УДК 515.165, 517.938.5

Вейлевы слоения*

Н. И. Жукова
Нижегородский национальный исследовательский университет
603095, Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
n.i.zhukova@rambler.ru

Получено 11 декабря 2009 г.

Слоения, допускающие в качестве трансверсальной структуры вейлеву геометрию, называются нами вейлевыми. Доказано, что любое вейлево слоение либо является римановым, т. е. допускает трансверсально проектируемую риманову метрику, либо имеет минимальное множество, представляющее собой аттрактор. Для собственного вейлева, не риманова слоения, существует замкнутый слой, являющийся аттрактором. Эти утверждения доказаны без предположений компактности слоеного многообразия и полноты вейлева слоения.

Доказано, что любое полное вейлево слоение, либо является римановым и замыкание каждого его слоя образует минимальное множество, либо — трансверсально подобным и имеет единственное минимальное множество, представляющее собой глобальный аттрактор. Полное собственное вейлево слоение либо риманово, причем все его слои замкнуты, а пространство слоев — гладкий орбифолд, либо является трансверсально подобным и имеет единственный замкнутый слой — глобальный аттрактор этого слоения.

Ключевые слова: вейлево слоение, минимальное множество, аттрактор, группа голономии

N. I. Zhukova

Weil Foliations

A foliation that admits a Weil geometry as its transverse structure is called by us a Weil foliation. We proved that there exists an attractor for any Weil foliation that is not Riemannian foliation. If such foliation is proper, there exists an attractor coincided with a closed leaf. The above assertions are proved without assumptions of compactness of foliated manifolds and completeness of the foliations.

We proved also that an arbitrary complete Weil foliation either is a Riemannian foliation, with the closure of each leaf forms a minimal set, or it is a trasversally similar foliation and there exists a global attractor. Any proper complete Weil foliation either is a Riemannian foliation, with all their leaves are closed and the leaf space is a smooth orbifold, or it is a trasversally similar foliation, and it has a unique closed leaf which is a global attractor of this foliation.

Keywords: Weil foliation, minimal set, attractor, holonomy group
Mathematical Subject Classification 2000: 37-XX, 53Cxx, 53C12

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 10-01-00457-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2011 годы, контракт № П945.

Введение

При попытке создать единую теорию поля Герман Вейль ввел новую геометрию, представляющую собой обобщение римановой геометрии [1]. Эта геометрия называется вейлевой. Вейлева геометрия и сейчас активно используется физиками (см., например, [2]).

Слоения, допускающие в качестве трансверсальной структуры вейлеву геометрию, называются нами *слоениями с трансверсально проектируемой вейлевой структурой* или (для краткости) *вейлевыми слоениями.*

Мы рассматриваем вейлеву геометрию как эффективную картанову геометрию, а вейлевы слоения как картановы слоения в смысле Блюменталя [3], или, что эквивалентно в этом случае, в смысле работы автора [4]. Вейлевы слоения являются картановыми слоениями типа (G, H), где $G = CO(q) \ltimes R^q$ — полупрямое произведение конформной группы $H = CO(q)$ и абелевой группы R^q. Рассмотрение вейлевых слоений $(M, \mathcal{F})$ как картановых позволило применить результаты предыдущих работ автора [4] и [5]. Слоеное расслоение, наделенное поднятым слоением, является основным инструментом в данной работе.

Нами даны различные интерпретации групп голономии вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$ (предложение 4.1), в частности, показано, что группа голономии вейлева слоения изоморфна некоторой подгруппе указанной выше группы H. Это существенно используется при доказательстве следующей основной теоремы.

Слоение $(M, \mathcal{F})$ называется собственным, если все его слои — вложенные подмногообразия многообразия M.

Напомним, что подмножество многообразия M называется насыщенным, если оно является объединением некоторых слоев слоения $(M, \mathcal{F})$. Минимальным множеством слоения $(M, \mathcal{F})$ называется непустое замкнутое насыщенное подмножество в M, не имеющее собственных подмножеств, обладающих этими свойствами.

Минимальное множество $\mathcal{M}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, для которого существует такая открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$, что замыкание произвольного слоя из $\mathcal{U}$ содержит множество $\mathcal{M}$, называется *аттрактором* этого слоения, а окрестность $\mathcal{U}$ называется бассейном аттрактора $\mathcal{M}$ и обозначается через $\mathcal{A}ttr(\mathcal{M})$. Если, более того, $\mathcal{A}ttr(\mathcal{M}) = M$, то аттрактор $\mathcal{M}$ называется *глобальным* [4]. Аттракторы слоений, образованных траекториями динамических систем, являются аттракторами в смысле [6].

Теорема 1. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — произвольное вейлево слоение коразмерности $q \geq 2$. Тогда выполняется одно из двух альтернативных утверждений:*

1) слоение $(M, \mathcal{F})$ — риманово;

2) существует минимальное множество $\mathcal{M}$, представляющее собой аттрактор, причем сужение этого слоения на $\mathcal{A}ttr(\mathcal{M})$ является трансверсально подобным слоением. Если слоение $(M, \mathcal{F})$ — собственное, то $\mathcal{M}$ — замкнутый слой.

Подчеркнем, что теорема 1 доказана нами без предположения полноты вейлевых слоений $(M, \mathcal{F})$ и компактности слоеных многообразий M.

Теорема 2. *Если $(M, \mathcal{F})$ — полное вейлево слоение коразмерности $q \geq 2$, то:*

либо слоение $(M, \mathcal{F})$ — риманово, причем замыкание каждого его слоя образует минимальное множество;

либо $(M, \mathcal{F})$ — трансверсально подобное слоение с единственным минимальным множеством $\mathcal{M}$, представляющим собой глобальный аттрактор.

В качестве приложения теоремы 2 мы получили следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — полное собственное вейлево слоение коразмерности $q \geqslant 2$. Тогда имеет место одно из двух утверждений:*

1) слоение $(M, \mathcal{F})$ — риманово, все его слои замкнуты, а пространство слоев является гладким q-мерным орбифолдом;

2) слоение $(M, \mathcal{F})$ — трансверсально подобное с единственным замкнутым слоем L, являющимся глобальным аттрактором.

Обозначения. Следуя [7], мы обозначаем главное H-расслоение $p : P \to \mathcal{N}$ через $P(\mathcal{N}, H)$. Модуль векторных полей на многообразии M обозначается через $\mathfrak{X}(M)$, а множество векторных полей, касательных к распределению $\mathfrak{M}$ на M, — через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$.

1. Вейлевы геометрии

Напомним определение вейлевой геометрии [8].

Пусть $\mathcal{N}$ — произвольное гладкое q-мерное многообразие, где $q \geq 2$. Две римановы метрики g и g_0 на $\mathcal{N}$ называются конформно эквивалентными, если существует такая гладкая функция λ на $\mathcal{N}$, что $g_0 = e^{\lambda} g$. Класс конформно эквивалентных римановых метрик, содержащий g, называется конформной структурой на $\mathcal{N}$ и обозначается через $[g]$. Пара $(\mathcal{N}, [g])$ называется конформным многообразием. Пусть $\Omega^k(\mathcal{N})$ — пространство внешних форм степени k, а $\Omega^0(\mathcal{N})$ — алгебра гладких функций на многообразии $\mathcal{N}$.

