УДК 517.9

О сосуществовании гомоклинических и периодических траекторий

В. В. Федоренко, А. Н. Шарковский
Институт математики НАН Украины
01601, Украина, Киев-4, ул. Терещенковская, 3
vfedor@imath.kiev.ua, asharkov@imath.kiev.ua

Получено 22 декабря 2009 г.

Исследуются вопросы сосуществования разных типов гомоклинических и периодических траекторий для динамических систем, порожденных непрерывными отображениями отрезка в себя.

Ключевые слова: гомоклиническая траектория, тип периодической траектории, цикл, циклическая перестановка

V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovsky
On coexistence of homoclinic and periodic trajectories

The coexistence of different types of homoclinic and periodic trajectories for dynamical systems generated by continuous maps of interval into itself is investigated.

Keywords: homoclinic trajectory, type of periodic trajectory, cycle, cyclic permutation
Mathematical Subject Classification 2000: 37E15

1. Введение

Проблема сосуществования периодических траекторий в одномерных динамических системах к настоящему времени изучена весьма глубоко и даже привела, как известно, к появлению в топологической динамике нового направления — комбинаторной динамики.

Важную роль в динамике траекторий играют, наряду с периодическими, также гомоклинические траектории, наличие которых в динамической системе свидетельствует о присутствии в системе траекторий с очень сложным поведением. Как хорошо известно, для многомерных динамических систем проведены глубокие исследования гомоклинических траекторий, и, в частности, получено много полезных для приложений результатов (см. [1] и приведенные там ссылки). Вопрос о сосуществовании периодических и гомоклинических траекторий, как и весьма важный вопрос об участии гомоклинических траекторий в качественных перестройках в одномерных динамических системах исследованы значительно меньше, и эта статья призвана в какой-то мере восполнить этот пробел.

В настоящей работе рассматриваются некоторые особенности сосуществования периодических и гомоклинических траекторий динамических систем, порожденных непрерывными отображениями отрезка. Эти особенности связаны, в первую очередь, с линейным порядком на отрезке, что позволяет существенно уточнить классификацию периодических траекторий по периодам, если учитывать взаимное расположение точек цикла. Кроме того, при этом необходимо рассматривать только необратимые отображения, поскольку обратимые отображения отрезка гомоклинических траекторий не имеют.

Пусть I — замкнутый интервал и $f \in C^0(I, I)$. Напомним необходимые нам известные результаты.

Как обычно, траекторию динамической системы, отличную от периодической, называем гомоклинической, если α-предельное и ω-предельное множества траектории совпадают и представляют собой цикл. Конечно, при этом цикл должен иметь непустые устойчивое и неустойчивое «многообразия», т. е. быть седлового типа. Однако в случае одномерного пространства здесь возникают существенные особенности: для гладких отображений такая ситуация возможна либо когда цикл отталкивающий (его мультипликатор больше 1), но прообраз цикла содержит не только сам этот цикл (благодаря чему устойчивое «многообразие» цикла не пусто), либо цикл полупритягивающий-полуотталкивающий (мультипликатор цикла равен 1); последний случай, возникающий при тангенциальной бифуркации, является исключительным.

Естественно, что сосуществование гомоклинических и периодических траекторий тесно связано с сосуществованием циклов, которое описывается следующим порядком во множестве натуральных чисел [2]: *если отображение имеет цикл периода* n*, то оно имеет и цикл с любым периодом* n'*, если* $n \succ n'$*, где*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \ldots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ \ldots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ \ldots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \qquad (*)$$

Как известно [3,4], *отображение имеет гомоклиническую траекторию тогда и только тогда, когда у отображения есть цикл периода* $\neq 2^i, i = 0, 1, 2, \ldots$.

Это утверждение можно уточнить следующим образом [5]: *если отображение имеет цикл периода* $n \neq 2^i, i = 0, 1, 2, \ldots$*, то отображение имеет и гомоклиническую траекторию, притягиваемую некоторым циклом периода* n.

В одномерных динамических системах для описания сосуществования гомоклинических траекторий в [6] предложена следующая классификация гомоклинических траекторий:

гомоклиническую траекторию, притягиваемую циклом периода n, назовем n-гомоклинической или $2n$-гомоклинической в зависимости от того, существует ли у цикла точка, к которой гомоклиническая траектория приближается, когда время стремится к $-\infty$ только с одной стороны, или такой точки нет.

