

## Оценка параметров зашумленных динамических систем

**В. С. Маляев, Т. Е. Вадивасова**

Физический факультет

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410026, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83

v.malyaev@chaos.ssu.runnet.ru, vadivasovate@yandex.ru

*Получено 11 марта 2010 г.*

Рассматриваются возможности оценки параметров динамических систем, содержащих аддитивный источник шума. Предлагаются простые и эффективные алгоритмы, оптимальные параметры численной схемы и методы фильтрации данных, позволяющие найти значение управляющего параметра зашумленной системы с высокой точностью. Исследуются различные динамические модели и рассматривается точность оценки параметров в различных динамических режимах при различной интенсивности шума.

Ключевые слова: динамическая система, флуктуации, шум, оценка параметров зашумленных систем, бифуркации, хаос

**V. S. Malyaev, T. E. Vadivasova**

### **Parameter estimation in dynamical systems with additive noise**

In the present paper possibilities of parameters estimation are considered in dynamical systems (DS) with additive noise. Simple and effective algorithms, optimal parameter values of numeric simulation and data filtration methods are proposed that enable one to find the controlling parameter value of a noisy DS with a high accuracy. Different DS are studied, and the accuracy of parameter estimation is examined for various dynamical modes and for different noise intensities.

Keywords: dynamical system, fluctuations, noise, parameter estimation, bifurcations, chaos  
Mathematical Subject Classification 2000: 70Kxx, 39Axx

## Введение

Оценка параметров динамических систем, содержащих источники шума, по реализациям динамических (фазовых) переменных является частью глобальной задачи реконструкции динамических систем и, на данный момент, сравнительно мало изучена. Актуальность задач такого характера связана с использованием методов реконструкции в устройствах защиты и передачи секретной информации [1–3]. При этом требуется достаточно точная оценка управляющих параметров динамической системы. В рассмотренных ранее задачах реконструкции шум, как правило, добавлялся к сигналу системы, которая полагалась детерминированной. Разработаны и постоянно совершенствуются методы выделения полезного сигнала из шума [4–6]. В то же время, проблемы, связанные с реконструкцией систем, содержащих источники шума, пока еще исследованы недостаточно. В связи с задачей оценки параметров зашумленной системы мы можем отметить лишь работу [7]. В ней исследуется возможность оценки параметров на примере осциллятора Ван дер Поля в режиме зашумленных автоколебаний. Однако предлагаемый в [7] алгоритм оценки является слишком сложным и малоэффективным. Кроме того, на основании исследования лишь одной динамической системы в одном заданном режиме невозможно сделать достаточно общие выводы о возможностях оценки параметров зашумленных динамических систем в различных режимах колебаний.

В данной работе исследуются методы корректной оценки параметров систем с источником шума при использовании численного моделирования исследуемых сигналов и их последующей обработки. Рассматривается следующая задача. Пусть модель динамической системы задана, то есть известны уравнения, определяющие в каждый момент времени состояние системы в отсутствие шума. Требуется определить значение управляющих параметров. Если система является детерминированной, то данная задача легко решается, так как значения параметров можно выразить через значения динамических переменных и их производных. Это можно сделать с высокой точностью, ограниченной только точностью алгоритма численного интегрирования и ошибками округления. Однако, если система подвергается воздействию случайной силы, которое невозможно учесть, то оценки параметров в разные моменты времени оказываются случайными и могут сильно отличаться от истинного значения. Задача о корректной оценке параметров в этом случае оказывается не такой уж простой. Известно, что даже слабый шум может приводить к существенным изменениям в поведении динамической системы [8–10]. Система особенно чувствительна к случайным воздействиям, если она находится вблизи бифуркационных состояний или в режиме негиперболического хаоса [11–15]. Таким образом, возникает целый ряд вопросов. Возможна ли вообще достаточно точная оценка параметров нелинейной динамической системы при наличии случайного воздействия? Если такая оценка возможна, то как можно наиболее точно и быстро ее определить? Как влияет на точность оценки уровень шума? Насколько чувствительной окажется точность оценки параметров к происходящим в системе бифуркациям и переходу в режим динамического хаоса? Цель данной работы — дать ответ на указанный ряд вопросов, используя простые классические модели нелинейной динамики.

