

## К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля

**Р. Е. Кондрашов, А. Д. Морозов**

Нижегородский госуниверситет  
Россия, Нижний Новгород, 603950, пр-т Гагарина, 23  
romicmmf2006@rambler.ru, morozov@mm.unn.ru

*Получено 29 марта 2010 г.*

Рассматривается задача о взаимодействии двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля, близких к нелинейным интегрируемым. Выводятся усредненные системы, описывающие поведение решений исходного уравнения в резонансных зонах, и устанавливаются условия существования нетривиальных резонансных структур. Приводятся результаты исследования в случаях, когда у несвязанных уравнений существуют и отсутствуют предельные циклы.

Ключевые слова: предельные циклы, резонансы

**R. E. Kondrashov, A. D. Morozov**

### On investigation of resonances in system of two Duffing–van der Pol equations

We consider a problem about interaction of the two Duffing–van der Pol equations close to nonlinear integrable. The average systems describing behaviour of the solutions of the initial equation in resonant zones are deduced. The conditions of existence of not trivial resonant structures are established. The results of research in cases are resulted, when at the uncoupled equations exist and there are no limiting cycles.

Keywords: limit cycles, resonances

Mathematical Subject Classification 2000: 34C15

## 1. Введение

Исследованию системы двух связанных уравнений Дюффинга–Ван дер Поля посвящено большое число работ, в которых либо изначально рассматривается квазилинейная система, либо теоретическое исследование оправдано лишь в квазилинейном случае (см., например, [1–4]). В [5] исследовалась гамильтонова система типа Хенона–Хейлеса, в которой одно уравнение близко к линейному, а другое — к нелинейному с квадратичной нелинейностью. В [6, 7] рассматриваются существенно нелинейные системы общего вида, близкие к интегрируемым. Однако до сих пор отсутствуют работы, в которых бы для примера системы двух связанных неконсервативных существенно нелинейных осцилляторов исследовались резонансные структуры. В данной работе мы рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 &= \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 y] \\ \ddot{y} + \delta y + \gamma y^3 &= \varepsilon[(p_3 - y^2)\dot{y} + p_4 x],\end{aligned}\quad (1.1)$$

где  $\alpha, \beta, \delta, \gamma, p_1, p_2, p_3, p_4$  — параметры, причем  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \pm 1$ .

Интерес представляют лишь случаи, в которых невозмущенные уравнения имеют ячейку  $D$ , заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. В результате приходим к шести различным случаям, определяемым знаками параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ : 1) (1, 1, 1, 1), 2) (1, -1, 1, 1), 3) (-1, 1, 1, 1), 4) (1, -1, 1, -1), 5) (-1, 1, -1, 1), 6) (-1, 1, 1, -1). Фазовые портреты для этих случаев показаны на рис. 1. В зависимости от метода исследования к этим случаям можно добавить еще три, которые получаются из случаев 2, 3, 6 перестановкой верхней и нижней картинок.

Несвязанные уравнения — это уравнения Дюффинга–Ван дер Поля. В этих уравнениях может существовать не более двух предельных циклов в отдельной ячейке [6].

Основными проблемами в исследовании связанных уравнений (1.1) являются резонансные и гомоклинические структуры. Резонансные структуры возникают для некоторых резонансов, определяемых условием соизмеримости частот  $\omega_{1,2}$  невозмущенных нелинейных осцилляторов

$$p\omega_1(h_1) = q\omega_2(h_2), \quad (1.2)$$

где  $p, q$  — взаимно простые целые числа, а  $h_{1,2}$  — значения интегралов энергии уравнений Дюффинга

$$\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0, \quad \dot{y} + \delta y + \gamma y^3 = 0 \quad (1.3)$$

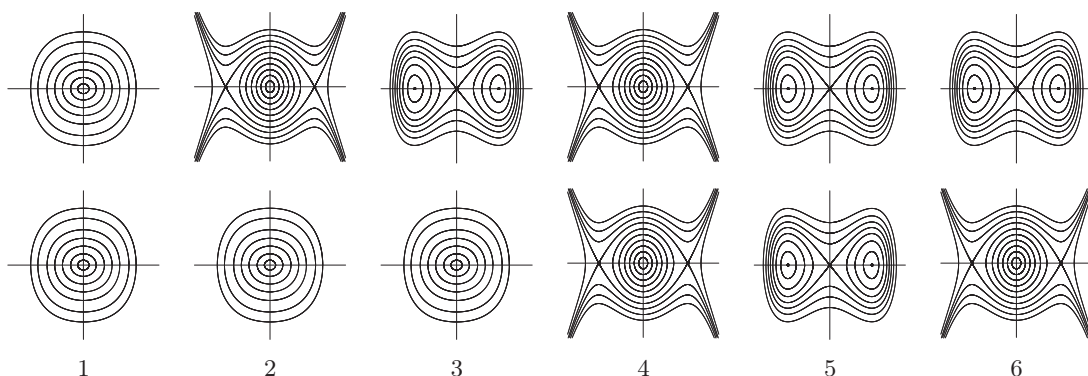


Рис. 1. Фазовые портреты невозмущенных уравнений в случаях 1–6.

соответственно. Нетрудно видеть, что

$$H(x, \dot{x}) \equiv \dot{x}^2/2 + \alpha x^2/2 + \beta x^4/4 = h_1, \quad H(y, \dot{y}) \equiv \dot{y}^2/2 + \delta y^2/2 + \gamma y^4/4 = h_2. \quad (1.4)$$

Условие (1.2) при фиксированном значении  $h_2$  определяет резонансное значение  $h_1 = h_{1pq}$ . Для системы с двумя степенями свободы это условие определяет на плоскости  $(h_1, h_2)$  резонансные кривые. Оказывается, для большинства точек этих кривых структура резонансных зон простая — они являются «проходимыми». Лишь для некоторых точек некоторых резонансных кривых может существовать нетривиальная структура, связанная с существованием резонансных периодических движений и, возможно, гомоклинических кривых Пуанкаре. Гомоклинические кривые (контуры) появляются также в случаях 2–6 из-за существования невозмущенных сепаратрис.

Поясним ситуацию на примере случая 1, когда фазовые плоскости уравнений (1.3) заполнены замкнутыми фазовыми кривыми. Если взять начальные условия  $x_0, \dot{x}_0$  вблизи уровня энергии  $h_1 = h_{10}$ , а начальные условия для второго осциллятора вблизи уровня  $h_2 = h_{20}$  так, чтобы частоты движения на этих уровнях удовлетворяли условию (1.2), то получим резонансную ситуацию. Как известно [6], резонансные структуры определяются трехмерной усредненной системой (см. (4.2)), вычисление правых частей которой и ее исследование представляют достаточно трудную задачу.