Сосуществование гомоклинических траекторий описывается в [6] таким образом: *если отображение имеет n-гомоклиническую траекторию, то оно имеет и n'-гомоклиническую траекторию, если $n \triangleright n'$, где «$\triangleright$» — следующий порядок во множестве натуральных чисел*

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \ldots \triangleright 2 \cdot 1 \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \ldots \triangleright 2^2 \cdot 1 \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \ldots . \qquad (**)$$

Отличие $(**)$ от $(*)$ состоит в том, что все степени двойки «перекочевывают» в соответствующие блоки, порожденные нечетными числами, где становятся самыми «сильными», в частности, самым «сильным» из всех чисел становится 1.

2. Гомоклинические траектории к циклам различных типов

Во введении циклы различались по периоду. Ниже используется более детальная классификация циклов — классификация по типам.

Если цикл B отображения f состоит из точек $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n$ и $f(\beta_i) = \beta_{s_i}$, $1 \leqslant s_i \leqslant n$, $i = 1, \ldots, n$, то циклическую перестановку $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{pmatrix}$ назовем типом цикла B.

Тип цикла позволяет, используя стандартную процедуру (см., например, [7]), перейти от отображения f к символической динамике и получить важные свойства самого отображения. Вначале опишем эту процедуру, а затем перейдем к вопросу о существовании гомоклинических траекторий к циклам различных типов.

На интервалах $J_i = [\beta_i, \beta_{i+1}], i = 1, \ldots, n-1$, в силу непрерывности, отображение f обладает свойством

$$f(J_i) \supseteq \begin{cases} J_{s_i} \cup \ldots \cup J_{s_{i+1}-1}, & \text{если} \quad s_i < s_{i+1}, \\ J_{s_{i+1}} \cup \ldots \cup J_{s_i - 1}, & \text{если} \quad s_i > s_{i+1}. \end{cases}$$

Поэтому циклу типа π можно поставить в соответствие матрицу переходов с элементами μ_{is}, где

$$\mu_{is} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f(J_i) \not\supset J_s, \\ 1, & \text{если} \quad f(J_i) \supset J_s, \end{cases}$$

а также ориентированный граф накрытий с вершинами $J_1, \ldots, J_{n-1}$ и ориентированными ребрами, которые соединяют J_i и J_s, если $f(J_i) \supset J_s$.

Для каждой последовательности $J_{r_1}, J_{r_2}, \ldots, J_{r_j} J_{r_{j+1}}, \ldots$ $(1 \leqslant r_j \leqslant n-1)$, состоящей из элементов $J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}$, которая допускается матрицей переходов ($\mu_{r_j r_{j+1}} = 1$ для $j = 1, 2, \ldots$), или соответствующего пути в графе накрытий, найдется (по крайней мере одна) траектория отображения, которая проходит по интервалам $J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}$ в порядке $J_{r_1} \to J_{r_2} \to \ldots \to J_{r_j} \to J_{r_{j+1}} \to \ldots$. Более того, если последовательность периодическая, то существует и периодическая траектория, соответствующая этой последовательности.

По матрице переходов или графу накрытий строится топологическая марковская цепь, полусопряженная с исходным отображением. Исследование матрицы переходов, графа накрытий или топологической марковской цепи даёт много информации о свойствах исходного отображения в целом, но мы ограничимся здесь лишь периодическими и гомоклиническими траекториями — во множестве циклических перестановок выделим те, которые гарантируют наличие гомоклинических траекторий к циклам соответствующих им типов. Такая постановка вопроса требует пояснений.

Как известно, для гладких одномерных отображений возможны только два типа бифуркаций циклов: тангенциальные и бифуркации удвоения периода (см., например, [7]). При бифуркации удвоения периода рождается только один цикл и притом притягивающий, так что гомоклинических к нему быть не может. При тангенциальной бифуркации рождаются два цикла одного и того же типа, один притягивающий, а второй отталкивающий, к которому, следовательно, гомоклиническая может и существовать. Оказывается, что появление «тангенциальных» циклов гарантирует и появление гомоклинических траекторий к какому-либо циклу того же типа (более того, в момент бифуркации, когда родившийся цикл еще не успел распасться на два цикла, возникает континуальное семейство гомоклинических траекторий к этому циклу). Поэтому целесообразно выяснить, чем различаются перестановки, отвечающие циклам, которые возникают при этих двух бифуркациях.

