

Резиновый шар на плоскости: критические решения

А. Ю. Москвин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Россия, Москва, Ленинские горы
moskvin-ay@mail.ru

Получено 11 марта 2010 г.

Исследуется задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по плоскости без скольжения и верчения. Данная задача вполне естественная, однако была упущена классиками из рассмотрения. Анализируется также обобщение этой задачи при добавлении к шару постоянного гиростата и поля сил задачи Бруна. Для описания динамики таких систем найдены некоторые замечательные периодические решения, проанализирована их устойчивость. По интегральному отображению построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы.

Ключевые слова: бифуркационный комплекс, резиновый шар, устойчивость, неголономная система

A. Yu. Moskvina

Rubber ball on a plane: singular solutions

The paper deals with the rolling motion of a balanced, dynamically asymmetric ball on a plane without sliding and spinning. The problem is natural but was not considered by classicists. Generalizations of the problem are analyzed for the case where gyrostat and force Brun field are added. To investigate the dynamic behavior of the system some peculiar periodic solutions are described and their stability is examined. By integral mapping, bifurcation diagrams and bifurcation complexes are constructed.

Keywords: bifurcation complex, rubber ball, stability, nonholonomic system
Mathematical Subject Classification 2000: 37N15

1. Введение

В классической механике имеется обширный класс систем, связанных с качением твердых тел. Однако полное описание движения, где присутствует трение, является сложной задачей. В качестве одной из идеализаций в механике рассматривают качение по абсолютно шероховатой поверхности. В этом случае предполагается, что имеется полное отсутствие проскальзывания точки контакта, т. е. ее мгновенная скорость равна нулю. Такая связь является неголономной. Этот класс задач не укладывается в рамки обычной гамильтоновой механики. Однако некоторые системы сохраняют интеграл энергии и другие тензорные инварианты. Иерархия таких систем описана в [1].

В частности, некоторые задачи, такие как качение шара по плоскости, обладают инвариантной мерой и после замены времени могут быть приведены к гамильтоновому виду. А потому для их анализа применимы методы обычной гамильтоновой механики (в том числе и топологические). Так, в работе [11], где рассмотрена задача о качении шара Чаплыгина с гиростатом по абсолютно шероховатой плоскости, для анализа различных движений применены топологические методы. Такая задача является гамильтоновой и интегрируемой по Лиувиллю после замены времени, однако явные квадратуры отсутствуют. Исследование ее решений до [11] не было проведено.

В работах [2, 7] предложена другая модель качения твердого тела по поверхности. Она также является консервативной и может быть рассмотрена как финальная стадия качения при наличии сухого трения и нулевой площадке контакта. Возникающая при этом связь является неголономной: равна нулю не только скорость точки контакта, но и проекций вектора угловой скорости на нормаль к поверхности. В работе [2] такая модель качения названа *rubber ball* (*резиновый шар*). Система разделяющих переменных была отмечена в работе [7]. Однако до сих пор эта задача плохо изучена: нет описаний даже отдельных решений, необходимых хотя бы для сравнения с экспериментом.

В данной работе изучены отдельные замечательные периодические решения задачи о качении резинового шара по плоскости. Эта задача остается интегрируемой также при добавлении к шару постоянного гиростата или силового поля задачи Бруна. При обеих добавках также исследованы периодические решения, и среди них найдены устойчивые. Для этого системы были подвергнуты топологическому анализу, разработанному в статье [4]. В частности, по интегральному отображению построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы. Описаны критические решения. Их устойчивость исследована аналитически.

Некоторые из рассматриваемых задач могут показаться формальными, но они полезны для изучения общих свойств разных интегрируемых систем гамильтоновой и неголономной механики.

1.1. Конформно-гамильтоновы системы

Часто задачи неголономной механики можно представить в так называемом *конформно-гамильтоновом виде*. Фазовым пространством конформно-гамильтоновых систем является пуассоново многообразие \mathcal{M} с некоторой скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, а сама система на \mathcal{M} представима в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x})\{\mathbf{x}, H\}, \quad (1.1)$$

где *приводящий множитель* $\mu(\mathbf{x})$ — знакоопределенная на всем многообразии \mathcal{M} функция.

Класс конформно-гамильтоновых систем включает в себя класс гамильтоновых систем, для которых $\mu(\mathbf{x}) \equiv \text{const}$. Как будет показано ниже, представление уравнений рассматриваемой задачи в виде (1.1) существенным образом помогает исследовать решения и их устойчивость.