# 1. Оценка управляющего параметра осциллятора Ван дер Поля с аддитивным гауссовым шумом. Настройка параметров фильтрации и выбор методов оценки

Рассмотрим классическую модель автогенератора, добавив в нее источник шума:

$$\ddot{x} + w_0^2 x = (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \sqrt{2D}n(t),$$

где  $n(t)$  — нормированный источник белого гауссова шума, для которого  $\langle n(t) \rangle = 0$ ,  $\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$  (скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по ансамблю реализаций),  $D$  — интенсивность шума,  $w_0$  — частота собственных колебаний автогенератора. Можно представить модель в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = (\varepsilon - x^2)y - w_0^2 x + \sqrt{2D}n(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Для простоты будем оценивать только один параметр системы —  $\varepsilon$ , который является управляющим. Частоту колебаний положим постоянной и строго заданной:  $w_0 = 1$ .

Система (1.1) интегрировалась методом Гюна с учетом случайного возмущения [17, 18] с шагом  $h = 0.0001$ . Для оценки значения параметра  $\varepsilon$  проводилась выборка полученных в результате интегрирования значений  $x(t)$  и  $y(t)$ . Шаг выборки  $\Delta t$  был выбран в соответствии с наилучшей получаемой оценкой параметра [16]. Он составил  $\Delta t = 1500$  (т. е. 1500 шагов интегрирования).

Параметр  $\varepsilon$  оценивался по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\dot{y}_i + w_0^2 x_i}{y_i} + x_i^2, \quad (1.2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$  — номер шага выборки. Производная  $\dot{y}_i$  аппроксимировалась выражением [19, 20]:

$$\dot{y}_i = \frac{1}{12h}(y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}). \quad (1.3)$$

Разброс значений текущих оценок  $\varepsilon$ , даже при оптимизации шага выборки, оказывается очень большим (рис.1а). Проводилась фильтрация массива  $\varepsilon$ , из которого выбрасывались значения, существенно отклоняющиеся от среднего. После такой фильтрации применялась оценка  $\varepsilon$  методом наименьших квадратов. Однако настройка и использование такого фильтра не всегда дают желаемый результат. Итоговая оценка параметра  $\varepsilon_0$  по профильтрованному массиву  $\varepsilon_i$  определенная с помощью метода наименьших квадратов может в некоторых случаях давать очень большую (аномальную) ошибку  $\Delta = |\varepsilon_0 - \varepsilon|$ . Это связано с тем, что в (1.2) появляется деление на очень малую величину  $y_i$ . Чтобы уменьшить ошибку связанную с делением на малую величину в системах, где возникает такая необходимость, требуется фильтрация массива исходных данных (в рассматриваемом случае массива  $y_i$ ). Для настройки такого фильтра необходимо выбрать конечный диапазон (в нашем случае  $[-0.001 : 0.001]$ ). Если значение координаты  $y_i$  текущей точки попадает в указанный диапазон, то такая точка исключается из дальнейшего рассмотрения. Следует заметить, что при расчете (1.3) нужно учитывать появившиеся «разрывы» последовательности и рассчитывать только те значения  $\dot{y}_i$ , для которых существуют соседние точки. Массив текущих оценок  $\varepsilon_i$ ,