Рассмотрим свойства перестановки, отвечающей циклу, который возникает при бифуркации удвоения периода. Пусть точки $\beta_1' < \ldots < \beta_n'$ образуют исходный цикл B', а точки $\beta_1 < \ldots < \beta_{2n}$ — цикл, рождающийся из цикла B' при бифуркации удвоения периода. В таком случае, как известно, $\beta_i' \in (\beta_{2i-1}, \beta_{2i}), i = 1, 2, \ldots, n$ (ибо мультипликатор цикла B' при этом отрицателен (и даже < -1)). Поэтому, если π' и π — перестановки, отвечающие циклу B' и, соответственно, циклу удвоенного периода, то

$$\pi(2i-1), \pi(2i) \in \{2\pi'(i) - 1, 2\pi'(i)\}, \tag{1}$$

и вообще,

$$\pi^k(2i-1), \pi^k(2i) \in \{2\pi'^{\,k}(i) - 1, 2\pi'^{\,k}(i)\},$$

так что

$$\pi^k(\{2i-1, 2i\}) = \{2\pi'^{\,k}(i) - 1, 2\pi'^{\,k}(i)\}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

В частности,

$$\pi^n(\{2i-1, 2i\}) = \{2\,i - 1, 2\,i\},$$

ибо $\pi'^{\,n}(i) = i$, и

$$\pi^n(2\,i-1) = 2\,i\ , \quad \pi^n(2\,i) = 2\,i - 1\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

ибо π — циклическая перестановка длины $2\,n$, а не n. Более того, можно показать, что верно и обратное: из свойства (3) следует свойство (1).

Множество, состоящее из циклических перестановок, обладающих свойством (3), обозначим Σ.

Легко показать, что отображение, которое имеет цикл типа $\pi \in \Sigma$ длины $2n$, имеет и цикл типа π' длины n, обладающий свойством (1). Действительно, из свойства (2) перестановки $\pi \in \Sigma$ следует, что соответствующий ей граф накрытий имеет замкнутый путь $J_1 \to J_{\pi(1)} \to \ldots \to J_{\pi^j(1)} \to J_{\pi^{j+1}(1)} \to \ldots \to J_{\pi^{n-1}(1)} \to J_1$. Существование этого пути гарантирует (в силу непрерывности отображения) наличие цикла типа π' длины n.

Имеет место такое утверждение: *для любой перестановки $\pi \in \Sigma$ существует отображение $f \in C^0(I, I)$, которое имеет цикл типа π и не имеет гомоклинических траекторий к циклам типа π.*

Наиболее простым примером этому может служить отображение, имеющее цикл типа $\pi \in \Sigma$, состоящий из точек $\beta_1 = 0 < \beta_2 < \ldots < \beta_{2n} = 1, n > 2$, которое является линейным на каждом из интервалов $[\beta_i, \beta_{i+1}], i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Отображения, имеющие циклы типа $\pi \notin \Sigma$, всегда имеют и гомоклиническую траекторию к некоторому циклу типа π. Детальное исследование свойств таких отображений и циклических перестановок, не принадлежащих множеству Σ, будет предметом отдельной работы. В следующих двух разделах рассматриваются два специальных подкласса перестановок, для которых ответы на вопросы существования и сосуществования гомоклинических траекторий к циклам различного типа могут быть получены наиболее просто. Эти перестановки порождаются циклами так называемых максимального и минимального типов.

3. Гомоклинические траектории к циклам максимального типа

Подстановки π_1 и π_2 длины n назовем симметричными, если $\pi_1(i) = n - \pi_2(n-i+1)+1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (симметричная перестановка часто совпадает с обратной).

Циклическую перестановку $\pi_n, n \geqslant 3$, вида

$$\pi_n = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & n-1 & n \\ 2 & \ldots & i+1 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

и симметричную ей будем называть максимальными. Цикл, тип которого — максимальная перестановка, будем называть максимальным.

Выясним свойства отображений, которые имеют максимальный цикл типа (4) (свойства отображений, имеющих цикл, которому отвечает перестановка, симметричная перестановке (4), аналогичны).

Граф накрытий, соответствующий циклу типа (4), представлен на рис. 1. Он содержит подграф, представленный на рис. 2. Этот подграф является графом накрытий

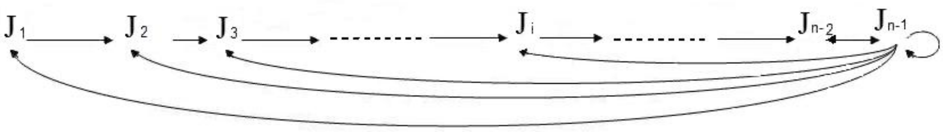

Рис. 1

максимального цикла периода $n-1$, а также содержит и подграф, который является графом накрытий цикла периода 3. Поэтому соответствующие отображения обладают нижеследующими свойствами.