**Определение 1.** Будем говорить, что имеет место нетривиальная резонансная структура, если усредненная в окрестности резонанса система имеет простые состояния равновесия.

Далее мы укажем условия, при выполнении которых возникают нетривиальные резонансные структуры, а также исследуем эти структуры.

Резонансные структуры существенно зависят от того, совпадают ли выбранные замкнутые фазовые кривые в невозмущенных осцилляторах с уровнями, порождающими предельные циклы в несвязанных уравнениях. Мы также уделим внимание этому вопросу, решение которого связано с понятием «синхронизации колебаний» и которому в прикладных задачах в последние годы уделяется значительное внимание (например, в связи с исследованием нейронных сетей [8]).

## 2. Невозмущенные уравнения. Резонансы

Решения уравнений (1.3) хорошо известны (см., например, [6]). Для первого уравнения в (1.3) имеем:

$$x(\vartheta) = x_1 \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad \vartheta = \omega_1 t, \quad (2.1)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{1-2k_1^2}\mathbf{K}(k_1)}, \quad k_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-x_2^2}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{2k_1^2}{1-2k_1^2}}$$

при  $\beta = 1, h_1 > 0$ , причем  $k_1 \in [0, 1/\sqrt{2})$  при  $\alpha = 1$  и  $k_1 \in (1/\sqrt{2}, 1)$  при  $\alpha = -1$ ,

$$x(\vartheta) = x_1 \operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi), \quad \vartheta = \omega_1 t, \quad (2.2)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{1+k_1^2}\mathbf{K}(k_1)}, \quad k_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{2k_1^2}{1+k_1^2}}$$

при  $\alpha = 1, \beta = -1, 0 < h_1 < 1/4$ ,

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= x_1 \operatorname{dn}(\mathbf{K}\vartheta/\pi), & \vartheta &= \omega_1 t, \\ \omega_1 &= \frac{\pi}{\sqrt{2 - k_1^2} \mathbf{K}(k_1)}, & k_1 &= \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2^2}}{x_1}, & x_1 &= \sqrt{\frac{2}{2 - k_1^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

при  $\alpha = -1, \beta = 1, (-1/4) < h_1 < 0$ . Здесь  $\omega_1$  — частота движения на замкнутых фазовых кривых  $\dot{x}^2/2 + \alpha x^2/2 + \beta x^4/4 = h_1$ ,  $\vartheta = \omega_1 t$  — угловая переменная ( $\vartheta \in [0, 2\pi]$ ),  $\operatorname{sn}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(u)$ ,  $\operatorname{dn}(u)$  — эллиптические функции Якоби,  $\mathbf{K}$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода,  $k_1$  — его модуль,  $x_1^2, x_2^2$  — корни уравнения  $h_1 - \alpha x^2/2 - \beta x^4/4 = 0$ .

Для второго уравнения в (1.3) имеем аналогичные формулы, в которых  $x \rightarrow y, \alpha \rightarrow \delta, \beta \rightarrow \gamma, h_1 \rightarrow h_2, k_1 \rightarrow k_2, \vartheta \rightarrow \varphi, \omega_1 \rightarrow \omega_2$ .

Используя (2.1)–(2.3), условие резонанса (1.2) перепишем в виде

$$\frac{p}{\sqrt{1 - 2k_1^2} \mathbf{K}(k_1)} = \frac{q}{\sqrt{1 - 2k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} \quad (2.4)$$

для случая 1,

$$\frac{p}{\sqrt{1 + k_1^2} \mathbf{K}(k_1)} = \frac{q}{\sqrt{1 - 2k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} \quad (2.5)$$

для случая 2,

$$\frac{p}{\sqrt{1 - 2k_1^2} 2\mathbf{K}(k_1)} = \frac{q}{\sqrt{2 - k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} \quad (2.6)$$

для случая 3,

$$\frac{p}{\sqrt{1 + k_1^2} \mathbf{K}(k_1)} = \frac{q}{\sqrt{1 + k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} \quad (2.7)$$

для случая 4,

$$\frac{p}{\sqrt{2 - k_1^2} \mathbf{K}(k_1)} = \frac{q}{\sqrt{2 - k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} \quad (2.8)$$

для случая 5,

$$\frac{p}{\sqrt{1 + k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} = \frac{q}{\sqrt{2 - k_2^2} \mathbf{K}(k_2)} \quad (2.9)$$

для случая 6.

В этих формулах величины  $k_1, k_2$  определяют замкнутые фазовые кривые в первом и втором осцилляторах соответственно.

На рис. 2 для примера представлены резонансные кривые для случаев 1 и 2. При этом в случае 1 обозначено: 1 для  $p = 3, q = 1$ ; 2 для  $p = 7, q = 5$ ; 3 для  $p = 1, q = 1$ ; 4 для  $p = 3, q = 5$ ; 5 для  $p = 1, q = 3$ , а в случае 2 — 1 для  $p = 7, q = 5$ ; 2 для  $p = 5, q = 3$ ; 3 для  $p = 7, q = 3$ ; 4 для  $p = 3, q = 1$ ; 5 для  $p = 5, q = 1$ .

### 3. Предельные циклы в несвязанных уравнениях

Положим в (1.1)  $p_2 = p_4 = 0$ . В результате приходим к двум идентичным уравнениям Дюффинга–Ван дер Поля. Рассмотрим первое из этих уравнений

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x}]. \quad (3.1)$$



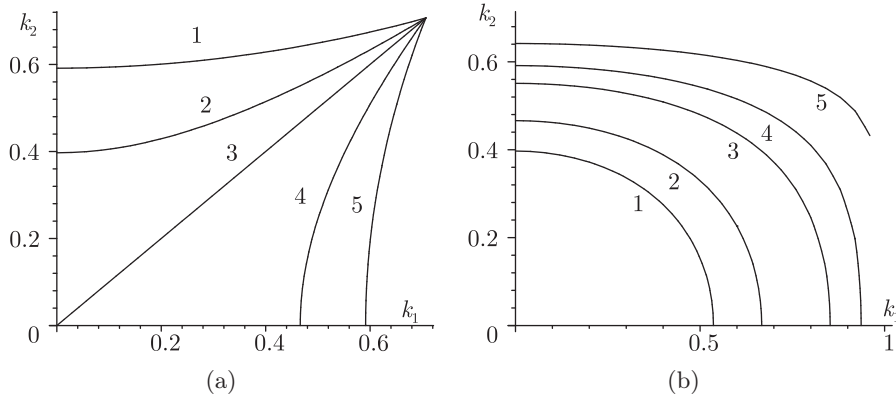


Рис. 2. Резонансные кривые для случаев 1 (а) и 2 (б).