По аналогии с гамильтоновыми системами введем понятие интегрируемости конформно-гамильтоновых систем. Пусть фазовое пространство \mathcal{M} будет $2n$ -мерными симплектическим многообразием. Тогда систему (1.1) будем называть *интегрируемой*, если у нее существует набор из n гладких почти всюду функционально независимых, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона первых интегралов.

1.2. Критические решения

Дадим определение критическим периодическим траекториям интегрируемых конформно-гамильтоновых систем и опишем подход к анализу их устойчивости. Рассмотрим интегрируемую конформно-гамильтонову систему с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F на симплектическом многообразии \mathcal{M}^4 . Сделаем предположение о компактности системы, а именно: поверхности уровня гамильтониана H на \mathcal{M}^4 — компактны. Введем *интегральное отображение*

$$H \times F: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f). \quad (1.2)$$

Согласно теореме Лиувилля--Арнольда, неособые поверхности уровня отображения (1.2) будут объединениями двумерных торов. На особых же слоях существуют *критические* точки, где ранг дифференциала отображения (1.2) меньше двух. Множество всех критических точек называют *критическим множеством*. *Бифуркационной диаграммой интегрального отображения* будем называть изображенный на плоскости первых интегралов (h, f) образ многообразия \mathcal{M}^4 совместно с образом критического множества.

Рассмотрим отдельно нестационарные критические точки. Через каждую из них проходит траектория, полностью состоящая из критических точек [5]. Если такая траектория замкнута, то она называется *критической периодической траекторией*. *Критическими решениями* назовем стационарные решения и решения, состоящие из критических точек.

1.3. Устойчивость критических периодических траекторий и бифуркационный комплекс

Оказывается, вопрос (орбитальной) устойчивости критических периодических траекторий можно разрешить с помощью подхода, опирающегося лишь на топологические соображения. А именно, любая критическая периодическая траектория вся лежит на некотором уровне гамильтониана H . Поверхность уровня H в окрестности этой критической траектории является гладким трехмерным многообразием Q^3 . Уровни интеграла F задают слоение Лиувилля на Q^3 .

Как показано в [5], слоение Лиувилля в трехмерной окрестности в Q^3 любой точки невырожденной критической периодической траектории (определение невырожденности — дальше) устроено очень просто. С точностью до гомеоморфизма существует лишь два типа таких слоений. Схематически они изображены на рис.1. Рисунок а) отвечает устойчивой критической периодической траектории, а рисунок б) — неустойчивой. Таким образом, невырожденная критическая периодическая траектория устойчива, если слоение Лиувилля в трехмерной окрестности любой ее точки имеет тип а), и неустойчива, если — тип б).

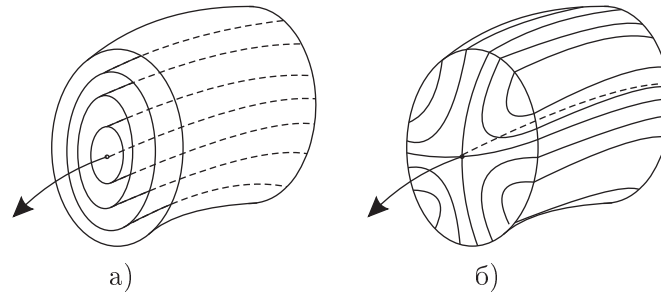


Рис. 1. Трехмерные окрестности точек невырожденных критических периодических траекторий на поверхностях уровня гамильтониана H . Случай а) — устойчивая траектория, случай б) — неустойчивая траектория.

Чтобы убедиться в невырожденности критической траекторий и определить ее тип, необходимо найти сигнатуру некоторой квадратичной квадратичной формы. А именно, введем ограничение \tilde{F} дополнительного интеграла F на трехмерную окрестность Q^3 критической периодической траектории. В любой точке \mathbf{x}_0 этой критической траектории $dF(\mathbf{x}_0) = 0$, поэтому корректно определена квадратичная форма

$$d^2\tilde{F}(\mathbf{x}_0). \quad (1.3)$$

Не сложно показать, что эта форма вырождена. Теперь, критическая периодическая траектория называется *невырожденной*, если коранг формы (1.3) равен 1. Следует заметить, что ранг формы (1.3) не зависит от точки на критической траектории. Невырожденная критическая периодическая траектория устойчива, если два ненулевых собственных значения формы (1.3) одного знака и неустойчива в противном случае. Общие основы этого подхода анализа устойчивости критических периодических траекторий можно извлечь из книги [5].