Свойство 1. Если отображение имеет максимальный цикл периода $n \geqslant 4$, то оно имеет и

а) циклы всех периодов,

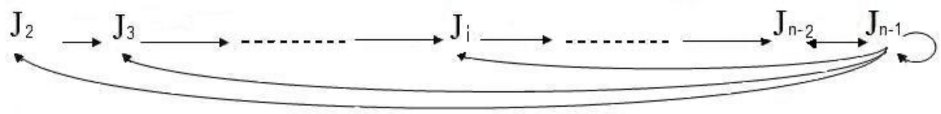

Рис. 2

б) максимальные циклы периодов $< n$.

Это свойство отчасти объясняет термин максимальный цикл: наличие у отображения максимального цикла гарантирует наличие у него циклов любого периода. Заметим также, что для логистического отображения $x \mapsto \lambda x(1-x), \lambda \in [0,4]$ (как и для достаточно широких классов одномерных отображений) рождение максимального цикла периода n гарантирует при дальнейшем увеличении параметра λ рождение циклов только большего периода.

Свойство 1 можно рассматривать как дополнительную информацию к теореме о сосуществовании циклов различных периодов, представленную в начале работы.

С в о й с т в о 2. Если отображение имеет максимальный цикл периода $n \geqslant 3$, *то существуют* $n+2$ *точки, ограничение отображения на которые эквивалентно подстановке*

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & n-2 & n-1 & n & n+1 & n+2 \\ 2 & \dots & i+1 & \dots & n-1 & n+2 & n+1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Это вытекает из того, что ограничение σ_n на множество $\{1, 2, \dots, n-1, n+2\}$ эквивалентно перестановке (4). Кроме того, поскольку интервал между предпоследней и последней точками цикла типа (4) при отображении накрывает себя, то в нем можно выбрать точку, являющуюся прообразом предпоследней точки цикла, а также ее прообраз, которым соответствуют элементы n и $n+1$ подстановки (5).

Свойство 2 гарантирует наличие у отображения гомоклинической траектории, скажем Γ, к максимальному циклу B периода $n \geqslant 3$; при этом точки, соответствующие элементам n и $n+1$ подстановки (5), принадлежат Γ, а $supp\ \Gamma \subset supp\ B$ ($supp\ M = [\inf\{x \in M\}, \sup\{x \in M\}]$, когда $M \subset I$).

С в о й с т в о 3. Если отображение имеет максимальный цикл периода $n+1, n \geqslant 3$, *то существуют* $2n+1$ *точки, ограничение отображения на которые эквивалентно подстановке*

$$\delta_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & 2n-5 & 2n-4 & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n & 2n+1 \\ 3 & \dots & i+2 & \dots & 2n-3 & 2n-1 & 2n & 2n+1 & 2n & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Доказательство свойства 3 аналогично доказательству свойства 2 и следует из структуры подстановки δ_n. Действительно, если отображение f имеет максимальный цикл периода $n+1$, то согласно свойству 1 у f имеется и максимальный цикл периода n. Ограничение отображения f на этот цикл эквивалентно ограничению подстановки δ_n на множество $\{2, \delta_n(2), \dots, \delta_n^i(2), \dots, \delta_n^{n-1}(2)\}$. Из вида графа накрытий максимального цикла периода $n+1$ следует существование $n+1$ точек, отличных от периодических, которые являются последовательными прообразами предпоследней точки построенного максимального цикла периода n. Этим точкам соответствуют остальные $n+1$ элементов подстановки δ_n.

Как и свойство 2, свойство 3 гарантирует наличие у отображения гомоклинической траекторий Γ к максимальному циклу B периода $n \geqslant 3$, при этом точки интервала I, соответствующие элементам 1 и $2n+1$ подстановки (6), принадлежат гомоклинической траектории Γ, а $supp\ \Gamma \supset supp\ B$. Этим такая гомоклиническая траектория отличается от гомоклинических траекторий, существование которых следовало из свойства 2.

Введем понятие внутренней и внешней гомоклинической траектории.

Гомоклиническую траекторию Γ *к циклу* B *назовем внутренней, если* $supp\ \Gamma \subset$ $\subset supp\ B$. Естественно, внутренних гомоклинических траекторий к неподвижной точке быть не может.

