

# Визуализация фазовых траекторий динамической системы Рикитаки

**В. И. Потапов**

ГОУ ВПО Норильский индустриальный институт  
663310, Россия, г. Норильск, ул. 50 лет Октября, д. 7

PotapovVI@norvuz.ru

*Получено 10 января 2010 г.*

В статье проведено компьютерное исследование четырехмерной динамической системы Рикитаки с тремя параметрами, адекватно описывающей работу модели спаренных динамо с учетом вязкого трения. Показано, что в этой системе имеется пять состояний равновесия: четыре устойчивых фокуса-узла и одно седло (3, 1). Установлены бифуркации рождений пространственных перекрученных циклов, соответствующие удвоению периода колебаний динамической переменной и приводящие к хаотическим колебаниям при увеличении отношения коэффициентов трения.

Ключевые слова: система Рикитаки, состояния равновесия, предельные циклы, хаос

**V. I. Potapov**

## Visualization of phase trajectories of the Rikitake dynamic system

In paper the computer research of four-dimensional dynamic system with three parameters adequately describing behavior of model coupled Dynamo in view of viscous friction is carried out. Is shown, that in this system there are five equilibrium states: four stable are focuses-node and one is saddle (3, 1). Are established the bifurcations of the spatial overwound cycles appropriate to doubling of the period of oscillations dynamic variable and resulting to chaotic oscillations at increase of the relation of factors friction.

Keywords: Rikitake system, equilibrium states, limit cycles, chaos  
Mathematical Subject Classification 2000: 70H05, 70K44

## 1. Введение

Исследования геомагнитного поля Земли показывают [1], что оно претерпевает инверсии и вариации с периодами  $10^2$ ,  $10^3$  и  $10^4$ . Это объясняет наличие дискретного временного спектра вековых вариаций, что является основной причиной возникновения так называемых МАК-волн в ядре Земли. Они образуются при действии электромагнитных сил, кориолисовых сил и сил Архимеда. Случайный характер инверсии магнитной оси земного шара связан с тем, что при существующих параметрах ядра земное динамо работает в режиме близком к неустойчивому, и при небольших внешних воздействиях устойчивый режим сменяется хаотическим. Э. Буллард [2], пытаясь объяснить явление инверсии магнитной оси, показал, что в униполярной динамо-машине (в модели однодискового динамо) при любых условиях движения не происходит изменения направления индуцированного поля на обратное.

Далее С. Ранкорн [2], используя тот факт, что в ядре при вращении его с относительной угловой скоростью возникает внутреннее вихревое поле  $B$ , показал, что уравнения магнитной гидродинамики теоретически позволяют получить изменения направления магнитного момента земного ядра на обратное. Также С. Ранкорн предположил, что наблюдаемое магнитное поле на земной поверхности представляет собой вторичное по отношению к внутреннему вихревому полю, которое вместе с движением жидкой массы ядра является причиной возникновения токов в ядре. Теория самообращения С. Ранкорна лишь математически доказывала возможность такого процесса, а физически решением этой проблемы явилась модель двойного динамо [1], предложенная в 1958 году Т. Рикитаки (рис. 1).

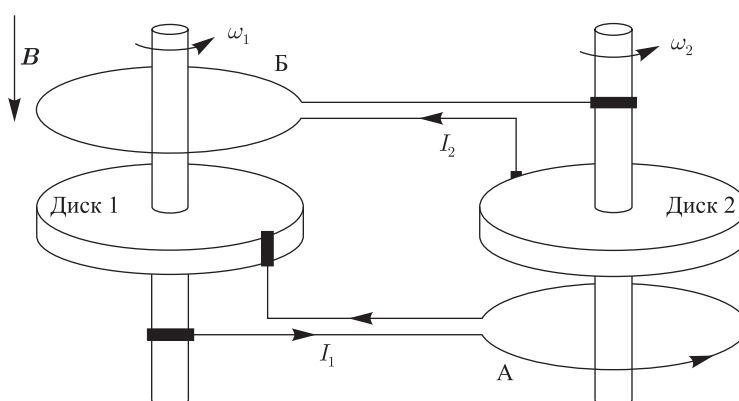


Рис. 1. Связанная система из двухдисковых динамо.