Определение 1.1. *Вейлевой структурой* (или *вейлевой геометрией*) на многообразии $\mathcal{N}$ называется пара $([g], f)$, где $[g]$ — класс конформно эквивалентных римановых метрик на многообразии $\mathcal{N}$, а $f : [g] \to \Omega^1(\mathcal{N})$ — отображение, удовлетворяющее равенству

$$f(e^{\lambda} g) = f(g) - d\lambda, \quad \forall \lambda \in \Omega^0(\mathcal{N}).$$

Многообразие $\mathcal{N}$, наделенное вейлевой структурой, называется *вейлевым многообразием.*

Поскольку 1-формы $f(g_0)$, где $g_0 \in [g]$, отличаются друг от друга на точные 1-формы, то все они принадлежат одному когомологическому классу $\widehat{f}([g]) \in H^1(\mathcal{N})$.

Определение 1.2. Линейная связность ∇ на вейлевом многообразии $(\mathcal{N}, [g], f)$ называется *совместимой с вейлевой структурой,* если

$$\nabla g + f(g) \otimes g = 0, \quad \forall g \in [g]. \tag{1}$$

В локальных координатах карты (U, ψ) многообразия $\mathcal{N}$ уравнение (1) запишется в виде

$$g_{ij,k} + g_{ij}\varphi_k = 0, \tag{2}$$

где $g_{ij,k}$ — ковариантная производная от метрического тензора g_{ij} относительно связности ∇, а φ_k — компоненты 1-формы $\varphi := f(g)$.

Как известно, на гладком многообразии существует единственная линейная связность ∇, относительно которой невырожденный тензор второго ранга имеет заданную ковариантную производную. Более того, если этот тензор симметричен, то связность ∇ не имеет кручения. Отсюда вытекает, что на вейлевом многообразии $\mathcal{N}$ существует единственная линейная связность ∇ без кручения, совместимая с вейлевой структурой.

Верно и обратное: если для положительно опеделенного симметрического тензора g 2-го ранга и 1-формы φ относительно некоторой связности без кручения ∇ выполняется равенство (1), то ∇ — линейная связность без кручения, совместимая с вейлевой структурой, заданной g и $\varphi = f(g)$.

Пусть $(\mathcal{N}, [g])$ — q-мерное конформное многообразие, где $q \geq 2$. Репер $\xi = \{\xi_i | i = \overline{1, q}\}$ называется конформным, если векторы ξ_i попарно ортогональны и имеют одинаковые длины относительно метрики g и, следовательно, относительно любой римановой метрики $g_0 \in [g]$. Обозначим через P расслоение конформных реперов над $\mathcal{N}$; это главное $CO(q)$-расслоение, подрасслоение главного $GL(q, R)$-расслоения линейных реперов над $\mathcal{N}$.

Известно [8], что задание вейлевой структуры на $\mathcal{N}$ эквивалентно заданию связности без кручения в главном $CO(q)$-расслоении $P = P(\mathcal{N}, CO(q))$ с базой $\mathcal{N}$.

Категория вейлевых многообразий Пусть $(\mathcal{N}, [g], f)$ и $(\widetilde{\mathcal{N}}, [\widetilde{g}], \widetilde{f})$ — два вейлевых многообразия. Гладкое отображение $h : \mathcal{N} \to \widetilde{\mathcal{N}}$ называется *морфизмом вейлевых многообразий,* если h является морфизмом многообразий аффинной связности $(\mathcal{N}, \nabla)$ и $(\widetilde{\mathcal{N}}, \widetilde{\nabla})$, где ∇ и $\widetilde{\nabla}$ — линейные связности без кручения, совместимые с указанными вейлевыми структурами $([g], f)$ и $([\widetilde{g}], \widetilde{f})$ соответственно, т. е. если $h_*(\nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{h_* X} h_* Y$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$, где h_* — дифференциал отображения h. Категорию, объектами которой являются вейлевы многообразия, морфизмами — морфизмы вейлевых многообразий, а композиция морфизмов совпадает с композицией отображений, будем называть *категорией вейлевых многообразий.*

2. Определение вейлевых слоений

Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие размерности q, связность которого не предполагается. Говорят, что на n-мерном многообразии M, где $n > q$, задан $\mathcal{N}$-коцикл $\eta = \{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j \in J}$, если заданы открытое покрытие $\{U_i | i \in J\}$ многообразия M и субмерсии $f_i : U_i \to \mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$ со связными слоями, обладающие следующими свойствами:

(i) если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$;

(ii) $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$ для всех $x \in f_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$, где $i, j, k \in J$.

Предполагается, что семейство η максимальное, т. е. содержит все U_i, f_i, γ_{ij}, обладающие указанными выше свойствами, и $\mathcal{N} = \{\bigcup U_i | i \in J\}$. Тогда множество слоев субмерсий $\{f_i^{-1}(x) | x \in \mathcal{N}, i \in J\}$ образует базу новой топологии Υ в M, которая называется слоевой. Компоненты связности топологического пространства (M, Υ) образуют разбиение $\mathcal{F}$ многообразия M, которое называется *слоением коразмерности q, заданным коциклом η*, и обозначается через $(M, \mathcal{F})$.

Если $(\mathcal{N}, [g], f)$ — вейлево многообразие, а любой элемент γ_{ij} из коцикла η является изоморфизмом вейлевых многообразий, индуцированных на открытых подмножествах $f_j(U_i \cap U_j)$ и $f_i(U_i \cap U_j)$, то $(M, \mathcal{F})$ называется *слоением с трансверсально проектируемой вейлевой структурой* или (для краткости) *вейлевым слоением.*

Пусть $(\mathcal{N}_1, g_1)$ и $(\mathcal{N}_2, g_2)$ — римановы многообразия. Напомним, что диффеоморфизм $f : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ называется конформным диффеоморфизмом, если $f^* g_2 = e^{\lambda} g_1$, где λ — гладкая функция на $\mathcal{N}_1$. Если $\lambda = \mathrm{const}$, то f называется подобием римановых многообразий $(\mathcal{N}_1, g_1)$ и $(\mathcal{N}_2, g_2)$.

Слоение, заданное коциклом η, называется *конформным*, если каждый элемент γ_{ij} из коцикла η является локальным конформным диффеоморфизмом конформных структур, индуцированных на соответствуюших открытых подмножествах [9].

Если $\mathcal{N} = E^q$ — q-мерное евклидово пространство, а каждый диффеоморфизм γ_{ij} является сужением некоторого преобразования подобия пространства E^q, то $(M, \mathcal{F})$ называется *трансверсально подобным* слоением [4].

3. Вейлевы слоения как картановы

Напомним определение картановой геометрии [10]. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующая H. Предполагается, что $p : P \to \mathcal{N}$ — главное H-расслоение, заданное свободным правым действием группы H на многообразии P. Действие элемента $a \in H$ на P обозначается через R_a. Невырожденная $\mathfrak{g}$-значная 1-форма ω_0 на P называется *картановой связностью*, если выполняются следующие два условия:

1) $\omega_0(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{h}$, где A^* — фундаментальное векторное поле на P, соответствующее A;

2) 1-форма ω_0 H-эквивариантна, т. е. $(R_a)^*\omega_0 = Ad_G(a^{-1})\omega_0$, $\forall a \in H$, где Ad_G — присоединенное представление группы G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Главное H-расслоение $P(\mathcal{N}, H)$, наделенное картановой связностью ω_0, называется *картановой геометрией* типа (G, H) и обозначается через $\xi = (P(\mathcal{N}, H), \omega_0)$.