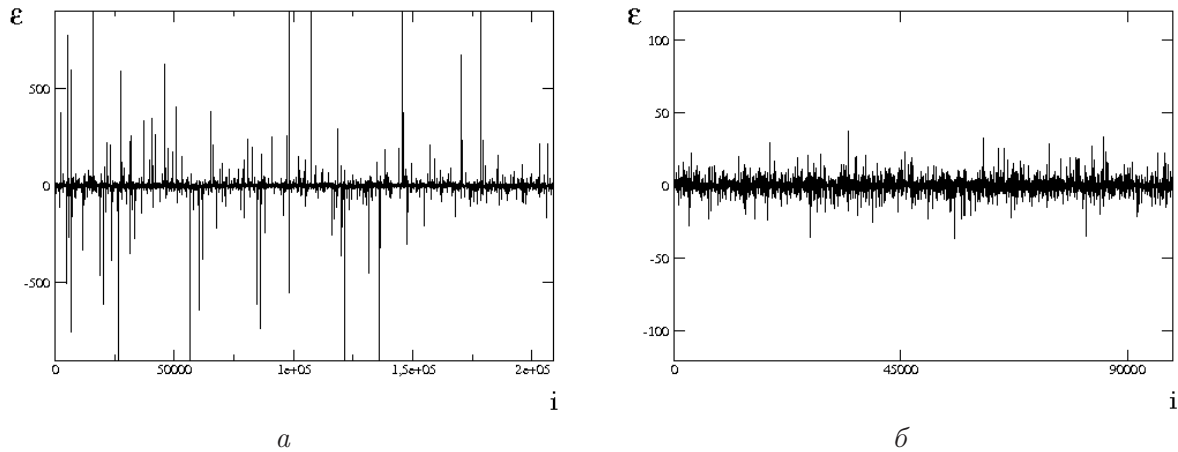


Рис. 1. Массив текущих оценок параметра  $\varepsilon$  в системе (1.1); а — без фильтра малых значений  $y_i$ , б — с фильтром малых значений  $y_i$ . Результаты получены при интенсивности шума  $D = 0.0001$

полученный с применением фильтра малых величин, приведен на рис.1,б. Из приведенных данных видно, что разброс текущих оценок уменьшился на порядок.

Рассмотрим распределение текущих оценок  $\varepsilon_i$ , полученных с использованием профильтрованных данных. Плотность вероятности  $p(\varepsilon_i)$  приведена на рис. 2а. Данное распределение является унимодальным и симметричным, поэтому среднее значение оценки  $\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$  совпадает с наивероятным значением  $\varepsilon_m$ , которое в соответствии с критерием максимального правдоподобия, должно служить оценкой параметра  $\varepsilon_0$ .

На рис. 2,б приведены значения ошибки оценки  $\Delta = |\varepsilon_0 - \varepsilon|$  в зависимости от истинного значения параметра  $\varepsilon$ , полученные без применения фильтра малых  $y_i$  и после его применения. Видно, что без фильтра ошибка  $\Delta$  в некоторых точках и особенно до порога генерации ( $\varepsilon < 0$ ) оказывается очень велика (кривая 1). После применения фильтра ошибка становится заметно меньше (кривая 2), а для режима генерации ( $\varepsilon > 0$ ) не превосходит  $10^{-2}$ . Однако, при отрицательных значениях  $\varepsilon$  (в области существования устойчивой точки равновесия в нуле координат) оценка параметра и после применения фильтра малых значений оказывается значительно хуже, чем в области генерации. В то же время можно утверждать, что сама бифуркация Андронова–Хопфа в точке  $\varepsilon = 0$  слабо влияет на точность оценки.

Для определения точности оценки параметра с ростом интенсивности воздействующего на систему шума введем в рассмотрение относительную ошибку  $\Lambda = \frac{\Delta}{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — истинное значение управляющего параметра. На рис.3 представлена зависимость относительной ошибки оценки  $\Lambda$  от интенсивности шума  $D$ . Из полученного графика можно определить, что воздействующий в достаточно большом диапазоне интенсивностей шум не влияет на величину относительной ошибки, которая не превосходит 0.04 единицы или 4%.

## 2. Оценка параметров в зашумленных системах со сложной динамикой. Влияние бифуркаций удвоения периода циклов и перехода к хаосу

Отработанные для модели (1.1) методы оценки одного из параметров системы с шумом были применены к двум моделям генераторов, демонстрирующих бифуркации удвоения периода и переход к хаосу. Первая модель представляет собой генератор с инерционной