Модель Рикитаки по сравнению с однодисковой не только могла самовозбуждаться, но и при критических значениях параметров могла находиться в неустойчивом состоянии, которое приводило к изменению как величины, так и направления вектора возбуждаемого ею магнитного поля. При вращении обоих дисков (рис. 1) с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в магнитном поле  $B$ , направление вектора которого совпадает с осью вращения, в каждом из дисков возникает э. д. с. и ток, направленные от периферии к центру или от центра к периферии, в зависимости от направления  $\omega$  и  $B$ . Вследствие этого в контуре А (рис. 1) потечет ток, возбуждаемый диском 1, который начнет взаимодействовать с током в диске 2. И наоборот, ток в контуре Б начнет взаимодействовать с током в диске 1. Такое взаимодействие приведет к перераспределению как скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , так и возбуждаемых токов  $I_1$  и  $I_2$ , а следовательно, и магнитных полей, создаваемых каждым контуром. Так в этой модели будет осуществляться процесс генерации и регенерации магнитного поля. Теория этого

модельного процесса, данная Т. Рикитаки, сводится к решению уравнений движения дисков и их электромагнитного состояния. Эти уравнения по законам механики и электродинамики могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} J_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = M_{\omega_1} - M_{1,2} \cdot I_1 \cdot I_2, \\ J_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = M_{\omega_2} - M_{2,1} \cdot I_1 \cdot I_2, \\ L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + R_1 \cdot I_1 = \omega_1 \cdot M_{1,2} \cdot I_2, \\ L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + R_2 \cdot I_2 = \omega_2 \cdot M_{2,1} \cdot I_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности дисков 1 и 2, а  $J_1$  и  $J_2$  — их моменты инерции;  $M_{1,2}$  и  $M_{2,1}$  — взаимные индуктивности между контуром А и диском 2, контуром Б и диском 1 соответственно;  $R_1$  и  $R_2$  — сопротивления контуров А и Б;  $M_{\omega_1}$  и  $M_{\omega_2}$  — моменты вращения дисков, вызванные внешними силами.

Следуя Т. Рикитаки [1], считаем, что  $L_1 = L_2 = L$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ,  $M_{1,2} = M_{2,1} = M$ ,  $J_1 = J_2 = J$ , и  $M_{\omega_1} = M_{\omega_2} = M_{\omega}$ , и тогда в безразмерных переменных  $X_1, X_2, X_3, X_4$  и  $\tau$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{\frac{M_{\omega}}{M}} \cdot X_1, & I_2 &= \sqrt{\frac{M_{\omega}}{M}} \cdot X_2, & \omega_1 &= \sqrt{\frac{M_{\omega} \cdot L}{J \cdot M}} \cdot X_3, & \omega_2 &= \sqrt{\frac{M_{\omega} \cdot L}{J \cdot M}} \cdot X_4, \\ t &= \sqrt{\frac{J \cdot L}{M \cdot M_{\omega}}} \cdot \tau, \end{aligned} \quad (1.2)$$

система (1.1) с учетом трения принимает вид [5]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -\mu \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -\mu \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4, \\ \frac{dx_3}{d\tau} = 1 - x_1 \cdot x_2 - \nu_1 \cdot x_3, \\ \frac{dx_4}{d\tau} = 1 - x_1 \cdot x_2 - \nu_2 \cdot x_4, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — безразмерные токи,  $x_3$  и  $x_4$  — безразмерные угловые скорости дисков,  $\mu$  — коэффициент омической диссипации,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — коэффициенты трения в дисках 1 и 2 соответственно. Замечаем, что реальное время связано с безразмерным соотношением [4]:

$$t = \sqrt{\tau_e \cdot \tau_m} \cdot \tau, \quad (1.4)$$

где  $\tau_m$  — механическое время, равное

$$\tau_m = \frac{J \cdot R}{M_{\omega} \cdot M}, \quad (1.5)$$

это время, за которое диски разгоняются до типичного значения угловой скорости

$$\omega = \frac{R}{M}, \quad (1.6)$$

а  $\tau_e$  — электромагнитное время, равное

$$\tau_e = \frac{L}{R}, \quad (1.7)$$

это время, за которое исчезнут магнитные поля в случае остановки дисков.