Предельные циклы (ПЦ) этого уравнения определяются простыми нулями порождающей функции Пуанкаре–Понтрягина [6]

$$B_1(h_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p_1 - x^2(\vartheta, h_1)] \dot{x}(\vartheta, h_1) x'_{\vartheta} d\vartheta, \tag{3.2}$$

где  $x(\vartheta, h_1)$  – периодическое решение невозмущенного уравнения, определенное в (2.1)–(2.3). В результате вычисления интеграла в (3.2) находим<sup>1</sup> [6]

$$B_1(h_1(k_1)) = \frac{4}{\pi[\alpha(1 - 2k_1^2)]^{5/2}} \{p_1[(1 - k_1^2)(1 - 2k_1^2)\mathbf{K}(k_1) - (1 - 2k_1^2)^2\mathbf{E}(k_1)]/3 - 2[(k_1^2 - 1)(2 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1) + 2(1 - k_1^2 + k_1^4)\mathbf{E}(k_1)]/15\} \tag{3.3}$$

при  $\alpha = 1, \beta = 1$ , когда  $k_1^2 \in (0, 1/2)$ , и при  $\alpha = -1, \beta = 1$ , когда  $k_1^2 \in (1/2, 1)$ ;

$$B_1(h_1(k_1)) = \frac{4}{\pi(1 + k_1^2)^{5/2}} \{p_1[(k_1^4 - 1)\mathbf{K}(k_1) + (1 + k_1^2)^2\mathbf{E}(k_1)]/3 - 2[(k_1^2 - 1)(2 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1) + 2(1 - k_1^2 + k_1^4)\mathbf{E}(k_1)]/15\} \tag{3.4}$$

при  $\alpha = 1, \beta = -1$ ,

$$B_1(h_1(k_1)) = \frac{2}{\pi(2 - k_1^2)^{5/2}} \{p_1[2(k_1^2 - 1)(2 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1) + (2 - k_1^2)^2\mathbf{E}(k_1)]/3 - 2[(k_1^2 - 1)(2 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1) + 2(1 - k_1^2 + k_1^4)\mathbf{E}(k_1)]/15\}, \tag{3.5}$$

при  $\alpha = -1, \beta = 1$ , когда  $-0,25 < h_1 < 0$  и  $k_1 \in (0, 1)$  (внутри «восьмерки»).

При  $\alpha = 1, \beta = \pm 1$  функция  $B_1(k_1)$  имеет не более одного вещественного нуля (на интервале  $(0, \sqrt{2}/2)$  при  $\beta = +1$  и на интервале  $(0, 1)$  – при  $\beta = -1$ ). Для  $\beta = 1$  ПЦ рождается из фокуса при  $p_1 = 0$  и с ростом  $p_1$  растет по величине (ПЦ  $\rightarrow \infty$  при  $p_1 \rightarrow \infty$ ). Для  $\beta = -1$  ПЦ рождается из фокуса при  $p_1 = 0$  и с ростом  $p_1$  растет по величине, влиная в сепаратрису при  $p_1 = 0.2$ .

При  $\alpha = -1, \beta = 1$  рассматриваем функцию (3.5) внутри «восьмерки» и функцию (3.3) – вне «восьмерки». Исследование этих функций приводит к следующим результатам. При  $p_1 \in (0.8; 1)$  существует по одному неустойчивому ПЦ внутри петель и один

<sup>1</sup>Для второго уравнения порождающую функцию будем обозначать через  $B_2(h_2(k_2))$ .



устойчивый ПЦ вне «восьмерки». Внутри «восьмерки» неустойчивые ПЦ рождаются из фокусов ( $x = \pm 1, 0$ ) при  $p_1 = 1$  и с уменьшением  $p_1$  растут по величине, вливая в сепаратрису при  $p_1 = 0.8$ . При уменьшении  $p_1$  от 0.8 родится неустойчивый ПЦ вне «восьмерки», который при  $p_1 = p_1^*$  ( $p_1^* \approx 0.7525$ ) сливается с устойчивым ПЦ. При  $p_1 < p_1^*$  ПЦ отсутствуют и аттракторами являются только два устойчивых фокуса ( $x = \pm 1, 0$ ).

#### 4. Связанные уравнения

Систему (1.1) в области  $D$ , заполненной замкнутыми фазовыми кривыми невозмущенных осцилляторов и отделенной от невозмущенных сепаратрис, удобно записать в переменных действие  $(I, J)$ –угол  $(\theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 y]x'_\theta \equiv \varepsilon F_1(I, J, \theta, \varphi), \\ \dot{J} &= \varepsilon[(p_3 - y^2)\dot{y} + p_4 x]y'_\varphi \equiv \varepsilon F_2(I, J, \theta, \varphi), \\ \dot{\theta} &= \omega_1 + \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 y]x'_I \equiv \omega_1 + \varepsilon G_1(I, J, \theta, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega_2 + \varepsilon[(p_3 - y^2)\dot{y} + p_4 x]y'_J \equiv \omega_2 + \varepsilon G_2(I, J, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Возьмем некоторую точку  $(I_{pq}, J_{pq})$  на резонансной кривой. Система (4.1) в  $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности этой точки преобразуется к виду [6]

$$\begin{aligned} u'_k &= A_k(v; I_{pq}, J_{pq}) + \mu[P_{k1}u_1 + P_{k2}u_2], \quad k = 1, 2, \\ v' &= b_{10}u_1 + b_{20}u_2 + \mu[b_{11}u_1^2 + b_{21}u_2^2 + Q_0(v; I_{pq}, J_{pq})], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где «штрих» означает производную по «медленному» времени  $\tau = \mu t$ ,  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ ,

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_k(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi) d\varphi, \\ P_{k1} &= \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (\partial F_k(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi) / \partial I) d\varphi, \\ P_{k2} &= \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (\partial F_k(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi) / \partial J) d\varphi, \quad k = 1, 2, \\ Q_0 &= \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} [G_1(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi) + qG_2(I_{pq}, J_{pq}, v - q\varphi/p, \varphi) / p] d\varphi, \\ b_{1j-1} &= \frac{d^j \omega_1(I_{pq})}{j dI^j}, \quad b_{2j-1} = \frac{q}{p} \frac{d^j \omega_2(J_{pq})}{j dJ^j}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При получении усредненной системы (4.2) мы пренебрегли членами  $O(\mu^2)$ , которые зависят как от переменных  $u_1, u_2, v$ , так и от  $\varphi$ .