Гомоклиническую траекторию Γ *к циклу* B *назовем внешней, если* $supp\ \Gamma \supset supp\ B$.

Резюмируем вышесказанное в виде следующих теорем.

Т е о р е м а 1. *Если* B — *максимальный цикл и* $suppB$ *не содержит других максимальных циклов того же периода, то существует внутренняя гомоклиническая траектория к циклу* B.

Т е о р е м а 2. *Если* B — *максимальный цикл периода* $n > 3$, *то* $suppB$ *содержит максимальный цикл периода* $n-1$ *и внешнюю к нему гомоклиническую траекторию.*

Напомним, что замкнутый интервал J называется периодическим для отображения f, если существует такое n, что интервалы $f^i(J), i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, попарно не пересекаются и $f^n(J) \subseteq J$.

Т е о р е м а 3. *Если* $f_\lambda, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, — *семейство* C^0*-отображений, непрерывно зависящее от* λ, *и* f_{λ_1} *имеет максимальный цикл периода* $n+1$, *а* f_{λ_2} *имеет максимальный цикл периода* n, *но не имеет внешней к нему гомоклинической траектории, то существует* $\lambda' \in [\lambda_1, \lambda_2)$, *такое, что при* $\lambda \in [\lambda', \lambda_2)$ f_λ *имеет цикл интервалов периода* n, *примыкающий к максимальному циклу периода* n.

Для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть n-е итерации f и δ_n и воспользоваться рассуждениями, приведенными выше для подстановок (5) и (6).

4. Гомоклинические траектории к неподвижным точкам

Выше рассматривались гомоклинические траектории к циклам; в этом разделе рассмотрим гомоклинические траектории к неподвижным точкам. Некоторые различия в свойствах гомоклинических к неподвижным точкам связаны в основном с различиями в поведении отображения в окрестности неподвижной точки (см., например, классификацию неподвижных точек, представленную в работе [8]).

Будем говорить, что цикл B вложен в цикл B', если $supp\ B \subset supp\ B'$.

Т е о р е м а 4. *Для непрерывного отображения интервала в себя следующие утверждения эквивалентны:*

1) существуют три точки, ограничение отображения на которые эквивалентно подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *или симметричной ей;*

2) отображение имеет бесконечную последовательность вложенных друг в друга максимальных циклов возрастающих периодов;

3) отображение имеет 1-гомоклиническую траекторию.

Заметим, что существуют отображения, имеющие максимальные циклы всех периодов, но не имеющие гомоклинических траекторий к неподвижным точкам — важно взаимное расположение максимальных циклов (например, негладкое отображение может иметь счетное число попарно непересекающихся инвариантных интервалов $I_n, n \geqslant 1$, на каждом из которых есть максимальные циклы периодов до n включительно и других максимальных циклов нет).

В работе [2] введено понятие L-схемы: отображение f задает L-схему на точках $\alpha < \beta < \gamma$, если $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) \geqslant \gamma, f(\gamma) \leqslant \alpha$. Очевидно, что существование L-схемы эквивалентно утверждению 1) теоремы 4. Отметим также, что линейный порядок во множестве натуральных чисел (∗∗), который характеризует сосуществование n-гомоклинических траекторий, описывает и сосуществование L-схем у различных итераций отображения [9].

Доказательство теоремы 4. 1) => 2). Из утверждения 1) следует существование точек $\alpha < \beta < \gamma$ (или $\alpha > \beta > \gamma$), таких, что $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \gamma$ и $f(\gamma) = \alpha$. Пусть $J_1 = [\alpha, \beta]$ и $J_2 = [\beta, \gamma]$, тогда $f(J_1) \supseteq J_1 \cup J_2$ и $f(J_2) \supseteq J_1 \cup J_2$. Можно считать, что α — наибольшая неподвижная точка на интервале J_1 (если $\widetilde{\alpha}(> \alpha)$ — наибольшая неподвижная точка на J_1, то следует рассматривать интервал $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}]$, где $\widetilde{\gamma} = f^{-1}(\widetilde{\alpha}) \in J_2$).

Положим $\beta_i = \min\{x \in J_1, f^i(x) = \beta\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\beta_0 = \beta > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_i > \ldots \to \alpha$, $f(\beta_i) = \beta_{i-1}$, $f[\beta_1, \beta_0] \supset J_2$ и $f^i[\beta_i, \beta_{i-1}] \supset J_2$.

