так как множества $M(b_1;\delta;T_0)$ вложены друг в друга, то для любой меры справедливо

$$\lim_{T\to\infty} \mu(M(b_1;\delta;T_0)) = \mu(M(b_1;\delta)).$$

Из неравенства (3.3) следует, что для любой предельной меры семейства μ_t справедливо неравенство (3.2). Тем самым (3.2) доказано.

Основная теорема. В работе [40] доказана следующая теорема о структуре всех SBR-мер.

Теорема 3.3. *Существует конечное число компактных инвариантных множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ (эти множества называются эргодическими компонентами), которые являются подмножествами аттрактора Λ, и инвариантных мер $\mu_1, \ldots, \mu_k$, сосредоточенных на множествах Λ_j, таких, что*

1. *мера μ_j на Λ_j является SBR-мерой;*
2. *поток Φ_t на каждом множестве Λ_j с мерой μ_j эргодичен;*
3. *всякая инвариантная SBR-мера имеет вид $\mu = p_1\mu_1 + \ldots + p_k\mu_k$ с некоторыми коэффициентами $p_1, \ldots, p_k$, $p_j \geqslant 0$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$;*
4. *если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на U, то семейство мер*
$$\nu_T = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \Phi_t \nu \, dt$$
сходится к мере $p_1\mu_1 + \ldots + p_k\mu_k$ с некоторыми коэффициентами $p_1, \ldots, p_k$, $p_j \geqslant 0$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$;
5. *периодические точки всюду плотны в каждом множестве Λ_j;*
6. *траектория почти любой точки $x \in U$ притягивается к одному из множеств Λ_j;*
7. *существуют множества $A_1, \ldots, A_k \subset U$, имеющие полную меру в U, такие, что для любой точки $y \in A_j$ и любой непрерывной функции h имеет место равенство*
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\Phi_t(y)) \, dt = \int_{\Lambda_j} h(x) \, d\mu_j;$$

8. *если множество Λ_j не содержит неподвижных точек, то Λ_j — гиперболический аттрактор;*

9. *если два множества Λ_i, Λ_j имеют общую точку, то каждое из них содержит неподвижную точку.*

Замечание. В качестве дополнения к последней теореме отметим, что энтропия потока Φ_t на множестве Λ_j с мерой μ_j определяется формулой

$$h(\mu_j) = \int_{\Lambda_j} J^u(x)\, d\mu_j.$$

4. Собственные функции и перемешивание

В данном разделе рассматривается поток на одном из множеств Λ_j с мерой μ_j, где λ_j — одно из множеств, определенных в теореме 3.3. Как утверждается в теореме 3.3, поток Φ_t на множестве Λ_j с мерой μ_j эргодичен.

Существенные точки. В дальнейших рассуждениях важную роль играют точки, которые мы будем называть существенными.

Определение 4.1. *Точка $x \in \Lambda_j$ называется b-существенной, если для любой ϵ-окрестности $O_\epsilon(x)$ мера множества $O_\epsilon(x) \cap M(b;\delta)$ положительна.*

Точка называется существенной, если она является b-существенной при некотором $b > 0$.

Множество b-существенных точек $x \in \Lambda_j$ обозначается через Λ_j^b. Через Λ_j^0 обозначается множество всех существенных точек $x \in \Lambda_j$.

Очевидно, что множество Λ_j^b является носителем сужения меры μ_j на множество $M(b;\delta)$.

Множества Λ_j^b обладают следующими свойствами.

1. Если $b > 0$, то множество Λ_j^b замкнуто.

2. Если $b_1 < b_2$, то $\Lambda_j^{b_2} \subset \Lambda_j^{b_1}$

3. Множество Λ_j^0 инвариантно.

4. Если $x \in \Lambda_j^0$, то $W^{uu}(x) \subset \Lambda_j^0$.

5. $\mathrm{clos}(\Lambda_j^0) = \Lambda_j$.