Дивергенция  $\sigma$  векторного поля системы (4.2) определяется по формуле

$$\sigma = P_{11} + P_{22} + Q'_0. \quad (4.4)$$



Прежде всего вычислим функции  $A_k(v; I_{pq}, J_{pq})$ . Их можно представить в виде

$$A_k(v, I_{pq}, J_{pq}) = \tilde{A}_k(v, I_{pq}, J_{pq}) + B_k, \quad k = 1, 2, \tag{4.5}$$

где  $B_1 = B_1(I_{pq})$ ,  $B_2 = B_2(J_{pq})$ .

Так как вычисления для случаев 1–6 аналогичны, мы ограничимся случаями 1 и 2 (в первом отсутствуют сепаратрисы, а во втором имеются сепаратрисы).

#### 4.1. Случай 1

Здесь и ниже будем использовать следующие обозначения:  $k_1 = k_{1pq}$ ,  $k_2 = k_{2pq}$ . Используя (2.1), (3.3), (4.3), находим

$$B_1(k_1) = \frac{4}{\pi(1 - 2k_1^2)^{5/2}} \{ p_1[(1 - k_1^2)(1 - 2k_1^2)\mathbf{K}(k_1) - (1 - 2k_1^2)^2\mathbf{E}(k_1)]/3 - 2[(k_1^2 - 1)(2 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1) + 2(1 - k_1^2 + k_1^4)\mathbf{E}(k_1)]/15 \}, \tag{4.6}$$

$$B_2(k_2) = \frac{4}{\pi(1 - 2k_2^2)^{5/2}} \{ p_3[(1 - k_2^2)(1 - 2k_2^2)\mathbf{K}(k_2) - (1 - 2k_2^2)^2\mathbf{E}(k_2)]/3 - 2[(k_2^2 - 1)(2 - k_2^2)\mathbf{K}(k_2) + 2(1 - k_2^2 + k_2^4)\mathbf{E}(k_2)]/15 \}; \tag{4.7}$$

$$\tilde{A}_1(v, k_1, k_2) = -\frac{4\pi^2 p_2}{\sqrt{(1 - 2k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{1r}(I_{pq}) A_{2r}(J_{pq}) (2r + 1)p \sin((2r + 1)pv), \tag{4.8}$$

$$\tilde{A}_2(v, k_1, k_2) = -\frac{4\pi^2 p_4}{\sqrt{(1 - 2k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{1r}(I_{pq}) A_{2r}(J_{pq}) (2r + 1)q \sin((2r + 1)pv), \tag{4.9}$$

где

$$A_{1r}(k_1) = \frac{a_1^{\frac{(2r+1)p}{2}}}{(1 + a_1^{(2r+1)p})\mathbf{K}(k_1)}, \quad A_{2r}(k_2) = \frac{a_2^{\frac{(2r+1)q}{2}}}{(1 + a_2^{(2r+1)q})\mathbf{K}(k_2)}, \tag{4.10}$$

$$a_1 = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1 - k_1^2})}{\mathbf{K}(k_1)}\right), \quad a_2 = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1 - k_2^2})}{\mathbf{K}(k_2)}\right), \tag{4.11}$$

$$b_{10} = \frac{\pi^2 (1 - 2k_1^2)[(k_1^2 - 1)\mathbf{K}(k_1) + (1 - 2k_1^2)\mathbf{E}(k_1)]}{8 k_1^2 \mathbf{K}^3(k_1)(k_1^2 - 1)}, \tag{4.12}$$

$$b_{20} = \frac{\pi^2 (1 - 2k_2^2)[(k_2^2 - 1)\mathbf{K}(k_2) + (1 - 2k_2^2)\mathbf{E}(k_2)] q}{8 k_2^2 \mathbf{K}^3(k_2)(k_2^2 - 1) p}. \tag{4.13}$$

Здесь  $p$  и  $q$  – нечетные. В противном случае имеем  $\tilde{A}_{1,2}(v, k_1, k_2) \equiv 0$ .

Согласно (2.1),  $k_{1,2} \in [0, 1/\sqrt{2}]$ . Поэтому в рядах (4.8), (4.9) преобладает гармоника с  $r = 0$ . Оставляя эту гармонику в системе (4.2) и пренебрегая членами порядка  $\mu$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} u'_1 &= A_{1*} \sin pv + B_1, \\ u'_2 &= A_{2*} \sin pv + B_2, \\ v' &= b_{10}u_1 + b_{20}u_2, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где  $A_{1*} = -\frac{4\pi^2 p p_2}{\sqrt{(1 - 2k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} A_{10} A_{20}$ ,  $A_{2*} = -\frac{4\pi^2 q p_4}{\sqrt{(1 - 2k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} A_{10} A_{20}$ .



Из соотношений (4.10), (4.11) следует, что величины  $A_{1*}$ ,  $A_{2*}$  быстро убывают с ростом  $p$  и  $q$ . Поэтому при  $B_1 B_2 \neq 0$  не существует состояний равновесия в системе (4.14) (резонансных режимов в исходной системе) с большими  $p$  и  $q$ .

Используя (4.4) и [6], находим выражение для дивергенции  $\sigma$  векторного поля системы (4.2):

$$\begin{aligned} \sigma = p_1 + p_3 - \frac{2}{(1 - 2k_1^2)\mathbf{K}(k_1)} [\mathbf{E}(k_1) - (1 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1)] - \\ - \frac{2}{(1 - 2k_2^2)\mathbf{K}(k_2)} [\mathbf{E}(k_2) - (1 - k_2^2)\mathbf{K}(k_2)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

## 4.2. Случай 2

Используя (2.1), (2.2), (3.3), (3.4), (4.3), находим

$$\begin{aligned} B_1(k_1) = \frac{4}{\pi(1 + k_1^2)^{5/2}} \{p_1[(k_1^4 - 1)\mathbf{K}(k_1) + (1 + k_1^2)^2\mathbf{E}(k_1)]/3 - \\ - 2[(k_1^2 - 1)(2 - k_1^2)\mathbf{K}(k_1) + 2(1 - k_1^2 + k_1^4)\mathbf{E}(k_1)]/15\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} B_2(k_2) = \frac{4}{\pi(1 - 2k_2^2)^{5/2}} \{p_3[(1 - k_2^2)(1 - 2k_2^2)\mathbf{K}(k_2) - (1 - 2k_2^2)^2\mathbf{E}(k_2)]/3 - \\ - 2[(k_2^2 - 1)(2 - k_2^2)\mathbf{K}(k_2) + 2(1 - k_2^2 + k_2^4)\mathbf{E}(k_2)]/15\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\tilde{A}_1(v, k_1, k_2) = \frac{4\pi^2 p_2}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{1r}(I_{pq}) A_{2r}(J_{pq}) (2r + 1)p \cos((2r + 1)pv) \quad (4.18)$$

$$\tilde{A}_2(v, k_1, k_2) = \frac{4\pi^2 p_4}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{1r}(I_{pq}) A_{2r}(J_{pq}) (2r + 1)q \cos((2r + 1)pv), \quad (4.19)$$