Положим $\gamma_i = \max\{x \in J_2, f(x) = \beta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_i < \ldots \to \gamma$, $f[\gamma_i, \gamma_{i+1}] \supset [\beta_{i+1}, \beta_i]$ и $f^{i+2}[\gamma_i, \gamma_{i+1}] \supset [\gamma_i, \gamma_{i+1}]$. Следовательно, на интервале $[\gamma_i, \gamma_{i+1}]$ существует точка, скажем, α_i^*, принадлежащая циклу периода $i + 2$, и при этом $\alpha_i = f(\alpha_i^*) \in [\beta_{i+1}, \beta_i]$, $f^j(\alpha_i) \in [\beta_{i-j+1}, \beta_{i-j}], j = 1, 2, \ldots i$. Это означает, что на интервале $[\alpha_i, \alpha_i^*]$ имеется максимальный цикл периода $i + 2$. Так как $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ и $\alpha_{i+1}^* > \alpha_i^*$ для каждого $i \geqslant 1$, то мы имеем последовательность вложенных друг в друга максимальных циклов возрастающих периодов.

2) => 3). Пусть $B_i, i \geqslant 3$, — последовательность вложенных друг в друга максимальных циклов возрастающих периодов. Положим $\alpha_i = \min\{x \in B_i\}$ и $\gamma_i = \max\{x \in B_i\}$; очевидно, $f(\gamma_i) = \alpha_i$. Поскольку $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ при всех i, то существует $\alpha = \lim_{i\to\infty} \alpha_i$; поскольку $f(\alpha_i) - \alpha_i \to 0$, когда $i \to \infty$, то $f(\alpha) = \alpha$. Так как $\gamma_{i+1} > \gamma_i$ при всех i, то существует $\gamma = \lim_{i\to\infty} \gamma_i$.

Пусть $P = \bigcup_i B_i$ — множество всех точек циклов B_i и $\Gamma = \bigcup_i \gamma_i$. Множество $\Gamma_1 = f^{-1}(\Gamma) \cap P$ — это счетное множество, состоящее из периодических точек, прообразов точек γ_i; оно имеет по крайней мере одну (на самом деле, только одну) предельную точку. Выберем какое-либо подмножество $\widetilde{\Gamma}_1 \subset \Gamma$, имеющее одну предельную точку, скажем, $\widetilde{\gamma}_1$; очевидно, $f(\widetilde{\gamma}_1) = \gamma$. Множество $\Gamma_2 = f^{-1}(\widetilde{\Gamma}_1) \cap P$ — счетное множество и, следовательно, имеет по крайней мере одну предельную точку; выберем какое-либо подмножество $\widetilde{\Gamma}_2 \subset \Gamma_2$, имеющее одну предельную точку, скажем, $\widetilde{\gamma}_2$; очевидно, $f(\widetilde{\gamma}_2) = \widetilde{\gamma}_1$ и $\widetilde{\gamma}_2 < \widetilde{\gamma}_1$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $\widetilde{\gamma}_1 > \widetilde{\gamma}_2 > \ldots > \widetilde{\gamma}_i > \ldots \to \alpha$, где $f(\widetilde{\gamma}_{i+1}) = \widetilde{\gamma}_i$; точки $\widetilde{\gamma}_i$ вместе с точкой γ образуют гомоклиническую траекторию к неподвижной точке α.

3) => 1). Пусть последовательность $x_i, i \in \mathbb{Z}$, является 1-гомоклинической траекторией к некоторой неподвижной точке α. Тогда существует $i_0 \in \mathbb{Z}$, такое, что при всех $i < i_0$ либо $x_i > \alpha$, либо $x_i < \alpha$. Рассмотрим только первый случай (доказательство во втором случае аналогично). Не умаляя общности, можно считать, что x_{i_0} — наибольшая точка этой траектории.

Поскольку α-предельное множество траектории состоит из одной точки α, то существует последовательность $i_k \to -\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $x_{i_k} < x_{i_{k-1}}$ и $f(x_{i_k}) \geqslant x_{i_{k-1}}$. Интервалы $I_k = [\alpha, x_{i_k}], k = 0, 1, 2, \ldots$, обладают следующим свойством: $I_k \subset I_{k-1}$ и $f(I_k) \supset I_{k-1}$ при каждом $k \geqslant 1$.

Существуют две возможности: а) у точки α есть прообраз на интервале $(\alpha, x_{i_0}]$, б) у α нет прообразов на интервале $(\alpha, x_{i_0}]$.