Картанова геометрия типа (G, H) [11] называется редуктивной, если однородное пространство G/H редуктивно, и эффективной, если группа G эффективно действует слева сдвигами на G/H.

Пусть R^+ — мультипликативная группа положительных чисел, $O(q)$ — группа q-мерных ортогональных матриц, $CO(q) = R^+ \cdot O(q)$ — конформная группа, являющаяся подгруппой Ли группы всех невырожденных q-мерных матриц $GL(R, q)$.

Пусть $G = CO(q) \ltimes R^q$ — полупрямое произведение конформной группы $CO(q)$ и R^q. Запишем произвольный элемент из G в виде $\langle \lambda A, a \rangle$, где $\lambda \in R^+, A \in O(q), a \in R^q$, где R^q — q-мерная аддитивная группа. При этом произведение в группе G задано равенством

$$\langle \lambda A, a \rangle \langle \mu B, b \rangle := \langle \lambda \mu AB, \lambda Ab + a \rangle$$

для любых $\langle \lambda A, a \rangle, \langle \mu B, b \rangle$ из G.

Заметим, что группа G реализуется как группа всех преобразований подобия евклидова пространства E^q, а $H = CO(q)$ — как ее стационарная подгруппа в нуле $0 \in E^q$.

Пусть $\mathfrak{so}(q)$ — алгебра Ли ортогональной группы Ли $SO(q)$, а R^1 — алгебра Ли мультипликативной группы Ли R^+. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G допускает разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{h} = \mathfrak{co}(q) = R^1 \oplus \mathfrak{so}(q)$ — алгебра Ли конформной группы Ли $CO(q)$, $\mathfrak{p} = R^q$ — абелев идеал в $\mathfrak{g}$. Заметим, что векторное пространство $\mathfrak{p}$ является $Ad_G(H)$-инвариантным, где $Ad_G(H) : H \to GL(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление подгруппы H группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Согласно вышеизложенному и решению проблемы эквивалентности для вейлевых структур в [11], имеет место следующее утверждение, где $G = CO(q) \ltimes R^q$, $H = CO(q)$.

Предложение 3.1. *Во введенных выше обозначениях, задание вейлевой структуры на q-мерном многообразии $\mathcal{N}$ определяет картанову связность $\omega_0 = \widetilde{\omega} + \theta$ в H-расслоении конформных реперов $P(\mathcal{N}, H)$, где $\widetilde{\omega}$ — $\mathfrak{h}$-значная 1-форма линейной связности ∇ на $\mathcal{N}$, совместимой с вейлевой структурой, а θ — R^q-значная каноническая 1-форма на P. Более того, вейлева геометрия $\xi = (P(\mathcal{N}, H), \omega_0)$ типа (G, H) является редуктивной и эффективной картановой геометрией. Верно и обратное, задание картановой геометрии данного* *типа (G, H) на $\mathcal{N}$ определяет каноническую вейлеву геометрию на $\mathcal{N}$, причем эта вейлева геометрия определяет указанным выше образом исходную картанову геометрию.*

Заметим, что в [11] вейлева геометрия определяется как картанова геометрия.

Мы также будем рассматривать вейлеву геометрию на q-мерном многообразии $\mathcal{N}$ как картанову геометрию $\xi = (P(\mathcal{N}, H), \omega_0)$ типа (G, H), определенную в предложении 3.1.

Вейлево слоение может быть определено как картаново слоение, моделируемое на вейлевой геометрии $\xi = (P(\mathcal{N}, H), \omega_0)$ в смысле Блюменталя [3] или (эквивалентно) в смысле работы автора [4]. Любое вейлево слоение является также конформным слоением.

Применяя предложение 2, доказанное автором в [4], мы получаем следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Во введенных выше обозначениях, задание вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$ коразмерности $q \geq 2$, моделируемого на вейлевой геометрии $\xi = (P(\mathcal{N}, H), \omega_0)$, эквивалентно заданию главного H-расслоения $\pi : \mathcal{R} \to M$, H-инвариантного слоения $(\mathcal{R}, F)$ и $\mathfrak{g}$-значной H-эквивариантной 1-формы ω на $\mathcal{R}$, обладающих следующими свойствами:*

1) $\omega(A^*) = A$ для фундаментального векторного поля A^*, соответствующего $A \in \mathfrak{h}$, $\forall A \in \mathfrak{h}$

2) отображение $\omega_u : T_u\mathcal{R} \to \mathfrak{g}$, для всякого $u \in \mathcal{R}$, сюрьективно, причем $ker\omega = TF$, где TF — распределение, касательное к слоению $(\mathcal{R}, F)$;

3) производная Ли $L_X\omega$ равна нулю для каждого векторного поля X, касательного к слоям слоения $(\mathcal{R}, F)$.

Главное $CO(q)$-расслоение $\pi : \mathcal{R} \to M$ называется *слоеным расслоением,* а $(\mathcal{R}, F)$ называется *поднятым слоением* для вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$.

4. Различные характеризации групп голономиии

Поскольку эффективные картановы геометрии относятся к жестким геометриям, то вейлевы слоения являются слоениями с трансверсальными жесткими геометриями, введенными нами в [5].

Через $\Gamma(L, x)$ мы обозначаем ростковую группу голономии слоя $L = L(x)$, проходящего через x, общепринятую в теории слоений [12]. Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству соответствующих пунктов теоремы 4 из работы автора [5].

Предложение 4.1. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — вейлево слоение, $\pi : \mathcal{R} \to M$ — слоеное расслоение, x — любая точка из M, u — произвольная точка слоя $\pi^{-1}(x)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$ — слой поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$. Тогда группа голономии $\Gamma(L, x)$ слоя $L = L(x)$ изоморфна каждой из следующих двух групп:*

1) подгруппе $H(\mathcal{L}) := \{a \in H | R_a(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\}$ группы H;

2) группе накрывающих преобразований регулярного накрытия $\pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to L$.

Пусть $u, u' \in \pi^{-1}(x)$, тогда существует такой элемент $a \in H$, что для слоев $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u), \mathcal{L}' = \mathcal{L}'(u')$ поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$ выполняется равенство $H(\mathcal{L}') = a^{-1} \cdot H(\mathcal{L}) \cdot a$, т. е. подгруппы $H(\mathcal{L})$ и $H(\mathcal{L}')$ являются сопряженными в группе Ли H. Поэтому относительная компактность одной из них в топологии группы Ли H влечет относительную компактность другой. Отсюда вытекает корректность следующих двух определений.

Определение 4.1. Группа голономии произвольного слоя $L = L(x)$ вейлева слоения называется *относительно компактной,* если существует точка $u \in \pi^{-1}(x)$, для которой относительно компактна подгруппа $H(\mathcal{L})$ группы H, сохраняющая слой $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u)$.

Определение 4.2. Группа голономии слоя L слоения $(M, \mathcal{F})$ называется *существенной*, если она не является относительно компактной.