Отношение этих времен связано с коэффициентом омической диссипации:

$$\mu^2 = \frac{\tau_m}{\tau_e} = \frac{J \cdot R^2}{M_{\omega} \cdot L \cdot M}, \quad (1.8)$$

что совпадает с отношением запасенной механической энергии к запасенной электромагнитной энергии.



## 2. Состояния равновесия в модели Рикитаки и их локальная устойчивость

В работе [4] авторы исследовали систему (1.1) без учета трения сведением к трехмерной. В настоящей статье изучается обобщенная модель связанной системы двухдискового динамо с учетом вязкого трения в дисках 1 и 2, адекватно описывающейся четырехмерной динамической системой (1.3) с квадратичной нелинейностью и тремя параметрами ( $\mu > 0$ ,  $\nu_1 > 0$ ,  $\nu_2 > 0$ ), дивергенция векторного поля которой всегда отрицательна:

$$\operatorname{div}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2\mu - \nu_1 - \nu_2. \quad (2.1)$$

Это означает, что система Рикитаки (1.3) диссипативная, и ее четырехмерный объем уменьшается при движении вдоль траекторий фазового пространства, а предельное множество фазовых траекторий такой системы всегда имеет топологическую меру нуль в четырехмерном пространстве.

Установлено, что система (1.3) имеет пять состояний равновесия:

$$\begin{aligned} O_1 & \left( \sqrt{\frac{1}{k} - \mu \cdot \nu_2}; \sqrt{k - \mu \cdot \nu_1}; \frac{\mu}{k}; \mu \cdot k \right), \\ O_2 & \left( -\sqrt{\frac{1}{k} - \mu \cdot \nu_2}; -\sqrt{k - \mu \cdot \nu_1}; \frac{\mu}{k}; \mu \cdot k \right), \\ O_3 & \left( \sqrt{\frac{1}{k} - \mu \cdot \nu_2}; -\sqrt{k - \mu \cdot \nu_1}; -\frac{\mu}{k}; -\mu \cdot k \right), \\ O_4 & \left( -\sqrt{\frac{1}{k} - \mu \cdot \nu_2}; \sqrt{k - \mu \cdot \nu_1}; -\frac{\mu}{k}; -\mu \cdot k \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$O_5 \left( 0; 0; \frac{1}{\nu_1}; \frac{1}{\nu_2} \right), \quad (2.3)$$

где

$$\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} = k. \quad (2.4)$$

При этом параметры системы (1.3) находятся в области, удовлетворяющей неравенству

$$\mu < \frac{1}{\sqrt{\nu_1 \cdot \nu_2}}. \quad (2.5)$$

Собственные значения матрицы Якоби  $A$  находятся из характеристического уравнения вида

$$\begin{aligned} \lambda^4 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda^3 + (M_{1122} + M_{1133} + M_{1144} + M_{2233} + M_{2244} + M_{3344}) \cdot \lambda^2 - \\ - (M_{11} + M_{22} + M_{33} + M_{44}) \cdot \lambda + \det A = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $M_{ijj}$  — главные диагональные миноры второго порядка, полученные из матрицы  $A$  вычеркиванием  $i$ -й строки,  $i$ -го столбца и  $j$ -й строки,  $j$ -го столбца, а  $M_{ii}$  — главные диагональные миноры третьего порядка, полученные вычеркиванием  $i$ -й строки и  $i$ -го столбца.