Для классификации решений интегрируемой гамильтоновой системы используют так называемый *бифуркационный комплекс* [4]. Точкам этого комплекса отвечают связанные компоненты уровня интегралов H и F . Каждой внутренней точке двумерных клеток этого комплекса будет отвечать один тор Лиувилля. Прообраз каждой точки нуля и одномерных клеток содержит критические точки интегрального отображения (1.2). Устойчивыми могут быть лишь решения, лежащие на границе комплекса.

2. Уравнения движения и первые интегралы

2.1. Резиновый шар на плоскости

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного резинового шара по горизонтальной плоскости. Как уже предположено ранее, равна нулю не только скорость точки контакта шара с плоскостью, но и проекция вектора угловой скорости на вертикаль. То есть в координатах, жестко связанных с телом,

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{v} — угловая скорость и скорость центра масс шара, \mathbf{n} — орт, направленный вертикально вниз, \mathbf{r} — вектор из центра масс в точку контакта. Движения шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описываются уравнениями

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad \mu = -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}$, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, \mathbf{E} — единичная матрица, $D = mR^2$, m и R — масса и радиус шара. Будем предполагать, что главные моменты инерции различны: $0 < I_1 < I_2 < I_3$.

Как замечено в [7], система (2.2) эквивалентна системе Веселовой [8], описывающей движение твердого тела с неподвижной точкой при наличии связи $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$. Система уравнений (2.2) допускает интеграл энергии и геометрический интеграл

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1, \quad (2.3)$$

а также инвариантную меру с плотностью (интегрирующим множителем)

$$\rho = \sqrt{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}. \quad (2.4)$$

Имеется также дополнительный интеграл

$$F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})^2. \quad (2.5)$$

Тем самым задача о качении резинового шара по плоскости интегрируема по Эйлеру–Якоби [9]. Из результатов Веселовой [8] также следует, что система (2.2) сводится к задаче Неймана о движении точки на сфере в поле сил с квадратичным потенциалом и может быть явно проинтегрирована в сфероконических координатах.

2.2. Резиновый шар на плоскости с гиростатом в потенциальном поле

Теперь закрепим внутри шара постоянный гиростат и поместим в вертикальное потенциальное поле. При этом сохраним требования (2.1). Тогда уравнения движения (2.2) можно обобщить:

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \mu \mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad \mu = -\frac{((\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}. \quad (2.6)$$

Здесь \mathbf{K} — постоянный вектор момента гиростата, $U = U(\mathbf{n})$ — потенциал силового поля. Уравнения (2.6) также сохраняют интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{n}) \quad (2.7)$$

и инвариантную меру с плотностью (2.4). Однако в общем случае дополнительного первого интеграла не существует.

В работе [6] система (2.6) (а потому и (2.2)) была представлена в конформно-гамильтоновом виде. Опишем это представление. Для этого рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$. В новых координатах $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{J}^{1/2} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \rho^{-1} \mathbf{J}^{-1/2} \mathbf{n} \quad (2.8)$$

введем скобку Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}(M_k - \rho^3 \det \mathbf{J}(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{1/2}\boldsymbol{\gamma})\gamma_k), \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0. \quad (2.9)$$

В таком случае фазовое пространство системы (2.6) многообразие

$$\mathcal{M}^4 = \{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0, (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1\} \equiv \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1\} \quad (2.10)$$

будет симплектическим листом этой скобки, а значит, \mathcal{M}^4 — симплектическое многообразие. Переписав скобку (2.9) обратно в координатах $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, система (2.6) будет иметь вид (1.1), где гамильтониан H представляется в форме (2.7), а приводящий множитель совпадает с интегрирующим, т. е.

$$\mu(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \rho = \sqrt{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}.$$

2.3. Интегрируемые случаи

Как отмечалось выше, в общем случае система (2.6) не обладает дополнительным первым интегралом. Однако некоторые из таких обобщений все же будут интегрируемыми.

1. При $U(\mathbf{n}) \equiv 0$ система (2.6) обладает дополнительным интегралом

$$F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}) - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}, \mathbf{n})^2. \quad (2.11)$$

Подобное интегрируемое обобщение добавлением постоянного гиростата имеет место и в задаче о качении шара Чаплыгина по плоскости [10].