5. Достаточные условия для существования трансверсально проектируемой римановой метрики

Предложение 5.1. *Если все группы голономии вейлева слоения относительно компактны, то это слоение — риманово.*

Доказательство. Как указано в разделе 3, на многообразии $\mathcal{R}$ определено гладкое правое свободное действие группы $H = CO(q)$, пространство орбит которого совпадает со слоеным многообразием M. Следовательно, на $\mathcal{R}$ определено гладкое правое свободное действие нормальной подгруппы R^+ группы H, причем пространство орбит является гладким многообразием $\hat{\mathcal{R}}$, на котором индуцировано гладкое правое свободное действие фактор-группы $H/R^+ = O(q)$, а пространство орбит $\hat{\mathcal{R}}/O(q)$ совпадает с M. При этом канонические проекции на пространства орбит $\alpha : \mathcal{R} \to \hat{\mathcal{R}}$ и $\hat{\pi} : \hat{\mathcal{R}} \to M$ удовлетворяют равенству $\pi = \hat{\pi} \circ \alpha$. Кроме того, поднятое слоение $(\mathcal{R}, F)$ является H-инвариантным, следовательно, оно инвариантно относительно группы R^+, поэтому индуцировано $O(q)$-инвариантное слоение $(\hat{\mathcal{R}}, \hat{F})$, слои которого являются образами слоев слоения $(\mathcal{R}, F)$ при отображении α.

По условию, все группы голономии вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$ относительно компактны. Так как $O(q)$ является единственной максимальной компактной подгруппой группы $H = CO(q)$, то для любого слоя поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$ выполняется включение $H(\mathcal{L}) \subset O(q)$ и $H(\mathcal{L}) \bigcap R^+ = \{e\}$. Отсюда вытекает, что сужение α на любой слой $\mathcal{L}$ поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$ является диффеоморфизмом на некоторый слой $\hat{L}$ слоения $(\hat{\mathcal{R}}, \hat{F})$.

Благодаря $Ad_G(H)$-инвариантности подпространства $\mathfrak{p}$ векторного пространства алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{co}(q) \oplus \mathfrak{p}$, на $\mathcal{R}$ определено гладкое H-инвариантное распределение $\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}_u = \{X \in T_u(\mathcal{R}) | \omega(X) \in \mathfrak{p}\}$ для всех $u \in \mathcal{R}$. Следовательно, $\mathfrak{N}$ — проектируемая связность в $\mathcal{R}(M, H)$ относительно $(\mathcal{R}, F)$. При этом распределение $\hat{\mathfrak{N}} := \alpha_* \mathfrak{N}$ — проектируемая связность в $\hat{\mathcal{R}}(M, O(q))$ относительно $(\hat{\mathcal{R}}, \hat{F})$.

Это означает, что (M, F) — риманово слоение, а $\hat{\mathcal{R}}(M, O(q))$ — его слоеное расслоение [13]. $\square$

Следствие 5.1. *Если слоение $(M, \mathcal{F})$ с трансверсально проектируемой вейлевой структурой не является римановым, то оно имеет слой с существенной группой голономии.*

6. Связность, адаптированная к поднятому слоению

Будем использовать обозначения, введенные в разделе 3. Рассмотрим произвольное гладкое q-мерное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоям вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}} := \pi^* \mathfrak{M}$, т. е. $\tilde{\mathfrak{M}}_u := \{X \in T_u\mathcal{R} | \pi_{*u} X \in \mathfrak{M}_x, x = \pi(u)\}$ для любого $u \in \mathcal{R}$. Обозначим через $\mathfrak{P}$ q-мерное распределение $\mathcal{R}$, равное пересечению $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{P}_u = \mathfrak{N}_u \bigcap \mathfrak{M}_u$ для любого $u \in \mathcal{R}$. H-инвариантность распределений $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ влечет H-инвариантность распределения $\mathfrak{P}$.

Из определения $\mathfrak{P}$ вытекает, что $\mathfrak{P}_u = \{X \in \tilde{\mathfrak{M}}_u \mid \omega(X) \in \mathfrak{p}\}$. Гладкость $\mathfrak{g}$-значной 1-формы ω влечет гладкость распределения $\mathfrak{P}$.

Определение 6.1. Гладкое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, для которого $\omega(X) = c = \mathrm{const}$, называется $\mathfrak{g}$-*полем;* если при этом $c \in \mathfrak{p}$, то X называется $\mathfrak{p}$-*полем.*

Кусочно-гладкая кривая в $\mathcal{R}$ называется $\mathfrak{g}$-*кривой* (соответственно, $\mathfrak{p}$-*кривой*), если каждый ее гладкий кусок является интегральной кривой некоторого векторного $\mathfrak{g}$-поля (соответственно, $\mathfrak{p}$-*поля*).

Заметим, что локально любую гладкую $\mathfrak{g}$-кривую σ можно представить в виде $\sigma(t) = \varphi_t^X(v), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, φ_t^X — 1-параметрическая группа локальных диффеоморфизмов многообразия $\mathcal{R}$, порожденная $\mathfrak{g}$-полем X, для которого $\sigma(t)$ — интегральная кривая, $v = \sigma(0) = \varphi_0^X(v)$.

Лемма 6.1. *Пусть $g_{\mathcal{R}}$ — произвольная риманова метрика на пространстве слоеного расслоения $\mathcal{R}$, d_0 — евклидова метрика в $\mathfrak{g}$, инвариантная относительно действия компактной группы $Ad_G(O(q))$. Пусть $Z = Z_F \bigoplus Z_{\tilde{\mathfrak{M}}}$ — разложение произвольного векторного поля $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$, соответствующее разложению касательного векторного пространства к $\mathcal{R}$ в прямую сумму подпространств $T_u\mathcal{R} = T_uF \oplus \tilde{\mathfrak{M}}_u, u \in \mathcal{R}$. Тогда равенство*

$$d(X, Y) := g_{\mathcal{R}}(X_F, Y_F) + d_0(\omega(X), \omega(Y)), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{R}),$$

определяет риманову метрику d в $\mathcal{R}$, трансверсально проектируемую относительно слоения $(\mathcal{R}, F)$, обладающую следующими свойствами:

1) длина $l(\sigma)$ произвольной гладкой $\mathfrak{g}$-кривой σ, $\sigma(t) = \varphi_t^X(v)$, где $t \in [0, t_1], v = \sigma(0)$, равна $\|\omega(X)\|_{d_0} \cdot t_1$, где $\|\omega(X)\|^2_{d_0} = d_0(\omega(X), \omega(X))$;

2) $l(\varphi_t^X(v)) = l(\varphi_t^X(v'))$, где X — $\mathfrak{g}$-поле, $t \in [0, t_1]$, для всех $v, v' \in \mathcal{R}$, если $\varphi_t^X(v)$ и $\varphi_t^X(v')$ определены при $t \in [0, t_1]$;

3) для любого элемента $a = \lambda^{-1} \cdot A \in CO(q)$, где $\lambda \in R^+$, $A \in O(q)$, и произвольной $\mathfrak{p}$-кривой σ кривая $\tilde{\sigma} := R_a \circ \sigma$ является $\mathfrak{p}$-кривой, причем $l(\tilde{\sigma}) = \lambda \cdot l(\sigma)$.