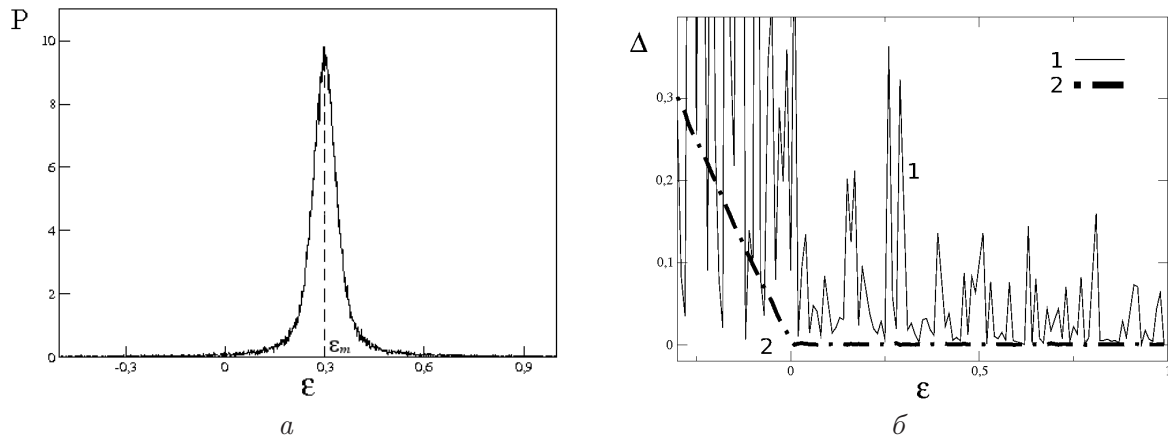


Рис. 2. Результаты расчетов для системы (1.1): а — распределение значений  $\varepsilon_i$  при  $D = 0.0001$ ; б — зависимость  $\Delta$  от  $\varepsilon$  при применении фильтра малых  $z$

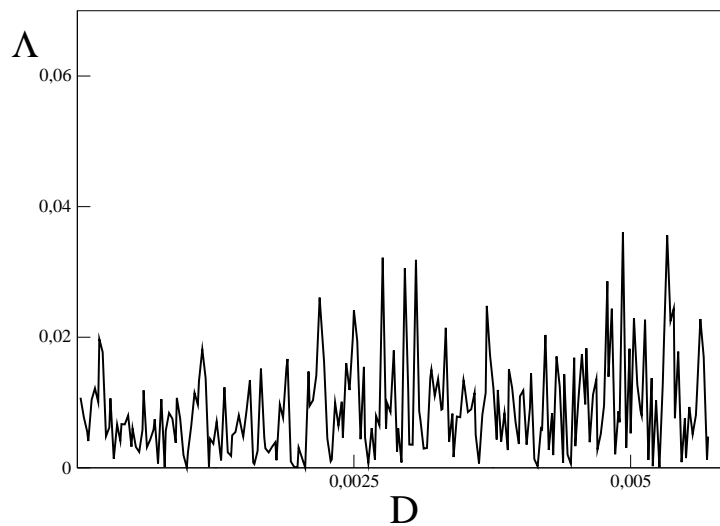


Рис. 3. Влияние интенсивности шума  $D$  на величину относительной ошибки  $\Delta$  в оценке управляющего параметра  $\varepsilon$  системы (1.1) ( $\varepsilon = 0.4$ ).

нелинейностью Анищенко–Астахова [21]:

$$\begin{cases} \dot{x} = mx + y - xz + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = -x, \\ \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

а второй — осциллятор Ресслера [22]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + \sqrt{2D}n(t), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - m), \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $a, b, m$  — управляющие параметры. Обе модели дополнены источником аддитивного гауссова белого шума интенсивности  $D$ .

Рассмотрим модель (2.1). Будем оценивать управляющий параметр  $m$ , зафиксировав заданным второй параметр  $g = 0.2$ . Текущая оценка на  $i$ -м шаге дается формулой:

$$m_i = \frac{\dot{x}_i - y_i + x_i z_i}{x_i}. \quad (2.3)$$

Здесь, также как для осциллятора Ван дер Поля имеется деление на малую величину. Соответственно, необходима фильтрация массива данных. Распределение текущих оценок  $m_i$ , полученных по профильтрованным данным, приведено на рис.4а. Оно, так же как и в случае с Ван дер Полем, является унимодальным и симметричным, поэтому за итоговую оценку  $m_0$  можно принять среднее значение  $\langle m_i \rangle$ . Зависимости ошибки  $\Delta = |m_0 - m|$  от истинного значения  $m$  в системе (2.1) при различных интенсивностях шума  $D$  приведены на рис.4б. В данном случае  $m_0$  определялось как наиболее вероятное значение.