Собственные функции. Собственная функция — это такая функция $\phi(x)$, что для любого t и почти всех $x \in \Lambda_j$ справедливо равенство

$$\phi(\Phi_t(x)) = e^{i\lambda t}\phi(x).$$

Из определения 4.1 видно, что если изменить собственную функцию на множестве меры 0, то она останется собственной функцией.

Известно, что если $\phi(x)$ — собственная функция для эргодического потока, то $|\phi(x)|$ постоянна почти всюду.

Для потока Аносова с гладкой инвариантной мерой известно [16], что собственная функция непрерывна (в том смысле, что ее можно изменить на множестве меры 0 так, что она окажется непрерывной). Для сингулярно гиперболического потока это неверно. Действительно, если собственная функция непрерывна, то на траектории $x(t)$, идущей в неподвижную точку, она равна $\phi(x(0))e^{i\lambda t}$, и поэтому не имеет предела, когда $x(t)$ стремится к неподвижной точке. Следовательно, собственная функция не может быть непрерывной в неподвижной точке.

Имеется следующий аналог непрерывности [41].

Теорема 4.2. *Собственную функцию можно изменить на множестве меры 0 так, что новая функция при любом $b > 0$ непрерывна на множестве Λ_j^b и постоянна на строго устойчивом многообразии и на строго неустойчивом многообразии каждой точки $x \in \Lambda_j^0$.*

Замечание. Отметим, что собственная функция не обязана быть постоянной на строго неустойчивом многообразии точки $x \in \Lambda_j$, если $x \in M(b; \delta)$ не является существенной.

Перемешивание. В работе [16] доказано, что если поток Аносова с гладкой инвариантной мерой не имеет собственных функций, то он является перемешивающим.

Справедлив следующий аналог этого результата для сингулярно гиперболического потока [41].

Теорема 4.3. *Пусть Φ_t — сингулярно гиперболический поток. Если не существует собственной функции на множестве Λ_j с инвариантной SBR-мерой μ_j, то поток является перемешивающим (и изоморфен потоку Бернулли) на множестве Λ_j с инвариантной мерой μ_j.*

Перемешивание для некоторых потоков типа потока Лоренца доказано в [46]. Нижеследующие теоремы обобщают и уточняют эти результаты.

Неподвижная точка называется базисной, если ее устойчивое многообразие содержит существенную точку.

Теорема 4.4. *Если эргодическая компонента Λ_j содержит неподвижную точку, то она содержит базисную неподвижную точку.*

Как следствие этой теоремы получаем, что если неподвижная точка, содержащаяся в эргодической компоненте, единственная, то она базисная. В частности, неподвижная точка потока типа потока Лоренца является базисной.

Следующее утверждение дает достаточное условие перемешивания [41].

Теорема 4.5. *Если одномерная сепаратриса базисной неподвижной точки пересекается со строго устойчивым многообразием какой-либо существенной точки, то поток на множестве Λ_j с мерой μ_j является перемешивающим.*

Теорема 4.6. *Если имеется собственная функция, то ω-предельное множество сепаратрисы базисной неподвижной точки является неподвижной точкой или периодической траекторией, не содержащей существенных точек.*

Отсюда видно, что существование собственной функции — довольно экзотическое свойство. Например, для аттрактора типа аттрактора Лоренца можно доказать следующее.

Теорема 4.7. *Если у аттрактора типа аттрактора Лоренца имеется собственная функция, то аттрактор содержит негрубые лакуны.*

Заметим, что в работе [46] рассмотрена такая модель аттрактора Лоренца, в которой лакуны отсутствуют.

Если аттрактор типа аттрактора Лоренца имеет негрубые лакуны, то все же он, как правило, является перемешивающим. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.8. *Если аттрактор типа аттрактора Лоренца содержит негрубые лакуны, то существует такая замена времени, что полученный аттрактор является аттрактором типа аттрактора Лоренца и имеет собственную функцию.*

Известно [16], что если у потока Аносова с гладкой инвариантной мерой имеется собственная функция, то этот поток является надстройкой над диффеоморфизмом Аносова с постоянным временем возвращения. В случае сингулярно гиперболического потока подобное утверждение формулируется следующим образом.