Доказательство. Трансверсальная проектируемость римановой метрики d относительно слоения $(\mathcal{R}, F)$ вытекает из трансверсальной проектируемости $\mathfrak{g}$-значной 1-формы ω и определения d.

Поскольку $\sigma(t) = \varphi_t^X(v)$, где $t \in [0, t_1]$, — интегральная кривая некоторого $\mathfrak{p}$-поля X, то $d(X, X) = \|\omega(X)\|^2_{d_0}$ и $d(\sigma)/dt = X_{\sigma(t)}$. Поэтому длина $l(\sigma)$ вычисляется по формуле, указанной в 1).

Соотношение 2) вытекает из 1).

Проверим 3). Предположим сначала, что $\sigma(t) = \varphi_t^X(v)$, $t \in [0, t_1]$, — $\mathfrak{p}$-кривая, где $\sigma(0) = v$, и $\tilde{\sigma} := R_a \circ \sigma$. Так как $\tilde{\sigma}(t) = \varphi_t^Y(v \cdot a)$, где $Y = R_{a*}(X)$, то, в силу $Ad_G(H)$-инвариантности $\mathfrak{p}$, Y является $\mathfrak{p}$-полем, следовательно, $\tilde{\sigma}$ есть $\mathfrak{p}$-кривая. Согласно 1), ее длина находится по формуле $l(\tilde{\sigma}) = \|\omega(X)\|_{d_0} \cdot t_1$. В силу H-эквивариантности формы ω, имеет место равенство $\omega(Y) = Ad_G(a^{-1})\omega(X)$ и, следовательно, $l(\tilde{\sigma}) = \|Ad_G(a^{-1})\omega(X)\|_{d_0} \cdot t_1$. Вычисления показывают, что, благодаря $Ad_G(O(q))-$инвариантности метрики d_0 в $\mathfrak{g}$, для любого элемента $a = \lambda^{-1} \cdot A \in CO(q)$, где $\lambda \in R^+$, $A \in O(q)$, выполняется равенство $\|Ad_G(a^{-1})\omega(X)\|_{d_0} = \lambda \cdot \|\omega(X)\|_{d_0}$, откуда $l(\tilde{\sigma}) = \lambda \cdot l(\sigma)$.

Пусть теперь σ — кусочно-гладкая $\mathfrak{p}$-кривая, тогда она разбивается на конечное число кусков $\sigma\,|_{I_i}, i = 1, ..., m$, для каждого из которых, по доказанному, выполняется равенство $l(\tilde{\sigma}\,|_{I_i}) = \lambda \cdot l(\sigma|_{I_i})$, следовательно, $l(\tilde{\sigma}) = \lambda \cdot l(\sigma)$. □

Лемма 6.2. *Пусть $E_i, i = \overline{1, dim\mathfrak{g}}$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, X_i — такое $\mathfrak{g}$-поле, что $\omega(X_i) = E_i$. Обозначим через $\tilde{\nabla}$ связность Леви-Чивита риманова многообразия $(\mathcal{R}, d)$. Тогда:*

1) равенство

$$\nabla_Y Z := Y(Z^i)X_i + \tilde{\nabla}_Y Z_F, \qquad (*)$$

где $Z = Z_F \oplus Z_{\tilde{\mathfrak{M}}}$, $Z_{\tilde{\mathfrak{M}}} = Z^i X_i \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, $Z_F \in \mathfrak{X}_{TF}(\mathcal{R})$, $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$, определяет линейную связность ∇ в $\mathcal{R}$, вообще говоря, с кручением, относительно которой все $\mathfrak{g}$-поля парал-

лельны, причем при параллельном переносе $\mathfrak{g}$-полей сохраняется их скалярное произведение, заданное метрическим тензором d;

2) интегральные кривые $\mathfrak{g}$-полей являются геодезическими линиями связности ∇.

Доказательство. Проверка показывает, что ∇ — линейная связность на $\mathcal{R}$. Из определения линейной связности ∇ вытекает, что $\nabla_Y X = 0$ для каждого векторного $\mathfrak{g}$-поля X и любого $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$. Кроме того, для любых $\mathfrak{g}$-полей X, Z имеет место равенство $d(X,Z) = \mathrm{const}$. Отсюда вытекает выполнение утверждения 1), а следовательно, и 2). $\square$

7. Существование аттрактора

Обозначим через $(\mathcal{R}, \mathbb{F})$ слоение, образованное компонентами связности подмногообразий $\pi^{-1}(L_\alpha)$, где L_α — слои слоения $(M, \mathcal{F})$.

Лемма 7.1. *Пусть L — слой вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$ с существенной группой голономии. Тогда существует открытая насыщенная окрестность $\mathcal{U}$ слоя L в M, такая, что для замыкания $\bar{L}'$ любого слоя $L' \subset \mathcal{U}$ выполняется включение $\bar{L}' \supset L$.*

Доказательство. Возьмем $v \in \pi^{-1}(x)$. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v)$.

Заметим, что геодезические линии связности ∇ с кручением, символы Кристоффеля которой в некоторой координатной окрестности равны Γ^k_{ij}, совпадают с геодезическими линиями линейной связности $\widehat{\nabla}$ без кручения, символы Кристоффеля которой равны $\widehat{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})$ и, следовательно, обладают всеми свойствами геодезических линий связности без кручения. В частности, в точке v существует нормальная окрестность для связности ∇, заданной равенством (*). Бдагодаря этому найдется такое $\varepsilon > 0$, что в точке v определено вложенное подмногообразие $V := D_{\tilde{\mathfrak{M}}}(v, \varepsilon)$, образованное $\mathfrak{g}$-кривыми длины меньше ε с началом в точке v. Аналогично, задано подмногообразие $V_1 := D_{\mathfrak{P}}(v, \varepsilon)$, образованное $\mathfrak{p}$-кривыми длины меньше ε с началом в v.

Так как слой L имеет существенную группу голономии, то группа $H(\mathcal{L})$ содержит элемент $a = \lambda^{-1} \cdot A$, где $\lambda \in R^+, \lambda \in (0,1)$, $A \in O(q)$. Поскольку точки v и $u := v \cdot a$ лежат в слое $\mathcal{L}$, их можно соединить гладкой кривой $h : [0,1] \to \mathcal{L}$, где $v = h(0), u = h(1)$. Не нарушая общности, мы считаем, что голономный диффеоморфизм Φ_h вдоль пути h ([12]) поднятого слоения $(\mathcal{R}, F)$ определен на V.

Подчеркнем, что нормальные окрестности относительно ∇ образуют базу окрестностей в каждой точке из $\mathcal{R}$. Поэтому для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\varepsilon)$ точки v, что: 1) $\mathcal{W}$ — расслоенная относительно слоения $(\mathcal{R}, \mathbb{F})$ и 2) подмногообразие $V_1 := D_{\mathfrak{P}}(v, \varepsilon)$ трансверсально слоям этого слоения $(\mathcal{W}, \mathbb{F}_{\mathcal{W}})$ и ровно один раз пересекает каждый его слой. Тогда любые два локальные слоя слоения $(\mathcal{W}, \mathbb{F}_{\mathcal{W}})$ можно соединить некоторой гладкой $\mathfrak{p}$-кривой длины меньше ε. При этом $U := \pi(\mathcal{W})$ — расслоенная окрестность относительно $(M, \mathcal{F})$, а $D := \pi(V_1)$ — трансверсальное многообразие в U.