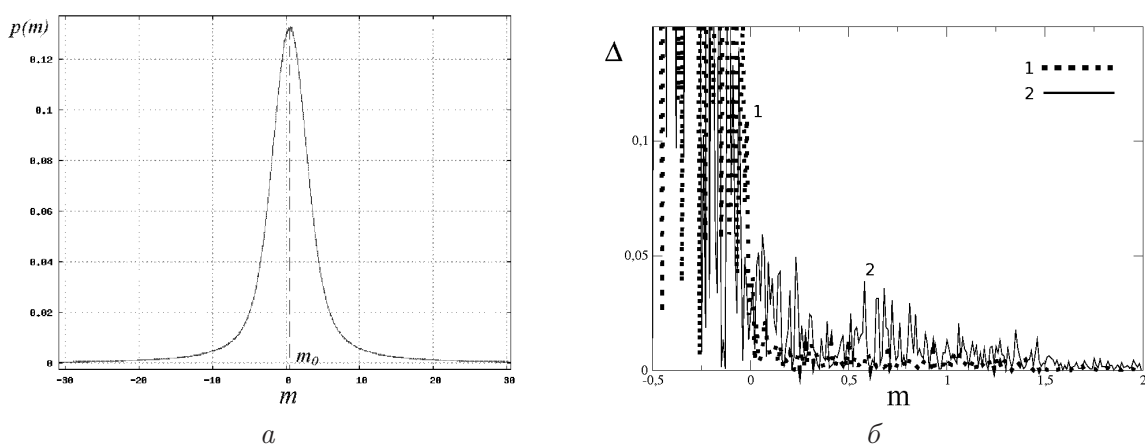


Рис. 4. Результаты расчетов для системы (2.1): а — распределение значений  $m_i$  при  $D = 0.0002$ ,  $m = 0.4$ ; б — зависимость ошибки  $\Delta$  от истинного значения  $m$  для различных значений интенсивности шума  $D$ :  $D = 0.0001$  (кривая 1);  $D = 0.001$  (кривая 2).

В области генерации ( $m > 0$ ) даже при шуме  $D = 0.001$  максимальная ошибка не превышает 0.06 и уменьшается с ростом  $m$ .

Важным вопросом, рассмотренным в данной работе, является влияние бифуркаций и перехода к хаосу на возможности оценки управляющего параметра зашумленной системы. В отсутствие шума в системе (2.1) имеют место следующие бифуркации: при  $m = 0$  происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, приводящая к потере устойчивости состояния равновесия в начале координат и возникновению периодических автоколебаний; при  $0 < m < 0.96$  существуют устойчивые периодические автоколебания со слабо зависящим от параметра  $m$  периодом  $T_0$ ; при дальнейшем увеличении  $m$  происходит каскад удвоений периода в соответствии со сценарием Фейгенбаума ( $m_I \approx 0.966$ ,  $m_{II} \approx 1.294$ ,  $m_{III} \approx 1.359 \dots$ ), приводящий к возникновению хаоса при  $m_{кр} \approx 1.38$ . Проведенные исследования показывают, что до возникновения автоколебаний оценка параметра  $m$  характеризуется значительной ошибкой, связанной с наличием в обрабатываемой последовательности данных большого количества значений  $x_i$ , близких к нулю. При переходе в режим автоколебаний ошибка оценки становится существенно меньше. Приведенные на рис. 4 графики свидетельствуют об отсутствии заметной чувствительности оценки значений параметра  $m$

к бифуркациям удвоения периода и переходу в область хаоса. Ошибка оценки параметра  $m$  в хаотическом режиме незначительно растет с ростом  $m$  (в масштабе рис. 2.1б этот рост неразличим).