Теорема 4.9. *Если множество Λ_j не содержит неподвижных точек, то Λ_j — гиперболический аттрактор и имеется альтернатива: либо поток на Λ_j перемешивающий, либо существует собственная функция. Во втором случае поток сопряжен с надстройкой над аттрактором гиперболического диффеоморфизма с постоянным временем возвращения, а собственная функция непрерывна.*

5. Возмущения сингулярно гиперболического потока

5.1. Финальные меры

Метрика в пространстве мер. Пусть K — метрический компакт с метрикой ρ. Обозначим через $C^0(K)$ множество непрерывных функций с нормой $||f|| = \sup_{x\in K}|f(x)|$. Пусть $L > 0$ — некоторая константа. Через $C_L(K)$ обозначим множество функций $f(x) \in C^0(K)$, удовлетворяющих условию Липшица с константой L и неравенству $||f|| \leqslant 1$. Из теоремы Арцелла–Асколи следует, что $C_L(K)$ компактно в $C^0(K)$. Нетрудно показать, что линейное подпространство, порожденное функциями $f(x) \in C_L(K)$, всюду плотно в $C^0(K)$.

На множестве борелевских мер на компакте K определим метрику ρ_L следующим равенством:

$$\rho_L(\mu_1, \mu_2) = \sup_{f\in C_L(K)} \left| \int_K f(x)\,d\mu_1(x) - \int_K f(x)\,d\mu_2(x) \right|.$$

Кроме того, в пространстве борелевских мер на K определена топология, называемая $*$-слабой топологией. Она определяется так, что последовательность мер μ_n сходится к мере μ_0, если для каждой функции $f(x) \in C^0(K)$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f(x)\,d\mu_n(x) = \int_K f(x)\,d\mu_0(x).$$

Хорошо известно, что множество борелевских мер на K является компактным в $*$-слабой топологии. Можно показать, что топология в множестве мер, порожденная метрикой ρ_L, совпадает с топологией $*$-слабой сходимости.

Определение финальной меры. Обозначим через $\mathcal{M}(b_1)$ множество мер на Λ (отметим, что не на Λ_j), таких, что

1. $\mu(M(b;\delta)) > 1 - N_0 b^\kappa$, $b \in (0, b_1)$;

2. сужение меры μ на любую связку является допустимой мерой.

Через $\mathcal{M}_0$ обозначим множество $\cup_{b_1>0}\mathcal{M}(b_1)$.

Отметим, что класс мер $\mathcal{M}_0$ содержит, например, всякую меру, сосредоточенную на единственном локальном строго неустойчивом многообразии $W = W^{uu}_\epsilon(x)$ и являющуюся допустимой.

Мера μ^f называется финальной, если она является пределом (в $*$-слабой топологии) некоторой последовательности мер $\Phi_{t_k}(\mu)$, $t_k \to \infty$, $\mu \in \mathcal{M}_0$.

Множество финальных мер обозначим через $\mathcal{M}^f$. Через $\rho_L(\mu, \mathcal{M}^f)$ обозначим расстояние от меры μ до множества финальных мер, т. е. величину

$$\rho_L(\mu, \mathcal{M}^f) = \sup_{\mu^f \in \mathcal{M}^f} \rho_L(\mu, \mu^f).$$

Теорема 5.1.

1. *Множество инвариантных финальных мер компактно в топологии, определяемой метрикой ρ_L.*

2. *Для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}_0$ справедливо*

$$\lim_{t\to\infty} \rho_L(\Phi_t(\mu), \mathcal{M}^f) = 0,$$

причем сходимость равномерная на каждом множестве $\mathcal{M}(b_1)$.

Вообще говоря, финальная мера не обязана быть инвариантной. Очевидно, что всякая инвариантная финальная мера является SBR-мерой. Если поток перемешивающий, то всякая финальная мера инвариантна (следовательно, является SBR-мерой).