а) Обозначим γ прообраз точки α на интервале $(\alpha, x_{i_0}]$. Найдутся такое $k' \geqslant 1$, что $\gamma \in \in I_{k'-1} \setminus I_{k'}$, и такая точка $\beta \in I_{k'}$, что $f(\beta) = \gamma$. Поскольку $\alpha < \beta < \gamma$, то эти три точки образуют L-схему, а отображение f на этих точках порождает требуемую подстановку.

б) Если у точки α нет прообразов на интервале $(\alpha, x_{i_0}]$, то $f(x) > \alpha$ при $x \in (\alpha, x_{i_0}]$ и, следовательно, $x_i > \alpha$ при всех $i \in \mathbb{Z}$.

Поскольку точка α — ω-предельное множество траектории, то существует последовательность $j_s \to +\infty$, $s = 1, 2, \ldots$, такая, что $x_{j_s} < x_{j_{s-1}}$ и $f(x_{j_{s-1}}) \leqslant x_{j_s}$. Рассмотрим любой из интервалов $I_s = [x_{j_s}, x_{j_{s-1}}], s \geqslant 1$, который содержит по крайней мере одну из точек $x_{i_k}, k \geqslant 1$ (а таких интервалов — счетное число). Пусть $x_{i_{k'}}$ — наибольшая из точек, попавших в интервал I_s. Поскольку $f(x_{j_s}) \leqslant x_{j_{s+1}} < x_{j_s}$ и $f(x_{i_{k'}}) \geqslant x_{i_{k'-1}} > x_{i_{k'}}$, то на интервале $[x_{i'_s}, x_{i'_k}]$ существует неподвижная точка, которую обозначим $\widehat{\alpha}$. Поскольку $f(x_{i_{k'}}) \geqslant x_{i_{k'-1}} > x_{j_{s-1}}$, то на точках $\widehat{\alpha} < x_{i'_k} < x_{i_{s-1}}$ возникает L-схема, что эквивалентно утверждению 1).

Доказательство теоремы закончено.

Заметим, что 1-гомоклиническая траектория является топологическим пределом бесконечной последовательности вложенных друг в друга максимальных циклов возрастающих периодов и в этом смысле она аппроксимируется максимальными циклами.

Для гладких и кусочно-монотонных отображений утверждения теоремы 4 можно сформулировать более точно. Случай, рассмотренный в пункте б) доказательства теоремы 4, а именно, что у точки α нет прообразов на интервале $(\alpha, x_{i_0}]$, невозможен для таких отображений. Более того, если у отображения есть максимальные циклы любого периода, то оно имеет и бесконечную последовательность вложенных друг в друга максимальных циклов возрастающих периодов. Поэтому справедлива также следующая теорема.

Т е о р е м а $4'$. *Как для гладких, так и для кусочно-монотонных отображений следующие утверждения эквивалентны:*

1) существуют три точки, ограничение отображения на которые эквивалентно подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *или симметричной ей;*

2) отображение имеет максимальные циклы всех периодов;

3) отображение имеет 1-гомоклиническую траекторию.

Перейдем теперь к гомоклиническим траекториям к неподвижным точкам, которые являются не 1-гомоклиническими, а 2-гомоклиническими. Здесь нам понадобятся перестановки длины $n = 2p$ вида

$$\pi_{2p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & p & p+1 & \ldots & j & \ldots & 2p \\ p+1 & 2p & \ldots & 2p+2-i & \ldots & p+2 & p & \ldots & 2p+1-j & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Заметим, что перестановка π_{2p}^2 распадается на две циклические перестановки: максимальную периода p и симметричную ей.

Бифуркационный сценарий рождения гомоклинической траектории к неподвижной точке характеризует следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы 4.

Т е о р е м а 5. *Для непрерывного отображения интервала в себя следующие утверждения эквивалентны:*

1) существуют четыре точки, ограничение отображения на которые эквивалентно подстановке $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ *или симметричной ей;*

2) отображение имеет бесконечную последовательность вложенных друг в друга циклов типа (7) возрастающих периодов;

3) отображение имеет 2-гомоклиническую траекторию к неподвижной точке.

Подстановки, фигурирующие в этой теореме, обладают следующим свойством: их вторая итерация содержит подмножество, эквивалентное подстановке $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Поэтому доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4, но относительно второй итерации отображения.

Отметим, что, как следует из теоремы 5, 2-гомоклиническая траектория является топологическим пределом последовательности вложенных друг в друга циклов типа (7) возрастающих периодов.