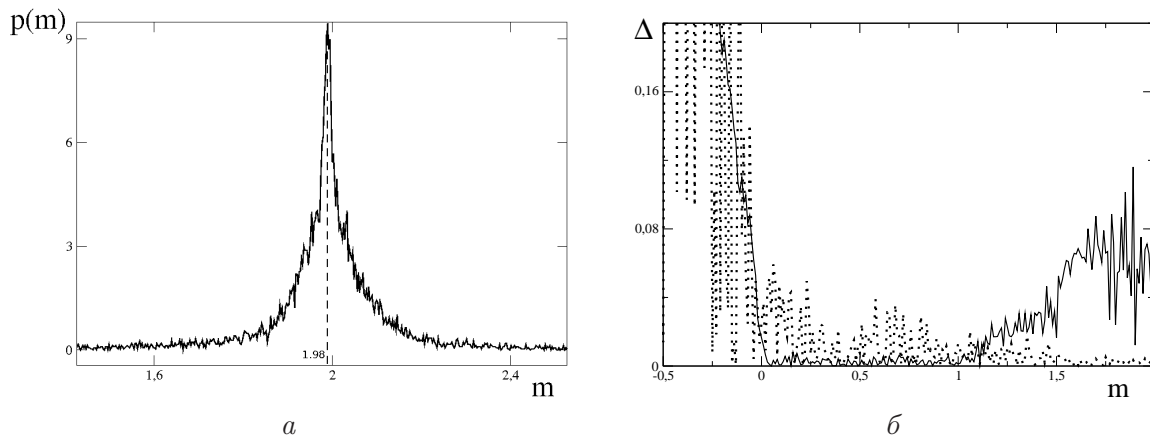


Рис. 5. Результаты расчетов для системы (2.1): а — распределение значений  $m_i$  в хаотическом режиме при  $D = 0.0002$ ,  $m = 1.99$ ; б — зависимость ошибки оценки  $\Delta$  параметра  $m$  от его истинного значения (линия — расчет по среднему значению, точки — расчет по максимуму плотности распределения).

Когда параметр  $m$  соответствует области хаоса, наблюдается расхождение ошибок по среднему значению и максимуму плотности вероятности (рис. 5а). Причиной этого является потеря симметрии распределения, как видно на рис. 5а, в результате чего среднее значение смещается вправо от наиболее вероятного значения и оценка параметра по среднему значению оказывается слегка завышенной (рис. 5б).

В целом, в области хаоса относительная ошибка оценки по среднему значению не превосходит 6%, а по максимальной плотности вероятности — 2%.

Рассмотрим модель (2.2). Зафиксируем параметры  $a = b = 0.2$  и будем оценивать управляющий параметр  $m$ :

$$m_i = x_i - \frac{\dot{z}_i - b}{z_i}. \quad (2.4)$$

В осцилляторе Ресслера переменная  $z$ , на значение которой производится деление в (2.4), всегда положительна и вероятность очень малых значений пренебрежимо мала. Таким образом, можно обойтись без фильтра малых значений. Распределение  $m_i$ , оказывается близким к гауссову (рис. 6,а).

В отличие от генераторов Анищенко–Астахова и Ван дер Поля, для осциллятора Ресслера оценка управляющего параметра  $m$  в соответствии с (2.4) практически никогда не приводит к делению на бесконечно малую величину, поскольку переменная  $z$  может принимать только положительные значения. Данное свойство сохраняется при включении шума в первое уравнение системы: очень малые значения  $z$  имеют очень малую совокупную вероятность. Таким образом, при использовании оценки (2.4) для системы Ресслера не возникает необходимости фильтровать массив данных, а получаемые в результате вычислений графики зависимости ошибки оценки  $\Delta$  от параметра  $m$  оказываются гладкими, без выбросов. Зависимости ошибки оценки  $\Delta$  от  $m$ , полученные при различных значениях интенсивности шума  $D$ , приведены на рис.6,б. Они показывают, что оценка значений параметра в системе