Из определения сингулярно гиперболического потока через конусы видно, что свойство потока быть сингулярно гиперболическим сохраняется при возмущениях. Далее мы обсудим вопросы о сохранении некоторых свойств потока при возмущениях.

5.2. Непрерывная зависимость инвариантных мер от потока

Обозначим множество SBR-мер через $\mathcal{M}^{\mathcal{SBR}}$.

Теорема 5.2. *Пусть последовательность векторных полей $X_n(x)$ сходится в C^1-топологии к векторному полю $X(x)$, причем все векторные поля $X_n(x)$ равномерно ограничены в C^2-топологии. Обозначим через $\mathcal{M}_n^{SBR}$ множество SBR-мер, соответствующих векторному полю $X_n(x)$. Пусть μ — предельная точка последовательности мер $\mu_n \in \mathcal{M}_n^{SBR}$. Тогда $\mu \in \mathcal{M}^{SBR}$.*

Доказательство теоремы основано на следующих утверждениях.

1. Константы c_1, c_2, c_3, γ_1, γ_2, γ_3, участвующие в определении сингулярно гиперболического потока, можно выбрать одинаковыми для потока, порожденного векторным полем $X(x)$, и для потоков, порожденных векторными полями $X_n(x)$.

2. Пусть $M(b;\delta)$, $M_n(b;\delta)$ — множества, определенные выше (формула (2.3)) для, соответственно, векторного поля $X(x)$ и векторных полей $X_n(x)$. Если последовательность точек $x_n \in M_n(b;\delta)$ сходится к точке x, то $x \in M(b;\delta)$. Соответственно, последовательность строго неустойчивых многообразий $W_n^{uu}(x_n)$ сходится в C^1-топологии к многообразию $W^{uu}(x)$.

Определим на многообразиях $W_n^{uu}(x_n)$, $W^{uu}(x)$ соответствующие условные меры $\mu_{n,W}$, μ_W. Тогда последовательность мер $\mu_{n,W}$ сходится к мере μ_W в топологии, порожденной метрикой ρ_L.

3. При условиях предыдущего пункта для любого $T > 0$ последовательность мер $\Phi_{T,n}(\mu_{W,n})$ сходится к мере $\Phi_T(\mu_W)$.

4. Для каждого $b > 0$ сходимость (в метрике ρ_L) $\Phi_T(\mu_W) \to \mathcal{M}^f$ равномерная по всем $W = W(x) \subset M(b;\delta)$.

5. Сходимость семейства

$$\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_t(\mu)\,dt$$

к множеству $\mathcal{M}^{\mathcal{SBR}}$ равномерная в метрике ρ_L по всем мерам $\mu \in \mathcal{M}^f$.

Количество эргодических компонент при возмущении Покажем, что при возмущении потока количество эргодических компонент не увеличивается.

Действительно, пусть последовательность векторных полей $X_n(x)$ сходится к векторному полю $X(x)$. Если $\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}$ — эргодические меры для потока, порожденного векторным полем $X_n(x)$, то найдутся замкнутые множества $M_1^{(n)}, \ldots, M_m^{(n)}$, такие, что эти множества находятся друг от друга на расстоянии, ограниченном снизу некоторой константой ϵ_0 и $\mu_j^{(n)}(M_j^{(n)}) > \frac{9}{10}$. В качестве этих множеств можно рассмотреть множества $M_n(b;\delta) \cap \Lambda_j^{(n)}$ при подходящем выборе b. Если n_k — такая последовательность, что каждая мера $\mu_j^{(n_k)}$ сходится, то предельные меры будут таковы, что их сужения на множество $M(b;\delta)$ попарно сингулярны. Следовательно, количество эргодических компонент у потока, порожденного векторным полем $X(x)$, будет не менее m. Поэтому количество эргодических компонент у предельного потока может только увеличиться.

В частности, если предельный поток эргодический, то и все потоки, порожденные векторными полями $X_n(x)$ при достаточно больших n, эргодические. Следовательно, достаточно малое возмущение сингулярно гиперболического эргодического потока является эргодическим.