Покажем, что для замыкания любого слоя L_α слоения $(M, \mathcal{F})$, пересекающего U, выполняется включение $\bar{L}_\alpha \supset L$.

Пусть $L_\alpha \bigcap U \neq \emptyset$, тогда существует точка $x_0 \in L_\alpha \bigcap D$. При этом найдется точка $v_0 \in \pi^{-1}(x_0) \bigcap V_1$. Следовательно, существует $\mathfrak{p}$-кривая $\varphi^X_t(v), t \in [0, t_1]$ в V_1, соединяющая $v = \varphi^X_0(v)$ с $v_0 = \varphi^X_{t_1}(v)$. Это означает, что $v_0 \in \mathbb{L} \bigcap W$ для слоя $\mathbb{L} \subset \pi^{-1}(L_\alpha)$ слоения $(\mathcal{R}, \mathbb{F})$.

Введем обозначения $\sigma(t) := \varphi^X_t(v), t \in [0, t_1], \tilde{\sigma} := R_a \circ \sigma$. Тогда $\tilde{\sigma}(t) = \varphi^Y_t(v \cdot a)$, где $Y = R_{a*}(X)$. В силу утверждения 3) леммы 6.1, $\tilde{\sigma}(t)$ есть $\mathfrak{p}$-кривая, причем $l(\tilde{\sigma}) = \lambda \cdot l(\sigma) < \lambda \cdot \varepsilon$.

Согласно утверждению 2) леммы 6.1, если существует $\mathfrak{p}$-кривая $\sigma_1(t) := \varphi^Y_t(v), t \in [0,1]$, то она имеет длину, равную длине кривой $\tilde{\sigma}$, откуда $l(\sigma_1) = \lambda \cdot l(\sigma) < \lambda \cdot \varepsilon < \varepsilon$. Следовательно, такая $\mathfrak{p}$-кривая существует в окрестности V_1, т.е. $\sigma_1(t) \in V_1$ при всех $t \in [0, t_1]$.

Поэтому голономный диффеоморфизм Φ_h определен во всех точках этой кривой. Из определения голономного диффеоморфизма Φ_h, в силу трансверсальной проектируемости $\mathfrak{p}$-кривых, вытекает, что кривая $\varphi_{t_1}^{Y}(h(\tau)), \tau \in [0, t_1]$, лежит в одном слое $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(v_0)$ слоения $(\mathcal{R}, F)$. Отсюда следует, что точки $v_1 := \sigma_1(t_1)$ и $\tilde{v}_1 := \tilde{\sigma}(t_1)$ этой кривой проектируются в один слой $L_\alpha = \pi(\mathcal{L}')$ слоения $(M, \mathcal{F})$. При этом точка v соединена с точкой v_1 кривой σ_1 длины $l(\sigma) < \lambda \cdot \varepsilon$, где $\lambda \in (0, 1)$.

Повторяя приведенные рассуждения $(m-1)$ раз, мы получаем точку v_m, соединенную с v $\mathfrak{p}$-кривой σ_m длины $l(\sigma_m) = \lambda^m \cdot l(\sigma) < \lambda^m \cdot \varepsilon$, проектирующуюся в тот же слой L_α, что и точка v_0. Так как $v_m \to v$ при $m \to \infty$, то $x_m := \pi(v_m) \to x = \pi(v)$ при $m \to \infty$. Поскольку $x_m \in L_\alpha, \forall m$, и $L = L(x)$, это означает, что $L \subset \bar{L}_\alpha$.

Множество $\mathcal{U} := \{\bigcup L_\alpha | L_\alpha \in \mathcal{F} : L_\alpha \bigcap U \neq \emptyset\}$ является искомой открытой насыщенной окрестностью слоя L в M. $\square$

Предложение 7.1. *Если существует глобальный аттрактор вейлева слоения* $(M, \mathcal{F})$ *коразмерности* $q \geq 2$, *то это слоение — трансверсально подобное.*

Доказательство. Предположим, что $(M, \mathcal{F})$ — вейлево слоение коразмерности $q \geq 2$, моделируемое на трансверсальной вейлевой геометрии $(\mathcal{N}, [g], f)$. Зафиксируем метрику g, тогда $(\mathcal{N}, g)$ — риманово многообразие.

Пусть $q > 4$ и W — тензор типа $(1, 3)$ конформной кривизны Вейля многообразия $(\mathcal{N}, g)$. Рассматривая W как полилинейное отображение $W : \mathfrak{X}N \times \mathfrak{X}N \times \mathfrak{X}N \to \mathfrak{X}N$, мы определяем норму $\|W\|(x)$, $x \in \mathcal{N}$, следующим образом. Пусть $\|X\|(x) := \sqrt{g_x(X, X)}$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$. Положим $\|W\|(x) := \sup\limits_{\|X_i\|(x) \leq 1} \|W(X_1, X_2, X_3)\|(x)$, $\forall x \in \mathcal{N}$, $i = 1, 2, 3$.

Так как вейлево слоение является конформным, то псевдогруппа голономии этого слоения состоит из локальных конформных диффеоморфизмов риманова многообразия $(\mathcal{N}, g)$. Как известно, тензор конформной кривизны Вейля W является конформным инвариантом. Благодаря этому, на распределении $\mathfrak{M}$, трансверсальном слоению $(M, \mathcal{F})$, индуцируется трансверсально проектируемый тензор Вейля $\widetilde{W}$. При этом $\widetilde{f}(x) := \|\widetilde{W}\|(x)$, $x \in M$, — базовая функция, т. е. функция, постоянная на слоях слоения.

По условию, слоение $(M, \mathcal{F})$ имеет глобальный аттрактор, следовательно, все его базовые функции — константы. Поэтому $\|\widetilde{W}\| = \mathrm{const}$, что влечет постоянство функции $f(z) := \|W\|(z)$, $z \in \mathcal{N}$. Пусть $c = \|W\|$.

Предположим, что $c \neq 0$. Поскольку все преобразования из псевдогруппы голономии $\mathcal{H}$ слоения $(M, \mathcal{F})$ являются локальными конформными диффеоморфизмами, нетрудно проверить, что каждое преобразование из $\mathcal{H}$ сохраняет риманову метрику $c \cdot g$ в $\mathcal{N}$, т. е. $\mathcal{H}$ — псевдогруппа изометрий риманова многообразия $(\mathcal{N}, c \cdot g)$. Следовательно, $(M, \mathcal{F})$ — риманово слоение. Это противоречит существованию аттрактора этого слоения.

Таким образом, необходимо, чтобы $W \equiv 0$.

Если $q = 3$, то, заменяя W тензором Схоутена V типа $(1, 2)$, аналогичным образом мы показываем инвариантность римановой метрики $\|V\|^{\frac{2}{3}} \cdot g$ относительно псевдогруппы голономии $\mathcal{H}$ слоения $(M, \mathcal{F})$, что противоречит существованию аттрактора. Следовательно, $V \equiv 0$.