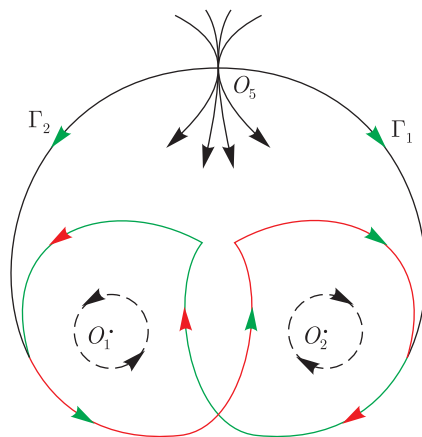


Рис. 2. Бифуркация рождения перекрученного цикла в  $R^4$  из сепаратрис седла  $(3, 1)$ ,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — гетероклинические траектории,  $O_1$  и  $O_2$  — устойчивые фокусы.

После вычислений во всех четырех состояниях равновесия (2.2) характеристические уравнения матрицы Якоби  $A$  принимают из (2.6) одинаковый вид:

$$\lambda^4 + (2\mu + \nu_1 + \nu_2) \cdot \lambda^3 + (\nu_1 \cdot \nu_2 + \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} + \mu(\nu_1 + \nu_2)) \cdot \lambda^2 + \frac{2\nu_1\nu_2 + 2\mu(\nu_1 + \nu_2) \cdot (1 - \mu\sqrt{\nu_1\nu_2})}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \cdot \lambda + 4\mu\sqrt{\nu_1\nu_2}(1 - \mu\sqrt{\nu_1\nu_2}) = 0. \quad (2.7)$$

Это означает, что состояния равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) имеют один и тот же топологический тип в  $R^4$ .

Легко заметить, что у многочлена четвертой степени в записи (2.7) все коэффициенты при допустимых значениях параметров (2.5) положительны, поэтому перемен знаков в их последовательности нет. Следовательно, по теореме Декарта уравнение (2.7) положительных корней не имеет. Кроме того, с помощью компьютерной программы убеждаемся, что все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны. Тогда, согласно критерию Рауса–Гурвица [3], в области параметров (2.5) корни характеристического уравнения (2.7) отрицательные и с отрицательными действительными частями. Таким образом, состояния равновесия (2.2) являются устойчивыми в  $R^4$ .

В пятом состоянии  $O_5(0; 0; \frac{1}{\nu_1}; \frac{1}{\nu_2})$  собственные значения матрицы Якоби  $B$  вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} - \mu, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} - \mu, \quad \lambda_3 = -\nu_1, \quad \lambda_4 = -\nu_2. \quad (2.8)$$

В области (2.5) первое значение всегда положительно, остальные три — отрицательные; следовательно, состояние равновесия  $O_5$  — седло  $(3, 1)$ . В интерпретации А. Тондла [7] это седло первого рода: две траектории выходят из особой точки  $O_5$ , а траектории, входящие в состояние равновесия, образуют трехмерную поверхность сепаратрис [6].

После детального компьютерного исследования динамической системы Рикитакки (1.3) замечаем, что при всевозможных значениях параметров  $\mu$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  состояния равновесия (2.2) являются устойчивыми фокусами-узлами с парой комплексно-сопряженных корней с отрицательными действительными частями и двумя отрицательными действительными

ми корнями:

$$\lambda_4 < \lambda_3 < \operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0. \quad (2.9)$$

При этом существуют поверхности в  $R^4$ , разделяющие бассейны притяжения и отталкивания фазовых траекторий. Фазовые траектории притягиваются либо к состоянию равновесия  $O_5$ , либо к предельному циклу, либо к одному из состояний равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) в зависимости от начальных условий. В малой окрестности некоторых устойчивых фокусов  $O_i$  образуются неустойчивые циклы при критических значениях параметров (рис. 2).

### 3. Компьютерное исследование модели Рикитаки

Убедимся в этом, придавая параметрам критические значения

$$\mu = 0.2, \quad \nu_1 = 0.022, \quad \nu_2 = 0.02,$$

при которых получаются следующие характеристические корни матриц Якоби:

$$\operatorname{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -0.011 + 1.412i \\ -0.011 - 1.412i \\ -0.021 \\ -0.4 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{eigenvals}(B) = \begin{pmatrix} 47.473 \\ -47.873 \\ -0.022 \\ -0.02 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что в этом случае реализуется единственный перекрученный цикл (рис. 3) в проекции в трехмерное пространство  $(X_1, X_2, X_3)$  [6].