где

$$A_{1r}(k_1) = \frac{a_1^{\frac{(2r+1)p}{2}}}{(1 - a_1^{(2r+1)p})\mathbf{K}(k_1)}, \quad A_{2r}(k_2) = \frac{a_2^{\frac{(2r+1)q}{2}}}{(1 + a_2^{(2r+1)q})\mathbf{K}(k_2)}, \quad (4.20)$$

$$a_1 = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1 - k_1^2})}{\mathbf{K}(k_1)}\right), \quad a_2 = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1 - k_2^2})}{\mathbf{K}(k_2)}\right), \quad (4.21)$$

$$b_{10} = \frac{\pi^2 (1 + k_1^2)[(k_1^2 - 1)\mathbf{K}(k_1) + (1 + k_1^2)\mathbf{E}(k_1)]}{8 k_1^2 \mathbf{K}^3(k_1)(k_1^2 - 1)}, \quad (4.22)$$

$$b_{20} = \frac{\pi^2 (1 - 2k_2^2)[(k_2^2 - 1)\mathbf{K}(k_2) + (1 - 2k_2^2)\mathbf{E}(k_2)]}{8 k_2^2 \mathbf{K}^3(k_2)(k_2^2 - 1)} \frac{q}{p}. \quad (4.23)$$

Здесь  $p$  и  $q$  — нечетные. В противном случае имеем  $\tilde{A}_{1,2}(v, k_1, k_2) \equiv 0$ .

Согласно (2.1), (2.2)  $k_1 \in [0, 1)$ ,  $k_2 \in [0, 1/\sqrt{2})$ . В рядах (4.18), (4.19) преобладает гармоника с  $r = 0$ . Оставляя только эту гармонику и пренебрегая членами порядка  $\mu$  в (4.2), приходим к системе вида (4.14), где  $A_{1*} = \frac{4\pi^2 p p_2}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} A_{10} A_{20}$ ,  $A_{2*} = \frac{4\pi^2 q p_4}{\sqrt{(1 + k_1^2)(1 - 2k_2^2)}} A_{10} A_{20}$ .

Из соотношений (4.20), (4.21) следует, что величины  $A_{1*}$ ,  $A_{2*}$  быстро убывают с ростом  $p$  и  $q$ . Поэтому, как и в случае 1, не существуют резонансные режимы в исходной системе с большими  $p$  и  $q$ .





Отметим, что для существования резонансного режима в данном случае необходимо, чтобы выполнялось условие  $p > q$ . Это следует из  $0 < \omega_1(k_1) < 1$ ,  $\omega_2(k_2) > 1$  и условия соизмеримости частот (1.2).

Дивергенция  $\sigma$  векторного поля системы (4.2) в данном случае определяется по формуле

$$\sigma = p_1 + p_3 - \frac{2}{(1 + k_1^2)} \frac{\mathbf{K}(k_1) - \mathbf{E}(k_1)}{\mathbf{K}(k_1)} - \frac{2}{(1 - 2k_1^2)\mathbf{K}(k_2)} [\mathbf{E}(k_2) - (1 - k_2^2)\mathbf{K}(k_2)]. \quad (4.24)$$

## 5. Условия существования нетривиальных резонансных структур

Найдем условия, при выполнении которых возникают нетривиальные резонансные структуры (состояния равновесия в системе (4.14)). Очевидно, если  $B_1 = 0$ ,  $B_2 \neq 0$  или  $B_1 \neq 0$ ,  $B_2 = 0$ , то нетривиальные резонансные структуры отсутствуют. Поэтому такие структуры могут существовать, если а)  $B_1 \neq 0$ ,  $B_2 \neq 0$  или б)  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = 0$ .

Рассмотрим случай а). Система (4.14) имеет состояния равновесия, если система

$$\begin{aligned} A_{1*} \sin pv + B_1 &= 0, \\ A_{2*} \sin pv + B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

имеет вещественные корни. Условие, при котором данная система имеет вещественные корни, определяется следующим образом:  $|B_1| \leq |A_{1*}|$ ,  $|B_2| \leq |A_{2*}|$ . Исключая  $\sin(pv)$  в (5.1), получим следующее выражение:

$$p_2 p B_2(k_2, p_3) = p_4 q B_1(k_1, p_1). \quad (5.2)$$

Итак, в случае а)  $k_1$  и  $k_2$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} p_2 p B_2(k_2, p_3) &= p_4 q B_1(k_1, p_1), \\ p \omega_1(k_1) &= q \omega_2(k_2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Случай б). Если  $B_1(k_1, p_1) = 0$  и  $B_2(k_2, p_3) = 0$ , то несвязанные ( $p_2 = p_4 = 0$ ) уравнения имеют в окрестности уровней  $H(x, \dot{x}) = h_{1pq}$ ,  $H(y, \dot{y}) = h_{2pq}$  по одному предельному циклу. Эти циклы будут грубыми, ибо на этих циклах  $B'_1 \neq 0$  и  $B'_2 \neq 0$ . Система (5.1) имеет решение  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = \pi/p$  при любых  $A_{1*} \neq 0$ ,  $A_{2*} \neq 0$ .

Фазовые портреты системы (4.14) получаются как прямое произведение  $R^1$  на фазовый портрет уравнения

$$v'' - (b_{10} A_{1*} + b_{20} A_{2*}) \sin(pv) - b_{10} B_1 - b_{20} B_2 = 0. \quad (5.4)$$

Качественные картины поведения фазовых кривых уравнения (5.4) для случаев а) и б) показаны на рис. 3.

В случае а) резонанс называется частично проходимым, а в случае б) — непроходимым. Так как система (4.14) консервативная, а исходная система (1.1) — неконсервативная, то необходим учет членов порядка  $\mu$  в (4.2). Отметим, что состоянию равновесия типа «центр» в уравнении (5.4) будет соответствовать состояние равновесия типа «узел-фокус» либо «седло-фокус» в системе (4.2). При этом «узел-фокус» будет устойчивым, если  $\sigma < 0$ , и ему будет отвечать устойчивое периодическое решение в (1.1) [6, 9].