Согласно теореме Вейля–Схоутена [14], для того чтобы риманово многообразие $(\mathcal{N}, g)$ размерности $q \geq 3$ являлость конформно плоским, т. е. локально конформно эквивалентным плоскому риманову многообразию, необходимо и достаточно, чтобы при $q = 3$ тензор Схоутена V тождественно равнялся нулю, а при $q > 3$ — чтобы тензор конформной кривизны Вейля W был тождественно равен нулю.

Таким образом, при $q \geq 3$ риманово многообразие $(\mathcal{N}, g)$ — конформно плоское.

Согласно теореме Лихнеровича [14], любое двумерное риманово многообразие является конформно плоским. Поэтому $(\mathcal{N}, g)$ — конформно плоское при всех $q \geq 2$. Из равенства (1) раздела 1 вытекает, что для конформно плоской римановой метрики g необходимо, чтобы $\varphi = 0$; следовательно, линейная связность ∇, совместимая с вейлевой структурой $([g], \varphi)$, является римановой связностью.

Итак, каждое преобразование γ_{ij} является одновременно локальным конформным диффеоморфизмом риманова многообразия $(\mathcal{N}, g)$ и локальным изоморфизмом римановой связности этого многообразия. Как известно ([15], глава II), это возможно только тогда, когда γ_{ij} — локальное преобразование подобия риманова многообразия $(\mathcal{N}, g)$.

По теореме Лиувилля, каждый локальный конформный диффеоморфизм γ_{ij} конформно плоского многообразия представляет собой сужение некоторого конформного преобразования стандартной q-мерной сферы S^q. Следовательно, каждое преобразование γ_{ij} является сужением преобразования подобия q-мерного евклидова пространства E^q.

Таким образом, $(M, \mathcal{F})$ — трансверсально подобное слоение. $\square$

Доказательство теоремы 1. Предположим, что слоение $(M, \mathcal{F})$ не является римановым. Тогда, согласно следствию 5.1, существует слой L с существенной группой голономии. Прежде всего покажем, что замыкание $\mathcal{M} = \bar{L}$ слоя L является минимальным множеством.

Возьмем произвольный слой $L' \subset \mathcal{M} = \bar{L}$, тогда $\bar{L}' \subset \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{U}$ — окрестность слоя L, удовлетворяющая лемме 7.1. По определению замыкания $\bar{L}$, $L' \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$, поэтому, согласно лемме 7.1, $L \subset \bar{L}'$, откуда $\mathcal{M} = \bar{L} \subset \bar{L}'$. Таким образом, $\bar{L}' = \mathcal{M}$, следовательно, $\mathcal{M}$ — минимальное множество слоения $(M, \mathcal{F})$.

Из леммы 7.1 вытекает, что $\mathcal{U}$ — насыщенная окрестность множества $\mathcal{M}$, причем замыкание каждого слоя из $\mathcal{U}$ содержит $\mathcal{M}$. Это означает, что $\mathcal{M}$ — аттрактор слоения $(M, \mathcal{F})$, а $\mathcal{U}$ — его бассейн.

Поскольку $\mathcal{M}$ — глобальный аттрактор слоения $(\mathcal{U}, F_{\mathcal{U}})$, то, согласно предложению 7.1, $(\mathcal{U}, F_{\mathcal{U}})$ — трансверсально подобное слоение.

Осталось заметить, что для собственного слоения любое минимальное множество является замкнутым слоем. $\square$

8. Глобальные аттракторы полных вейлевых слоений

Напомним, что гладкое векторное поле X на $\mathcal{R}$ называется *полным,* если X порождает глобальную 1-параметрическую группу диффеоморфизмов многообразия $\mathcal{R}$.

Определение 8.1. Вейлево слоение $(M, \mathcal{F})$ называется *полным,* если полным является любое $\mathfrak{g}$-поле X, где $X \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$.

Таким образом, полнота вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$ эквивалентна полноте $(M, \mathcal{F})$, рассматриваемого как картаново слоение.

Лемма 8.2. *Пусть L и L' — два произвольных слоя полного вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$. Тогда подмножества $\pi^{-1}(L)$ и $\pi^{-1}(L')$ в $\mathcal{R}$ можно соединить некоторой-кусочно гладкой $\mathfrak{p}$-кривой.*

Доказательство. Введем отношение эквивалентности в пространстве слоев $M/\mathcal{F}$ вейлева слоения $(M, \mathcal{F})$. Два слоя L и L' будем называть эквивалентными, если подмножества $\pi^{-1}(L)$ и $\pi^{-1}(L')$ многообразия $\mathcal{R}$ можно соединить $\mathfrak{p}$-кривой, т. е. если существует такая $\mathfrak{p}$-кривая $\sigma : [t_1, t_2] \to \mathcal{R}$, что $\sigma(t_1) \in \pi^{-1}(L)$ и $\sigma(t_2) \in \pi^{-1}(L')$. Будем обозначать через $f : M \to M/\mathcal{F}$ естественную проекцию на пространство слоев, причем через $[L]$ будем обозначать слой L этого слоения, рассматриваемый как точка постранства слоев $M/\mathcal{F}$.

Покажем сначала, что введенное отношение $\approx$ действительно является отношением эквивалентности. Рефлексивность и симметричность выполняются очевидным образом. Проверим транзитивность.

Предположим, что $[L_0] \approx [L_1]$, а $[L_1] \approx [L_2]$, т. е. существуют такие $\mathfrak{p}$-кривые σ и σ_1, что $v_0 = \sigma(0) \in \pi^{-1}(L_0)$, $v_1 = \sigma(1) \in \pi^{-1}(L_1)$, $v_2 = \sigma_1(0) \in \pi^{-1}(L_1)$, $v_3 = \sigma_1(1) \in \pi^{-1}(L_2)$. Пусть $x_i = \pi(v_i), i = 0, ..., 3$. Тогда $x_1 \cup x_2 \subset L_1$. Поэтому найдется точка $u_0 \in \mathcal{L}(v_2) \bigcap \pi^{-1}(x_1)$, где $\mathcal{L}(v_2)$ — слой поднятого слоения, проходящий через v_2.

Сначала рассмотрим случай, когда кривая σ_1 гладкая, тогда $\sigma_1(t) = \varphi_t^X(v_2), t \in [0, 1]$, где X — $\mathfrak{p}$-поле. Так как вейлево слоение $(M, \mathcal{F})$ — полное, то любое $\mathfrak{p}$-поле полное. Следовательно, для любой точки $v \in \mathcal{R}$ интегральная кривая $\varphi_t^X(v)$ определена при всех $t \in \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому определена $\mathfrak{p}$-кривая $\widehat{\sigma}_1(t) := \varphi_t^X(u_0)$. Так как φ_t^X при каждом фиксированном t является автоморфизмом слоения $(\mathcal{R}, F)$, то $\widehat{\sigma}_1(1) = \varphi_1^X(u_0) \in \mathcal{L}(v_3) \subset \pi^{-1}(L_2)$.

Если σ_1 — кусочно-гладкая $\mathfrak{p}$-кривая, то предыдущие рассуждения нужно применить последовательно к каждому ее гладкому куску для того, чтобы получить $\mathfrak{p}$-кривую $\widehat{\sigma}_1$ с началом в u_0 и концом $\widehat{\sigma}_1(1) \in \pi^{-1}(L_2)$.