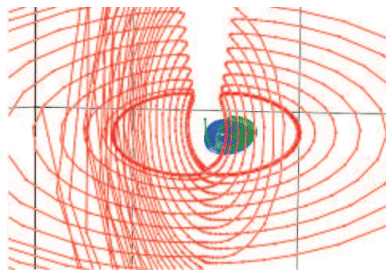


Рис. 3. Фазовые траектории в системе Рикитаки при  $\mu = 0.2$ ,  $\nu_1 = 0.022$ ,  $\nu_2 = 0.02$ .

Такому циклу соответствуют колебания токовой переменной с удвоением периода (рис. 4).

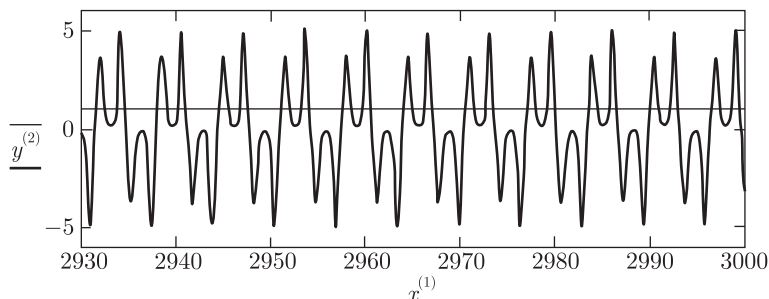


Рис. 4. Колебания тока  $x_1$  в катушке диска 1.

Однако при  $\nu_1 = 0.04$  и  $\nu_2 = 0.02$  при любых начальных условиях система (1.3) быстро осциллирует к состояниям равновесия (2.2). Уменьшаем коэффициенты вязкого трения до  $\nu_1 = 0.0022$  и  $\nu_2 = 0.002$  и получаем такие корни матриц Якоби:

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -1.052 \cdot 10^{-3} + 1.415i \\ -1.052 \cdot 10^{-3} - 1.415i \\ -2.095 \cdot 10^{-3} \\ -0.4 \end{pmatrix}, \quad \text{eigenvals}(B) = \begin{pmatrix} 476.531 \\ -476.931 \\ -2.2 \cdot 10^{-3} \\ -2 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Картина поведения фазовых траекторий в окрестности состояний равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) приведена на рис. 5.

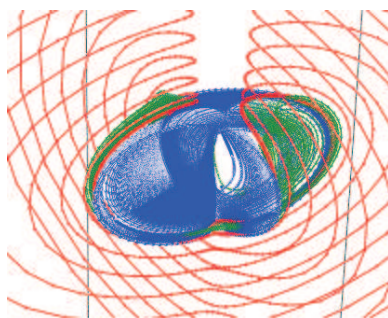


Рис. 5. Предельные циклы в системе Рикитаки при  $\mu = 0.2$ ,  $\nu_1 = 0.0022$ ,  $\nu_2 = 0.002$ .

Вновь идут колебания токовой переменной  $x_1$  такой же формы, как на рис. 4 (см. рис. 6).

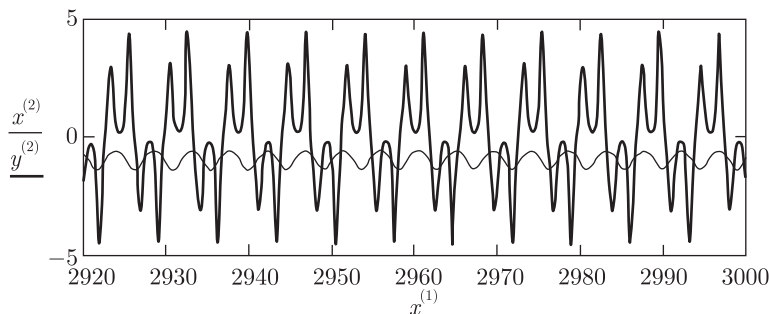


Рис. 6. Колебания тока  $x_1$  в катушке диска 1.