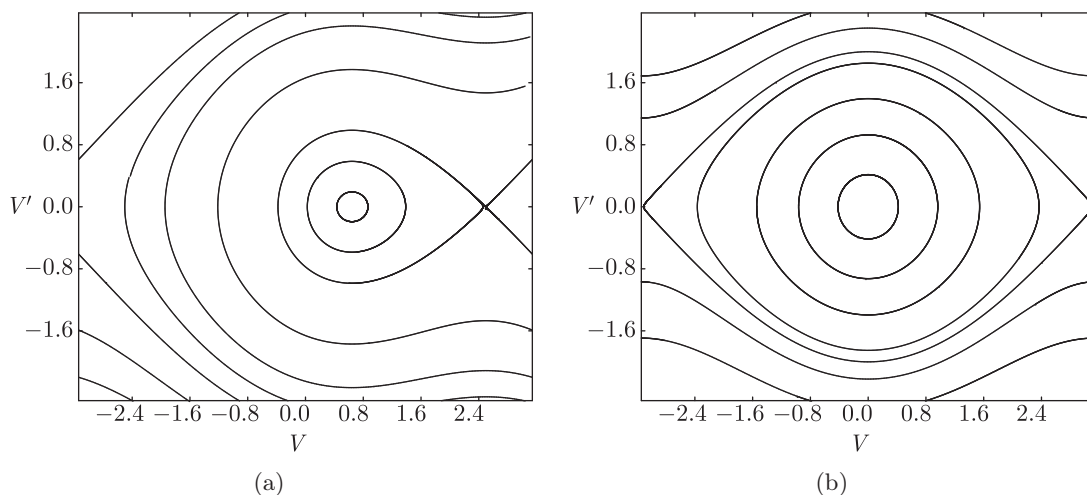


Рис. 3. Качественные картины поведения фазовых кривых уравнения (5.4): а)  $B_1(k_1) \neq 0, B_2(k_2) \neq 0$  и б)  $B_1(k_1) = 0, B_2(k_2) = 0$ .

## 6. Существование гомоклинических структур

Рассмотрим вопрос о существовании гомоклинических структур на примере случая 2. Согласно [11], в достаточно малой окрестности гомоклинических кривых и контуров существует нетривиальное гиперболическое множество. Пренебрежем во втором уравнении системы (1.1) связью с первым уравнением, т. е. положим  $p_4 = 0$ . Далее, предположим, что автономное уравнение

$$\ddot{y} + y + y^3 = \varepsilon(p_3 - y^2)\dot{y} \quad (6.1)$$

имеет устойчивый предельный цикл ( $p_3 > 0$ ), которому соответствует периодическое решение  $y(t)$ , близкое к порождающему периодическому решению невозмущенного уравнения для  $h_2 = h_{20}$  ( $k_2 = k_{20}$ ). Последнее, согласно (2.1), представимо в виде

$$y(\varphi) = y_1(k_{20}) \operatorname{cn}[2\mathbf{K}(k_{20})\varphi/\pi] = 8\omega_2 \sqrt{1 - 2k_{20}^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2m - 1)\varphi, \quad (6.2)$$

где  $\varphi = \omega_2 t$ ,

$$a_m = \frac{d_2^{m-1/2}}{1 + d_2^{2m-1}}, \quad d_2 = \exp\left(\frac{-\pi\mathbf{K}(\sqrt{1 - k_{20}^2})}{\mathbf{K}(k_{20})}\right). \quad (6.3)$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение системы (1.1), приходим к уравнению

$$\ddot{x} + x - x^3 = \varepsilon \left[ (p_1 - x^2)\dot{x} + 8p_2\omega_2 \sqrt{1 - 2k_{20}^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2m - 1)\varphi \right]. \quad (6.4)$$

Отметим, что чем ближе  $k_{20}$  к нулю, т. е. чем ближе предельный цикл уравнения (6.1) к началу координат, тем большую роль играет первая гармоника в разложении (6.2). При этом амплитуда периодического возмущения в (6.4) стремится к нулю при  $k_{20} \rightarrow 0$ .

Вопрос о взаимном расположении сепаратрисных многообразий седловых периодических движений  $L_\varepsilon^\pm$  в уравнении (6.4), которым в невозмущенном уравнении отвечают состояния равновесия типа «седло», решается с помощью формулы Мельникова [10]

$$\Delta_\varepsilon(t_0) = \varepsilon\Delta_1(t_0) + \varepsilon^2\Delta_2(t_0) + \dots \quad (6.5)$$

Здесь  $\Delta_\varepsilon(t_0)$  определяет расстояние между родственными ветвями сепаратрисы, на которые расщепляется невозмущенная сепаратриса. При этом в [10] предполагается, что возмущение

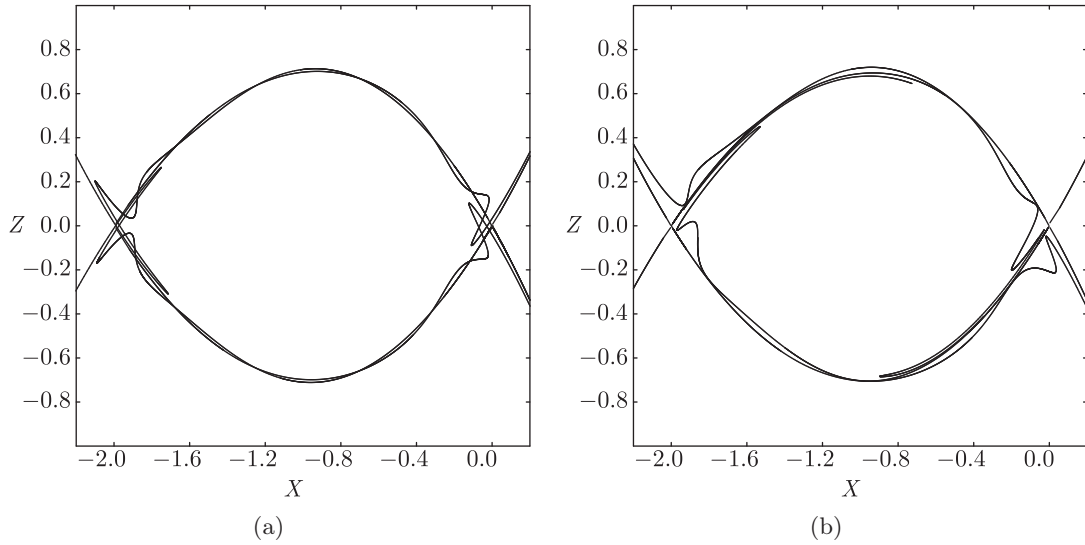


Рис. 4. Гомоклиническая структура Пуанкаре на секущей  $(x, z = \dot{x})$  в случае  $\varepsilon = 0.1$  при  $p_1 = 0,2$  (a) и при  $p_1 = 0.1$  (b).