Теперь мы используем так называемые минимальные перестановки и минимальные циклы. 2-гомоклинические траектории могут быть топологическими пределами последовательности вложенных друг в друга циклов возрастающих периодов, типы которых — минимальные перестановки. Минимальные перестановки длины n с точностью до симметричной имеют вид:

при $n = 2p + 1,\ p \geqslant 0$,

$$\pi_{2p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & p+1 & p+2 & \dots & j & \dots & 2p+1 \\ p+1 & 2p+1 & \dots & 2p+3-i & \dots & p+2 & p & \dots & 2p+2-j & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

при $n = 2p, p \geqslant 1,$ — это перестановки π, обладающие следующим свойством: множества $\{1, 2, \dots, p\}$ и $\{p+1, p+2, \dots, 2p\}$ инвариантны относительно π^2, а ограничение π^2 на каждое из этих множеств — минимальная перестановка (длины p).

Граф накрытий минимальной перестановки нечетной длины представлен на рис. 3.

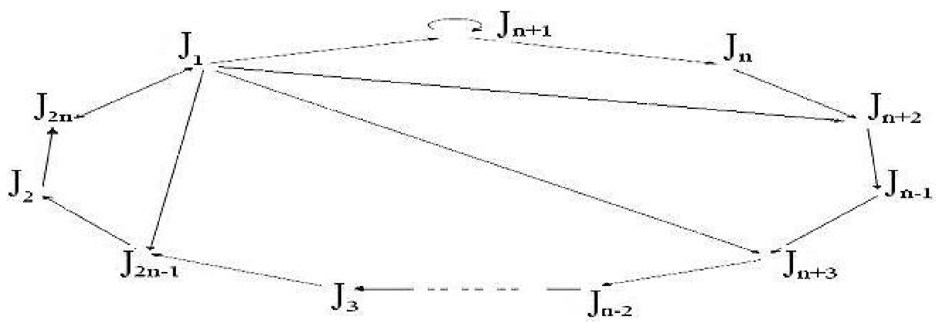

Рис. 3

Отметим, что именно минимальные перестановки используются для доказательства неулучшаемости теоремы о сосуществовании циклов различных периодов, так как *если отображение имеет цикл какого-либо периода, то оно имеет и минимальный цикл того же периода* [2,7].

Теоремы о сосуществовании гомоклинических траекторий и периодических траекторий, аналогичные теоремам 1–5, можно сформулировать и для минимальных перестановок.

Нижеследующая теорема предлагает возможный сценарий рождения гомоклинических траекторий, в котором уже участвуют и минимальные циклы.

Т е о р е м а 6. 1) Если отображение имеет минимальный цикл типа (8), то отображение имеет

а) минимальный цикл любого большего периода;
б) циклы типа (7) всех периодов;
в) 2-гомоклиническую траекторию.

2) 2-гомоклиническая траектория как угодно точно аппроксимируется как циклами типа (7), так и циклами типа (8), если последние существуют.

Доказательство теоремы сводится, как и в разделе 2, к простому анализу графа накрытий цикла, в данном случае, цикла типа (8).

Работа поддержана Научной программой Национальной академии наук Украины, проект № 0107U002333.

Список литературы

[1] Гомоклинические касания: Сб. ст. / С. В. Гонченко, Л. П. Шильников. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютер. исслед., 2007. 524 с.

[2] Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. матем. журн., 1964, т. 16, № 1, с. 61–71.

[3] Шарковский А. Н. О проблеме изоморфизма динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям: Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970. С. 541–545.

[4] Block L. Homoclinic points of mappings of the interval // Proc. Amer. Math. Soc., 1978, vol. 72, no. 3, pp. 576–580.

[5] Федоренко В. В., Шарковский А. Н. Устойчивость свойства динамической системы иметь гомоклиническую траекторию // Осцилляция и устойчивость решений дифференциально-функциональных уравнений: Сб. ст. / Киев: Инст. математики АН УССР, 1982. С. 111–113.

[6] Федоренко В. В., Шарковский А. Н. О сосуществовании периодических и гомоклинических траекторий // V Всесоюзн. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений: Тез. докл. Кишинев: Штиинца, 1979. С. 174–175.

[7] Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.

[8] Шарковский А. Н. Об одной классификации неподвижных точек // Укр. матем. журн., 1965, т. 17, № 5, с. 80–95.

[9] Блох А. М. Об одной интерпретации теоремы А. Н. Шарковского // Осцилляция и устойчивость решений дифференциально-функциональных уравнений: Сб. ст. / Киев: Инст. математики АН УССР, 1982. С. 3–8.