Это означает, что предельные циклы на рисунках 5 и 3 имеют одинаковую конфигурацию.

Заметим, что при  $\nu_1 = 0.004$  и  $\nu_2 = 0.002$  незатухающие осцилляции с удвоением периода остаются только при положительных начальных условиях.

Еще уменьшаем коэффициенты трения до  $\nu_1 = 0.00022$  и  $\nu_2 = 0.0002$  и получаем характеристические корни матриц Якоби:

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -1.052 \cdot 10^{-4} + 1.415i \\ -1.052 \cdot 10^{-4} - 1.415i \\ -2.095 \cdot 10^{-4} \\ -0.4 \end{pmatrix}, \quad \text{eigenvals}(B) = \begin{pmatrix} 4.767 \cdot 10^3 \\ -4.768 \cdot 10^3 \\ -2.2 \cdot 10^{-4} \\ -2 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

При заданных начальных условиях система Рикитаки в течение длительного времени совершает движения по трем разным замкнутым орбитам типа перекрученного пространственного цикла (рис. 7).

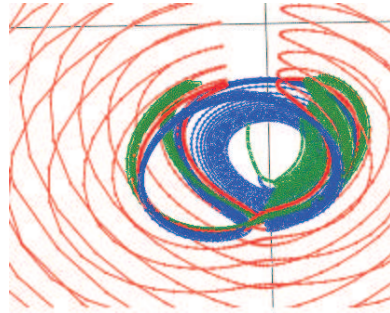


Рис. 7. Предельные циклы в системе Рикитаки при  $\mu = 0.2$ ,  $\nu_1 = 0.00022$ ,  $\nu_2 = 0.0002$ .

Такой фазовой картине соответствуют колебания с удвоением периода (рис. 8).

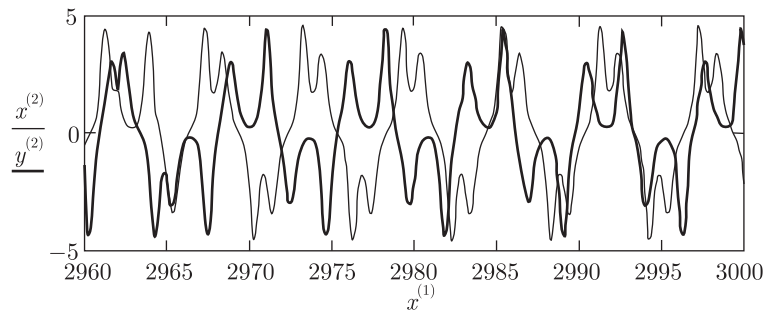


Рис. 8. Колебания тока  $x_1$  в катушке диска 1.

И топология фазовых траекторий, и динамика фазовых переменных при  $\nu_1 = 0.0004$ ,  $\nu_2 = 0.0002$  такая же, как на рис. 7–рис. 8.

При других критических значениях коэффициента омической диссипации  $\mu = 0,5; 1; 2,3$  и при тех же коэффициентах вязкого трения  $\nu_1$  и  $\nu_2$  система Рикитаки не испытывает хаотических колебаний.

Однако увеличивая отношение  $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ , например  $\nu_1 = 0.034$  и  $\nu_2 = 0.001$ , получаем сложную топологическую картину в окрестности состояний равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) при  $\mu = 2.3$  (рис. 9).

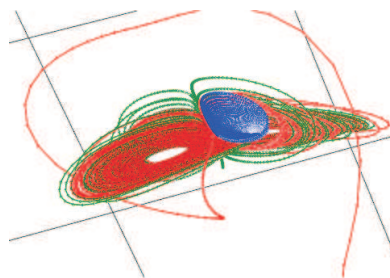


Рис. 9. Хаос в системе Рикитаки при  $\mu = 2.3$ ,  $\nu_1 = 0.034$ ,  $\nu_2 = 0.001$ .