обращается в нуль при любых  $t$  в состоянии равновесия типа «седло» невозмущенного уравнения. Очевидно, этого нет для уравнения (6.4). Поэтому это уравнение предварительно преобразуется так, чтобы указанное условие выполнялось. Рассмотрим верхнюю полуплоскость (в силу симметрии для нижней полуплоскости имеет место аналогичный результат). Для этого сделаем в (6.4) замену  $x = \xi + 1 + \varepsilon x_1^+(t) + O(\varepsilon^2)$ , где  $x_1^+(t)$  – положительное решение уравнения

$$\ddot{x}_1^+ - 2x_1^+ = 8p_2\omega_2 \sqrt{1 - 2k_{20}^2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(2m - 1)\omega_2 t.$$

В результате приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} - 2\xi - 3\xi^2 - \xi^3 = \varepsilon[3x_1^+ \xi(2 + \xi) + (p_1 - (\xi + 1)^2)\dot{\xi}]. \quad (6.6)$$

Используя [12], получаем

$$\Delta_1(t_0) = 8p_2\omega_2^2 \sqrt{1 - 2k_{20}^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\text{sh}(\pi k\omega_2/\sqrt{2})} a_k \cos(k\omega_2 t_0) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(p_1 - 0.2). \quad (6.7)$$

Отсюда находим условие существования гомоклинической структуры Пуанкаре (трансверсальное пересечение сепаратрисных многообразий). На рис. 4а представлена гомоклиническая структура для отображения Пуанкаре при  $p_2 = 0.2$ , индуцированная уравнением (6.6). На рис. 4б при  $p_2 = 0.1$  показан случай, когда устойчивые и неустойчивые сепаратрисы касаются (по этому поводу см. [12]).

В силу (6.2), (6.3) можно ограничиться в разложении (6.7) первой гармоникой. В результате получим более простое условие существования гомоклинической структуры:

$$\left| p_2\omega_2^2 \sqrt{1 - 2k_{20}^2} \frac{a_1}{\text{sh}(\pi\omega_2/\sqrt{2})} \right| \geq \left| \frac{p_1 - 0.2}{6\sqrt{2}} \right|. \quad (6.8)$$

При  $p_1 = 0.2$  существует нерегулярное притягивающее (изнутри) множество. При этом значении параметра  $p_1$  в автономном уравнении (3.1) устойчивый предельный цикл «влипает в сепаратрису».

## 7. Численные результаты

Будем рассматривать только случай 2). Возьмем в качестве начальной точки  $(x_0, 0, y_0, 0)$ , где

$$x_0 = \sqrt{\frac{2k_1^2}{1+k_1^2}}, \quad y_0 = \sqrt{\frac{2k_2^2}{1-2k_2^2}}. \quad (7.1)$$

Это значение  $x_0$  ( $y_0$ ) определяется как точка пересечения замкнутой фазовой кривой первого (второго) невозмущенного осциллятора с осью  $x$  ( $y$ ). Ниже будут приведены результаты, полученные для случаев непроходимых и частично проходимых резонансных уровней. При численном счете будем использовать программу WinSet [13], а также Maple.

### 7.1. Случай непроходимых резонансных уровней

В этом случае

$$\begin{aligned} B_1(k_1, p_1) &= 0, \\ B_2(k_2, p_3) &= 0, \\ p\omega_1(k_1) &= q\omega_2(k_2). \end{aligned} \quad (7.2)$$

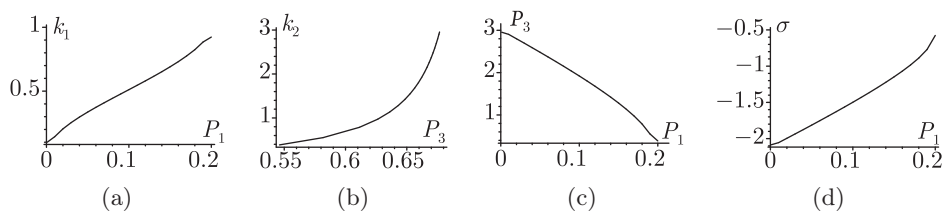


Рис. 5. Кривые  $B_1(k_1, p_1) = 0$  (а),  $B_2(k_2, p_3) = 0$  (б); зависимость  $p_3$  от  $p_1$  (с) и  $\sigma$  от  $p_1$  (д).

Первое и второе уравнения системы (7.2) определяют на плоскости  $(k_1, p_1)$  и  $(k_2, p_3)$  кривые, представленные на рис. 5а, б. Тогда из последнего уравнения системы (7.2) находят зависимость  $p_3(p_1)$ , показанную на рис. 5с для  $p = 3$ ,  $q = 1$ . Из (4.24) получаем зависимость дивергенции векторного поля  $\sigma(p_1)$ , показанную на рис. 5д.

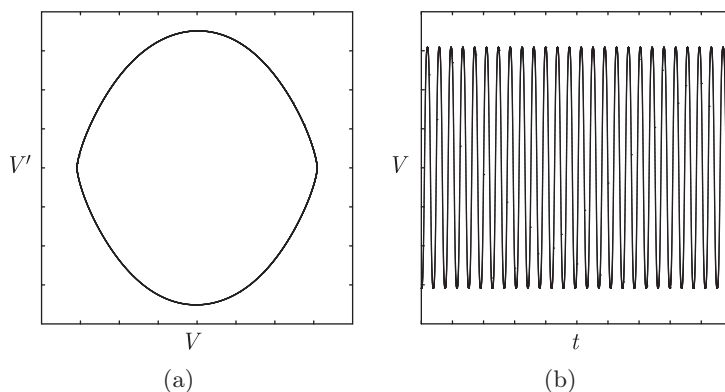


Рис. 6. Проекция устойчивого периодического решения системы (1.1) на плоскость  $(x, \dot{x})$  (а) и график зависимости  $x(t)$  в случае непроходимого резонансного уровня при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $p_1 = 0.1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 1.920505960$ ,  $p_4 = 1$ .