Поскольку точки v_1 и u_0 лежат в одном слое $\pi^{-1}(x_1)$, найдется такой элемент $a \in H$, что $v_1 = u_0 \cdot a$. Согласно утверждению 3) леммы 6.1, $\sigma^* := R_a \circ \widehat{\sigma}_1$ — $\mathfrak{p}$-кривая с началом в v_1. Заметим, что $\sigma^*(0) = v_1 = \sigma(1)$ и $\sigma^*(1) \in \pi^{-1}(L_2)$. Следовательно, определено произведение путей $\delta = \sigma \cdot \sigma^*$. При этом δ — $\mathfrak{p}$-кривая, соединяющая $\pi^{-1}(L_0)$ с $\pi^{-1}(L_2)$. Это означает, что $[L_0] \approx [L_2]$, т. е. отношение $\approx$ транзитивно.

Итак, введенное отношение является отношением эквивалентности.

Покажем теперь, что каждый класс эквивалентности — открытое подмножество в $M/\mathcal{F}$. Рассмотрим произвольную точку $[L] \in M/\mathcal{F}$. Пусть $A([L])$ — класс эквивалентности, содержащий $[L]$. При доказательстве леммы 7.1 для любых $x \in L$ и $v \in \pi^{-1}(x)$ построена окрестность $\mathcal{W}$ в точке v, расслоенная относительно $(\mathcal{R}, \mathbb{F})$, в которой v можно соединить с любым локальным слоем слоения $(\mathcal{R}, \mathbb{F})$ некоторой $\mathfrak{p}$-кривой. Отсюда вытекает, что любые два слоя слоения $(M, \mathcal{F})$, пересекающие окрестность $U = \pi(\mathcal{W})$, эквивалентны. Так как проекция $f : M \to M/\mathcal{F}$ на пространство слоев слоения является открытым отображением, то $f(U)$ — открытое множество в $M/\mathcal{F}$, содержащее $[L]$ и принадлежащее $A([L])$.

Таким образом, класс эквивалентности $A([L])$ — открытое подмножество в $M/\mathcal{F}$. Поскольку дополнение к $A([L])$ образовано объединением остальных классов эквивалентности, каждый из которых открыт, то $A([L])$ — замкнутое подмножество в $M/\mathcal{F}$. В силу связности M, пространство слоев также связно, поэтому непустое открыто-замкнутое подмножество $A([L])$ совпадает с $M/\mathcal{F}$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предположим, что $(M, \mathcal{F})$ — полное риманово слоение произвольной коразмерности q. Автором доказано ([4], теорема 5), что замыкание любого слоя полного риманова слоения образует минимальное множество. Салем другим методом доказано аналогичное утверждение для римановых слоений на полных римановых многообразиях ([13], приложение D).

Пусть теперь $(M, \mathcal{F})$ — полное вейлево слоение коразмерности $q \geq 2$, не являющееся римановым. Согласно следствию 5.1, существует слой L с существенной группой голономии. Пусть L' — любой другой слой этого слоения.

По лемме 8.2, существует $\mathfrak{p}$-кривая σ, соединяющая $\pi^{-1}(L)$ и $\pi^{-1}(L')$. Пусть $v = \sigma(0)$, $v_0 := \sigma(1)$, $l(\sigma)$ — длина σ в римановом многообразии $(\mathcal{R}, d)$, где d — риманова метрика, определенная в лемме 6.1.

Поскольку нормальные окрестности относительно связности ∇ образуют базу топологии в каждой точке $v \in \mathcal{R}$, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует окрестность

$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\varepsilon)$ в точке v, определенная при доказательстве леммы 7.1. Так как группа голономии слоя L существенная, то существует такой элемент $b = \lambda^{-1}A \in H$, где $\lambda \in (0,1)$. Поэтому найдется натуральне число k, для которого $\lambda^k \cdot l(\sigma) < \varepsilon$. Тогда, согласно утверждению 3) леммы 6.1, длина кривой $\widetilde{\sigma} := R_a \circ \sigma$, где $a = b^k \in H$, удовлетворяет соотношениям $l(\widetilde{\sigma}) = \lambda^k \cdot l(\sigma) < \varepsilon$. Используя это, по аналогии с доказательством леммы 7.1, мы показываем, что слой L' пересекает окрестность $U(\varepsilon) := \pi(\mathcal{W})$, следовательно, замыкание $\overline{L'}$ слоя L' удовлетворяет включению $\overline{L'} \supset L$ и $\mathcal{M} = \overline{L}$ — аттрактор.

Так как L' — произвольный слой слоения $(M, \mathcal{F})$, то $Attr(\mathcal{M}) = M$, т.е. $\mathcal{M}$ — глобальный аттрактор слоения $(M, \mathcal{F})$.

Согласно предложению 7.1, $(M, \mathcal{F})$ — трансверсально подобное слоение. $\square$

Доказательство теоремы 3. Предположим, что $(M, \mathcal{F})$ — полное собственное риманово слоение произвольной коразмерности. В этом случае, из теоремы 2, доказанной автором в [16]. вытекает, что все слои этого слоения — замкнутые подмножества многообразия M, все группы голономии конечны, а пространство слоев $M/\mathcal{F}$ — гладкий q-мерный орбифолд.

Если $(M, \mathcal{F})$ — полное собственное вейлево слоение коразмерности $q \geq 2$, не являющееся римановым, то из теорем 1 и 2 следует существование единственного замкнутого слоя, являющегося глобальным аттрактором этого слоения. $\square$

Список литературы

[1] Weyl H. Space, Time, Matter. 4 ed. New York: Dover Publications, 1952. 330 p.

[2] Wojtkowski M. P. Weyl Manifolds and Gaussian Thermostats // Proc. of the Internat. Congr. of Mathematicians (Beijing, 2002): Vol. 3. Beijing: Higher Ed. Press, 2002. P. 511–523.

[3] Blumenthal R. Cartan Submersions and Cartan foliations // Illinois Math. J., 1987, vol. 31, no. 2, pp. 327–343.

[4] Жукова Н. И. Минимальные множества картановых слоений // Тр. ин-та им. В. А. Стеклова, 2007, т. 256, с. 115–147.

[5] Жукова Н. И. Полные слоения с трансверсальными жесткими геометриями и их базовые автоморфизмы // Вестн. РУДН. Сер. Матем. Информат. Физика, 2009, № 2, с. 14–35.

[6] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 1. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2004. 416 с.

[7] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: Т. 1. М.: Наука, 1981. 344 с.

[8] Folland G. B. Weyl manifolds // J. Differential Geom., 1970, vol. 4, pp. 145–153.

[9] Vaisman I. Conformal foliations // Kodai Math. J., 1979, vol. 2, no. 1, pp. 26–37.

[10] Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986. 224 с.

[11] Sharpe R. W. Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen program. (Grad. Texts in Math., vol. 166.) New York: Springer, 1997. 421 p.

[12] Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979. 317 с.

[13] Molino P. Riemannian Foliations. (Progr. Math., vol. 73.) Boston: Birkhäuser, 1988. 339 p.

[14] Hertrich-Jeromin U. Introduction to Möbius Differential Geometry. (London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 300.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. 426 c.

[15] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 255 с.

[16] Žukova N. I. On the stability of leaves of Riemannian foliations // Ann. Global Anal. Geom., 1987, vol. 5, no. 3, pp. 261–271.