Здесь характеристические корни матриц Якоби:

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -4.6 \\ -0.017 + 2.433i \\ -0.017 - 2.433i \\ -1.943 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad \text{eigenvals}(B) = \begin{pmatrix} 169.199 \\ -173.799 \\ -0.034 \\ -0.001 \end{pmatrix}.$$

На начальном интервале времени токовая переменная  $x_1$  испытывает хаотические колебания (рис. 10).

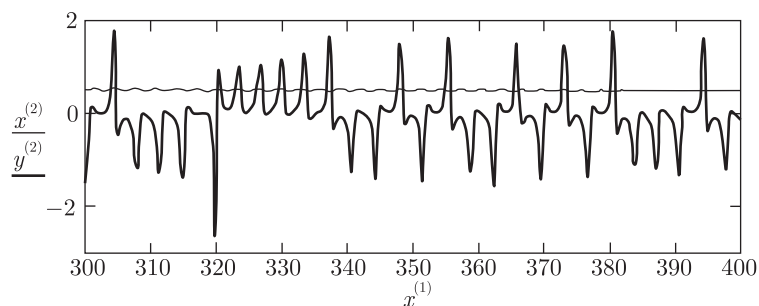


Рис. 10. Нерегулярные колебания тока  $x_1$  в катушке диска 1.

Далее и на конечном интервале ток  $x_1$  продолжает испытывать хаотические колебания (рис. 11).

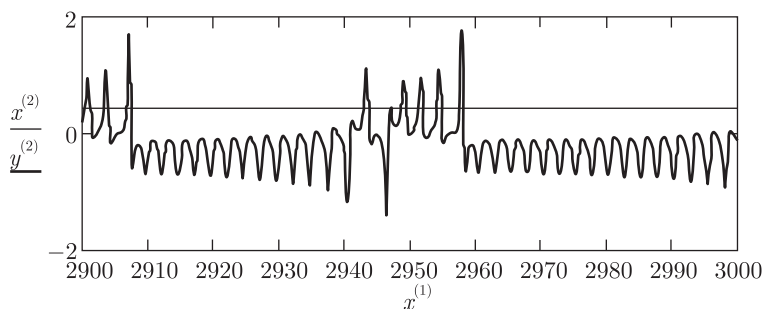


Рис. 11. Нерегулярные колебания тока  $x_1$  в катушке диска 1.

#### 4. Заключение

После детального компьютерного исследования системы (1.3) убеждаемся, что характеристические корни матрицы Якоби  $A$  не переходят через мнимую ось; следовательно, бифуркация Андронова–Хопфа в модели двухдискового динамо не реализуется [8]. Однако возможна бифуркация, изображенная на рис. 2.

Замечаем, что токовая, а следовательно, и магнитная переменные колеблются сначала около некоторого стационарного состояния  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), а затем, увеличивая амплитуду, внезапно начинают испытывать колебания уже вокруг другого стационарного состояния. Таким образом моделируется возможность инверсий магнитного поля Земли. Показано,



что в системе Рикитакки имеются инвариантные многообразия (предельные поверхности в  $R^4$ ), на которые накручиваются фазовые траектории при достаточно длительном времени (рис. 3, 5, 7, 9). При этом при одних начальных условиях после длительных осцилляций фазовая траектория сваливается на стационар, а при других начальных условиях фазовая траектория продолжает осциллировать (рис. 4, 6, 8). Следовательно, около некоторых состояний равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) образуются неустойчивые циклы малого радиуса (рис. 3, 5, 7). Из проделанных компьютерных исследований замечаем, что при увеличении коэффициентов трения до  $\nu_1 = 0.022$  и  $\nu_2 = 0.02$  идет удвоение периода цикла (рис. 4, 6, 8), но хаотические колебания наступают только при  $\nu_1 = 0.034$  и  $\nu_2 = 0.001$  (рис. 9, 10, 11).