Имеются примеры, в которых количество эргодических компонент при возмущении уменьшается. В этих примерах множества Λ_1, Λ_2 имеют общие точки.

Можно показать, что если эргодические компоненты $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ являются аттракторами (т. е. существуют такие открытые множества $U_1, \ldots, U_m$, что $\Lambda_j = \cap_{t>0}\Phi_t(U_j)$), то количество эргодических компонент при возмущении сохраняется.

Устойчивость перемешивания. Аналогично определению перемешивающей неподвижной точки, приведем определение устойчиво перемешивающей неподвижной точки.

Неподвижная точка Q называется устойчиво перемешивающей, если ее устойчивое многообразие содержит существенную точку и обе неустойчивые сепаратрисы содержат точки, принадлежащие строго устойчивым многообразиям существенных точек.

Согласно теореме о перемешивании, если все неподвижные точки являются устойчиво перешивающими, то поток является перемешивающим на каждой эргодической компоненте, содержащей неподвижную точку.

Теорема 5.3. *Если все неподвижные точки сингулярно гиперболического потока являются устойчиво перемешивающими, то каждая эргодическая компонента, содержащая неподвижную точку, является устойчиво перемешивающим аттрактором.*

Инвариантное множество Λ называется перемешивающим аттрактором, если на множестве Λ поток является перемешивающим (относительно SBR-меры) и существует такое открытое множество $U_0 \supset \Lambda$, что $\Lambda = \cap_{t>0}\Phi_t(U_0)$.

В заключение с удовольствием выражаю благодарность С. В. Гонченко за полезные замечания.

Список литературы

[1] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР, 1937, т. 14, вып. 5, с. 247–250.

[2] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Докл. АН СССР, 1937, т. 14, вып. 5, с. 251–257.

[3] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Докл. АН СССР, 1955, т. 103, вып. 4, с. 557–560.

[4] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. Е., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.

[5] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. Е., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1966. 488 с.

[6] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology, 1962, vol. 1, pp. 101–120;
Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds: A futher remark // Topology, 1963, vol. 2, pp. 179–180.

[7] Леонтович Е. А., О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы // Докл. АН СССР, 1951, т. 78, вып. 4, с. 444–448.

[8] Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Матем. сб., 1963, т. 61, № 4, с. 433–466.

[9] Шильников Л. П. Случай существования бесконечного множества периодических движений // Докл. АН СССР, 1965, т. 6, с. 163–166.

[10] Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло // Матем. сб., 1968, т. 77, № 3, с. 461–472.

[11] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб., 1970, т. 81, № 1, с. 92–113.

[12] Robinson C. Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type // Nonlinearity, 1989, vol. 2, no. 4, pp. 495–518.

[13] Rychlik M. Lorenz attractors through Šil'nikov-type bifurcation: 1 // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1990, vol. 10, no. 4, pp. 793–821.

[14] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы // УМН, 1981, т. 36, № 4, с. 191–241.

[15] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Марсден Дж., Мак Кракен М., Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с. С. 317–335.

[16] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967. 210 с.

[17] Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы // УМН, 1967, т. 22, № 5, с. 107–172.

[18] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmosph. Sci., 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–141.

[19] Saltzman B. Finite amplitude free convectiions as an initial value problem: 1 // J. Atmosph. Sci., 1962, vol. 19, no. 2, pp. 329–341.

[20] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // Докл. АН СССР, 1977, вып. 234, № 2, с. 336–339.

[21] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Моск. матем. об-ва, 1982, т. 44, с. 150–212.

[22] Guckenheimer J. A strange, strange attractor // Marsden J. E., McCraken M. The Hopf bifurcation and its application. New York: Springer, 1976. 408 p.

[23] Guckenheimer J., Williams R. F. Structural stability of Lorenz attractors // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1979, vol. 50, pp. 59–72.

[24] Yorke J. A., Yorke E. D. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic oscillations in a model of Lorenz // J. Stat. Phys., 1979, vol. 21, pp. 263–277.