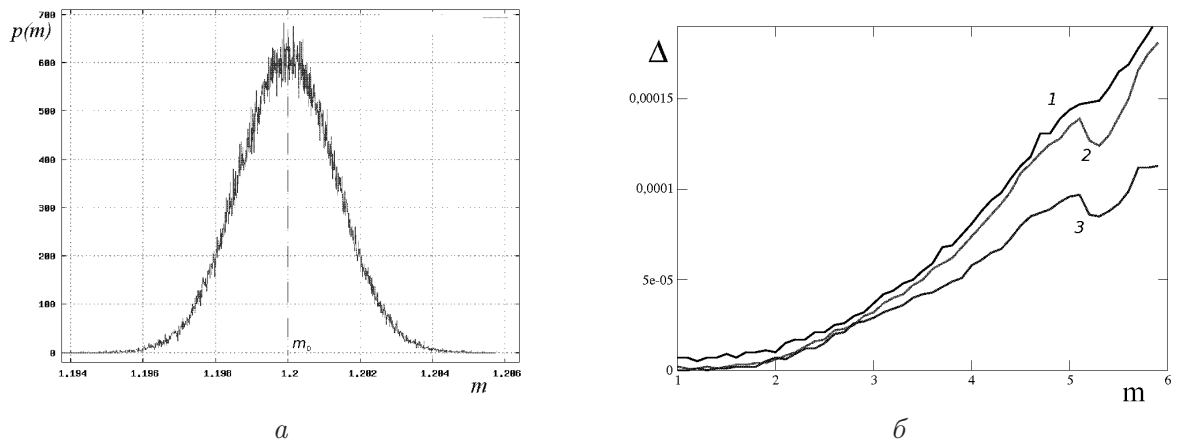


Рис. 6. Результаты расчетов для системы (2.2) в режиме периодических колебаний: а — распределение значений  $m_i$  при  $D = 0.0005$ ,  $m = 1.19$ ; б — зависимость ошибки  $\Delta$  от истинного значения  $m$  для различных значений интенсивности шума  $D$ :  $D = 0.001$  (кривая 1);  $D = 0.0001$  (кривая 2);  $D = 0.00001$  (кривая 3).

(2.2) оказывается очень точной и лишь незначительно ухудшается с ростом интенсивности шума. На всем рассмотренном интервале  $m \in [1; 6]$  относительная ошибка при максимальном шуме  $D = 0.001$  не превосходит 10%.

Гладкий характер кривых свидетельствует о нечувствительности оценки  $m_0$  к бифуркациям удвоения периода, имеющим место в интервале  $2.5 < m < 4.2$ . Однако в целом, усложнение динамического режима и переход в область хаоса сопровождаются ростом ошибки оценки. Отметим участок немонотонности зависимости  $\Delta$  от  $m$ , хорошо заметный на графиках в интервале  $5.2 < m < 5.5$  при  $D = 0.00001$ ,  $D = 0.0001$  и  $D = 0.001$ . Он совпадает с окном периодичности в области хаотической динамики. Фрагмент зависимости старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от управляющего параметра  $m$ , приведенный на рис.7, показывает наличие данного окна.

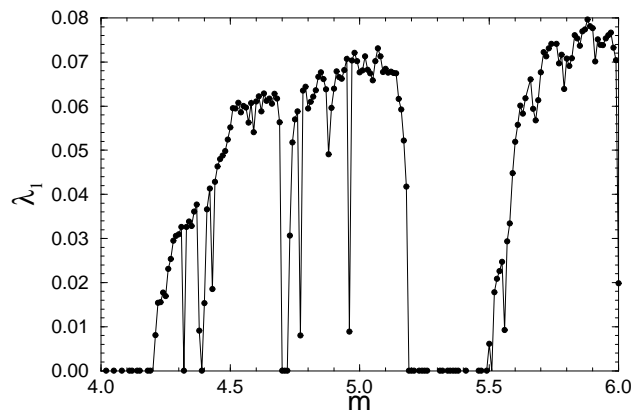


Рис. 7. Фрагмент зависимости старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  от управляющего параметра  $m$



### 3. Заключение

Проведенные исследования показали, что на основе статистической обработки экспериментально получаемых реализаций нелинейных динамических систем, содержащих внутренние источники шума, возможно получить оценки управляющего параметра с высокой точностью даже при большой интенсивности шума. Влияние шума в определенном диапазоне значений не оказывает существенного воздействия на точность оценки. При этом в некоторых случаях требуется применять определенную фильтрацию массива данных, исключающую деление на малые значения динамических переменных.