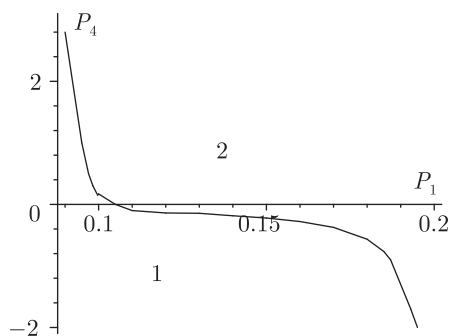


Рис. 7. Область 2 существования нетривиальной резонансной структуры при  $p_2 = 0.01$ ,  $p_3 = 0.2$  для частично проходимого резонанса  $p = 3$ ,  $q = 1$ .

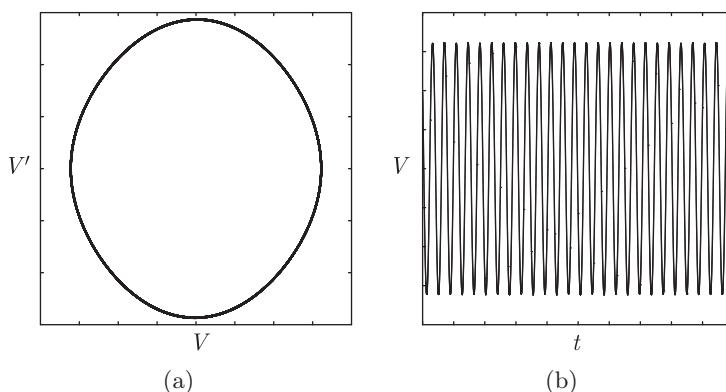


Рис. 8. Проекция устойчивого периодического решения системы (1.1) на плоскости  $(x, \dot{x})$  (а) и график зависимости  $x(t)$  в случае частично проходимого резонансного уровня ( $p_1 = 0.1$ ,  $p_2 = 0.02$ ,  $p_3 = 0.2$ ,  $p_4 = 5$ )

Например, возьмем  $p_1 = 0.1$ . Тогда находим  $p_3 \approx 1.920505960$  (см. рис. 5(c)). Из уравнения  $B_1(k_1, p_1) = 0$  определим модуль эллиптического интеграла  $k_1 \approx 0.5115459364$ , а из уравнения  $B_2(k_2, p_3) = 0$  найдем  $k_2 \approx 0.6621238494$ . Используя эти значения  $k_1$  и  $k_2$  из (7.1) найдем  $x_0 \approx 0.6440582645$ ,  $y_0 \approx 2.667946086$ . Интегрируя (1.1) при начальном условии  $(x_0, 0, y_0, 0)$ , находим резонансное периодическое решение. На рис. 6 для резонанса  $p = 3$ ,  $q = 1$  представлена проекция устойчивого периодического решения системы (1.1) на плоскость  $(x, \dot{x})$  (а) и график зависимости  $x(t)$  при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_4 = 1$  (б).

### 7.2. Случай частично проходимых резонансных уровней

В отличие от случая непроходимых резонансных уровней условие существования нетривиальных резонансных структур будет выполняться не для любых параметров связи  $p_2$ ,  $p_4$ .

Отметим, что условие (5.2) инвариантно относительно преобразования  $p_2 \rightarrow -p_2$ ,  $p_4 \rightarrow -p_4$ .

Рассмотрим резонанс  $p = 3$ ,  $q = 1$ . Положим  $\varepsilon = 0,1$ . Пусть  $p_2 = 0.01$ ,  $p_3 = 0.2$ . В этом случае система (5.3) примет вид

$$\frac{0.03B_2(k_2, 0.2) = p_4 B_1(k_1, p_1)}{\sqrt{1 + k_1^2 \mathbf{K}(k_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2k_2^2 \mathbf{K}(k_2)}}. \tag{7.3}$$

Тогда плоскость параметров  $(p_1, p_4)$  разбивается на две области, приведенные на рис. 7. При выборе параметров из области 1 плоскости  $(p_1, p_4)$  система (7.3) не имеет решения.

При переходе из области 1 в область 2 система (7.3) будет иметь решение, удовлетворяющее условиям:  $|A_{1*}| > |B_1|$ ,  $|A_{2*}| > |B_2|$ .

Пусть  $p_1 = 0.1$ ,  $p_2 = 0.02$ ,  $p_3 = 0.2$ ,  $p_4 = 0.5$  (точка из области 2 рис. 7). При заданном значении  $p_1$  из системы (7.3) находим значения модулей эллиптического интеграла:  $k_1 = 0.9180753679$ ,  $k_2 = 0.5525768865$ . Используя эти значения  $k_1$  и  $k_2$ , из (7.1) найдем начальную точку  $(0.9564161053; 0; 1.252436487; 0)$ . Интегрируя систему (1.1) с этими начальными условиями, находим периодическое решение периода  $\frac{2\pi}{3}$ . На рис. 8 представлены проекция этого периодического решения на плоскости  $(x, \dot{x})$  и график зависимости  $x(t)$ .

Работа поддержана РФФИ, грант № 09-01-00356, а также ФЦП «Кадры», № НК-13П-13.

## Список литературы

- [1] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
- [2] Rompala K., Rand R., Howland H. Dynamics of tree coupled van der Pole oscillators with application to circadian rhythms // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2007, no. 12, pp. 794–803.
- [3] Kozlov A. K., Sushchik M. M., Molkov Ya. I., Kuznetsov A. S. Bistable phase and chaos in a system of coupled van der Pol–Duffing oscillators // Internat. J. Bifur. and Chaos, 1999, vol. 12, pp. 2271–2277.
- [4] Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Phys. D, 2009, vol. 238, pp. 1203–1215.
- [5] Драгунов Т. Н., Морозов А. Д. К исследованию системы типа Хенона–Хейлеса // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 1, с. 43–54.
- [6] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 420 с.
- [7] Морозов А. Д. К исследованию резонансов в системе нелинейных слабосвязанных осцилляторов // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1984. С. 147–158.
- [8] Борисюк Г. Н. Осцилляторные нейронные сети: Математические результаты и приложения / Г. Н. Борисюк, Р. М. Борисюк, Я. Б. Казанович, Т. Б. Лузянина, Т. С. Турова, Г. С. Цымбалюк // Математическое моделирование, 1992, т. 4, № 1, с. 3–43.
- [9] Morozov A. D., Kondrashov R. E. On resonances in systems of two weakly connected oscillators // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 2, pp. 237–247.
- [10] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Московск. матем. общ-ва, 1963, т. 12, с. 3–52.
- [11] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб., 1967, т. 74, № 3, с. 378–397.
- [12] Морозов А. Д. О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга // Дифференц. уравн., 1976, т. 12, № 2, с. 241–255.
- [13] Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. 304 с.