[25] Kaplan J. L., Yorke J. A. Preturbulence: A regime observed in a fluid flow model of Lorenz // Comm. Math. Phys., 1979, vol. 67, pp. 93–108.

[26] Sparrow C. The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors. New York: Springer, 1982. 270 p.

[27] Бунимович Л. А., Синай Я. Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // Нелинейные волны / А. В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С. 212–226.

[28] Tucker W., A rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem // Found. Comp. Math., 2002, vol. 2, no. 1, pp. 53–117.

[29] Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds. (Lecture Notes in Math., vol. 583.) Berlin: Springer, 1977. 149 p.

[30] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и проблема периодических возмущений аттракторов типа аттрактора Лоренца // Докл. РАН, 2008, т. 418, № 1, с. 23–27.

[31] Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН, 1972, т. 27, вып. 4, с. 21–64.

[32] Кифер Ю. И. О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1974, т. 38, № 5, с. 1091–1115.

[33] Bowen R. Symbolic dynamics for hyperbolic flows // Amer. J. Math., 1973, vol. 95, pp. 429–459.

[34] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб., 1998, т. 189, № 2, с. 137–160.

[35] Shilnikov L. P. Bifurcations and strange attractors // Proc. of the Internat. Congr. of Mathematicians (Beijing, 2002): Vol. 3. Beijing: Higher Ed. Press, 2002. P. 349–372.

[36] Morales C. A., Pacifico M. J., Pujals E. R. On C^1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 Math., 1998, vol. 326, no. 1, pp. 81–86.

[37] Morales C. A., Pacifico M. J., Pujals E. R. Singular-hyperbolic systems // Proc. Amer. Math. Soc., 1999, vol. 127, no. 11, pp. 3393–3401.

[38] Morales C. A., Pacifico M. J., Pujals E. R. Robust transitive singular sets for 3-flows are partially hyperbolic attractors or repellers // Ann. of Math.(2), 2004, vol. 160, № 2, pp. 375–432.

[39] Сатаев Е. А. Некоторые свойства сингулярно гиперболических потоков // Матем. сб., 2009, т. 200, № 1, с. 37–80.

[40] Сатаев Е. А. Инвариантные меры для сингулярно гиперболических потоков // Матем. сб., 2010, т. 201, № 3, с. 107–160.

[41] Сатаев Е. А. Свойство перемешивания для сингулярно гиперболических потоков (готовится к печати).

[42] Pesin Ya. B. Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity. Zürich: EMS, 2004. 122 p. [Песин Я. Б. Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности. М.: МЦНМО, 2006. 144 с.]

[43] Pesin Ya. B. Dynamical systems with generalised hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1992, vol. 12, no. 1, pp. 123–151.

[44] Сатаев Е. А. Гиббсовские меры для одномерных аттракторов гиперболических отображений с особенностями // Изв. РАН. Сер. матем., 1992, т. 56, вып. 6, с. 1328–1344.

[45] Araujo V., Pacifico M. J., Pugals E. R., Viana M. Singular-hyperbolic attractors are chaotic // Trans. Amer. Math. Soc., 2009, vol. 361, no. 5, pp. 2431–2485.

[46] Luzzatto S., Melbourn I., Paccaut F. The Lorenz attractor is mixing // Comm. Math. Phys., 2005, vol. 260, no. 2, pp. 393–401.

[47] Holland M., Melbourn I. Central limit theorems and invariance principles for Lorenz attractors // J. Lond. Math. Soc.(2), 2007, vol. 76, no. 2, pp. 345–364.

[48] Сатаев Е. А. Инвариантные меры для гиперболических отображений с особенностями // УМН, 1992, т. 47, № 1, с. 147–202.

[49] Сатаев Е. А. Отсутствие устойчивых решений у неавтономных возмущений систем типа систем Лоренца // Матем. сб., 1995, т. 196, вып. 4, с. 99–134.

[50] Shilnikov A. L., Shilnkov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1993, vol. 3, no. 5, pp. 1123–1139.