Достаточно точные оценки значений управляющего параметра возможно получать не только в случае устойчивых периодических колебаний, но также для генераторов вблизи бифуркаций удвоения периода и в режиме хаотической динамики. Ошибка оценки «не чувствует» бифуркаций удвоения периода и характер зависимости ошибки от управляющего параметра в области бифуркаций остается идентичным режимам устойчивых колебаний.

В большинстве случаев распределение текущих оценок параметра является симметричным с единственным максимумом, практически совпадающим с истинным значением. В этом случае итоговую оценку целесообразно определять по среднему значению. Однако в сложных динамических режимах может возникнуть асимметрия в распределении текущих оценок. При этом более точную итоговую оценку нужно определять по максимуму распределения.

В данной работе была исследована задача оценки параметра только в системах с аддитивным белым шумом и только при наличии мягких локальных бифуркаций (суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, бифуркации удвоения периода). Остается ряд вопросов, связанных с влиянием на оценку параметров мультипликативного и цветного шума, а также жестких бифуркаций в динамической системе. Рассмотрению этих проблем предполагается посвятить дальнейшие исследования.

*Данная работа выполнена при поддержке CRDF (грант №BR4M06) и Министерства образования и науки РФ в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2010 г. (грант №2.2.2.2/229).*

*Авторы выражают признательность В. С. Анищенко и А. Н. Павлову за полезные дискуссии и советы.*

### Список литературы

- [1] Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
- [2] Anishchenko V. S., Pavlov A. N., Janson N. B. Global reconstruction in the presence of a priori information // *Chaos Solitons Fractals*, 1998, vol. 9, no. 8, pp. 1267–1278.
- [3] Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М: Радио и связь, 1991. 608 с.
- [4] Павлов А. Н., Янсон Н. Б., Анищенко В. С. Реконструкция динамических систем // *Радиотехника и электроника*, 1999, т. 44, № 9, с. 1075–1092.
- [5] Bezruchko V. P., Smirnov D. A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 63, no. 1, 016207, 7 p.
- [6] Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

- [7] Timmer J. Parameter estimation in nonlinear stochastic differential equations // *Chaos Solitons Fractals*, 2000, vol. 11. pp. 2571–2578.
- [8] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 400 с.
- [9] Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // *Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol.1: Theory of continuous Fokker–Planck systems* / F. Moss, P. V. E. McClintock (Eds.). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. 384 p.
- [10] Arnold L. *Random Dynamical System*. Berlin: Springer, 1998. 586 p.
- [11] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И. Статистические свойства динамического хаоса // *УФН*, 2005, т. 175, № 2, с. 163–179.
- [12] Анищенко В. С., Сафонова М. А. Бифуркации аттракторов в присутствии флуктуаций // *ЖТФ*, 1988, т. 58, № 4, с. 64–651.
- [13] Jaeger L., Kants H. Homoclinic tangencies and nonnormal Jacobians-effects of noise in nonhyperbolic chaotic systems // *Phys. D*, 1997, vol. 105, pp. 79–96.
- [14] Schroer Ch. G., Ott E., Yorke J. A. Effects of noise on nonhyperbolic chaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 81, no. 7, pp. 1397–1400.
- [15] Kravtsov Yu. A., Suruyatkina E. D. Nonlinear saturation of prebifurcation noise amplification // *Phys. Lett. A*, 2003, vol. 319, no. 3–4, pp. 348–351.
- [16] Маляев В. С., Вадивасова Т. Е. Возможность оценки параметров зашумленной динамической системы по реализациям колебаний // *Статистическая физика и информационные технологии: Материалы Междунар. школы-семинара «StatInfo-2009»*. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2009. С. 95–98.
- [17] Mannella R., Palleschi V. Fast and precise algorithm for computer simulation of stochastic differential equations // *Phys. Rev. A*, 1989, vol. 40, pp. 3381–3386.
- [18] Kloeden P. E. The numerical solution of nonlinear stochastic dynamical systems: A brief introduction // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 277–286.
- [19] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
- [20] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
- [21] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Саратов. гос. ун-та, 1999. 368 с.
- [22] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Регулярные и хаотические автоколебания: Синхронизация и влияние флуктуаций. Долгопрудный: Интеллект, 2009. 312 с.