В работе Кука и Робертса [4] изучалась модель связанной системы двухдискового динамо Рикитакки без учета вязкого трения в дисках 1 и 2 (рис. 1), которую авторы легко сводили к трехмерной динамической системе. Эта система имела два стационарных решения, причем один из трех параметров неудачно выражался через отношение токовых переменных, т. е.  $K^2 = \frac{I_1}{I_2}$ .

В нашем случае с учетом вязкого трения получается четырехмерная динамическая система (1.3) с тремя параметрами  $\mu$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , компьютерное исследование которой проводилось в зависимости от вариации как  $\nu_i$  ( $i = 1, 2$ ), так и коэффициента омической диссипации  $\mu$ . Показано, что такая система имеет пять стационарных решений (2.2), (2.3), четыре из которых — устойчивые пространственные фокусы-узлы, а пятое — четырехмерное седло (3, 1), где естественно появляется коэффициент отношения (2.4).

Изучалось поведение системы Рикитакки при изменении параметра  $K^2 = \frac{\nu_1}{\nu_2}$  от 1 до 36.

В случае  $\mu = 2.3$  и  $\nu_1 = \nu_2 = 0.00022$  решения  $X_1$  и  $X_2$  релаксируют при любых начальных условиях, но при  $\nu_1 = \nu_2 = 0.0022$  токовая переменная совершает классические колебания с малой амплитудой из далеких начальных условий, а также релаксации с небольшим всплеском с начальными условиями из окрестности  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

При  $\mu = 1$  и  $\nu_1 = \nu_2 = 0.00022$  или  $\nu_1 = \nu_2 = 0.0004$  токовые переменные совершают релаксации в течение длительного времени при любых начальных условиях, а при  $\nu_1 = \nu_2 = 0.0022$  эти переменные испытывают малые осцилляции.

Далее при  $\mu = 0.5$  и  $\nu_1 = \nu_2 = 0.00022$  токовая переменная из далеких начальных условий выходит на стационар, а из близких начальных условий начинает совершать нерегулярные осцилляции с повторением. В случае  $\nu_1 = \nu_2 = 0.0022$  переменные  $X_1$  и  $X_2$  совершают осцилляции с малой амплитудой из далеких начальных условий и релаксационные колебания — из близких.

В случае  $\mu = 0.2$  и  $\nu_1 = \nu_2 = 0.0004$  решения токовых переменных, приходящих издалека, начинают релаксировать, а решения  $X_1$  и  $X_2$ , выходящие из окрестности состояний равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) осциллируют с удвоением периода. Если же при этом  $\nu_1 = \nu_2 = 0.004$ , то решения  $X_1$  и  $X_2$ , начинающиеся издалека, выходят на стационар, а выходящие из окрестности состояния равновесия  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) совершают нерегулярную осцилляцию с резким всплеском и дальнейшим повтором.

И в заключение выражаю благодарность профессору А. Д. Морозову, сделавшему при рецензировании статьи ряд существенных замечаний, устранение которых значительно способствовало ее улучшению, а также благодарю А. Кузьмину (Норильский индустриальный институт) за активное участие в компьютерном исследовании системы.

## Список литературы

- [1] Рикитаки Т. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли. Л.: Недра, 1968. 332 с.
- [2] Яновский Б. М. Земной магнетизм. Л.: ЛГУ, 1978. 592 с.
- [3] Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
- [4] Кук А., Робертс П. Система двухдискового динамо Рикитаки // Странные аттракторы: Сб. ст. / Под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 164–292.
- [5] Ershov S. V., Malinetskii G. G., Ruzmaikin A. A. A generalized two-disk dynamo model // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam., 1989, vol. 47, pp. 251–277.
- [6] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 1. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2004. 416 с.  
Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 2. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2009. 546 с.
- [7] Тондл А. Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир, 1973. 334 с.
- [8] Потапов В. И. Математические модели нелинейных динамических явлений, их численный и качественный анализ. Норильск: Норильский индустр. ин-т, 2005.