2. В случае

$$\mathbf{K} = 0, \quad U(\mathbf{n}) = -\frac{\varepsilon}{4}(\mathbf{J}\mathbf{n}, \mathbf{n}) \quad (2.12)$$

система (2.6) допускает интеграл

$$F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n})^2 + \frac{\varepsilon \det \mathbf{J}}{2}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n}). \quad (2.13)$$

Потенциал вида (2.12) соответствует полю сил задачи Бруна. В таком случае все точки шара притягиваются к плоскости с силой, пропорциональной расстоянию до плоскости. Для классической задачи о качении шара Чаплыгина интегрируемое обобщение добавлением потенциала (2.12) было показано В. В. Козловым [9].

3. Критические решения и их устойчивость

Укажем критические решения и построим бифуркационные диаграммы для указанных выше интегрируемых случаев.

3.1. Резиновый шар

Гамильтониан (2.3) и дополнительный интеграл (2.5) заданы на многообразии (2.10). Стационарные решения уравнений (2.2) имеют вид $\boldsymbol{\omega} = 0$, а \mathbf{n} — произвольный единичный вектор. Этим решениям отвечают состояния покоя шара. Точки, в которых ранг дифференциала интегрального отображения $\text{rank } d(H \times F) = 0$, совпадают со стационарными решениями.

Вдоль критических периодических траекторий вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и направлен вдоль одной из главных осей. В таком случае шар равномерно катится по прямой, при этом ось вращения направлена вдоль одной из главных осей инерции. Бифуркационная диаграмма интегрального отображения для гамильтониана (2.3) и дополнительного интеграла (2.5), заданных на многообразии (2.10), состоит из трех лучей

$$h = \frac{f}{2J_i}, \quad f \geq 0.$$

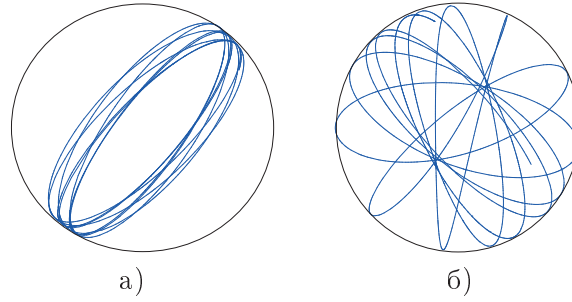


Рис. 2. Резиновый шар на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$. Траектория точки контакта на поверхности шара при вращении около устойчивой оси (рис. а) и около неустойчивой (рис. б). Траектория на рис. а) выпущена из точки $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, на рис. б) — из точки $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$.

При этом вращение вокруг средней оси, как траектория в \mathcal{M}^4 , устойчиво, а вокруг наибольшей и наименьшей — неустойчиво (см. рис. 2). Вид бифуркационной диаграммы довольно типичный. Это связано с тем, что задача о качении резинового шара по плоскости сводится к задаче Неймана.

В работе [3] были исследованы критические решения аналогичной классической системы — качение шара Чаплыгина по плоскости. Оказалось, что резиновый шар не допускает ряд движений, возможных для классического аналога, а именно: шар Чаплыгина допускает вращение на неподвижной точке, при котором одно из главных направлений тензора инерции направлено вертикально, для резинового же шара такие движения невозможны.

3.2. Резиновый шар с гироскатом

Как отмечено в разделах 2.2, 2.3, задача о качении резинового шара с гироскатом по плоскости является интегрируемой по Лиувиллю после замены времени. Фазовое пространство — многообразие (2.10), гамильтониан и дополнительный первый интеграл выражаются формулами (2.3) и (2.11). Тем самым корректно определено интегральное отображение $H \times F: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$.

Теорема 1. *Бифуркационная диаграмма интегрального отображения для задачи о качении резинового шара с гироскатом по плоскости состоит из объединения (см. рис. 3а)*

1) набора кривых σ ($\lambda \neq 0, J_1, J_2, J_3$):

$$f(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{k_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} \right),$$

$$2h(\lambda) = \frac{k_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{k_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{k_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2};$$

2) лучей σ_i , если $k_i = 0$:

$$f = 2J_i h - J_i \sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{J_j - J_i}, \quad \text{где} \quad f > J_i^2 \sum_{j \neq i} \frac{k_j^2}{(J_j - J_i)^2};$$

3) отрезка τ_1 : $f = 0, 2h \in (0, (\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}))$;

4) отрезка τ_2 : $f \in [0, (\mathbf{K}, \mathbf{K})], h = 0$.



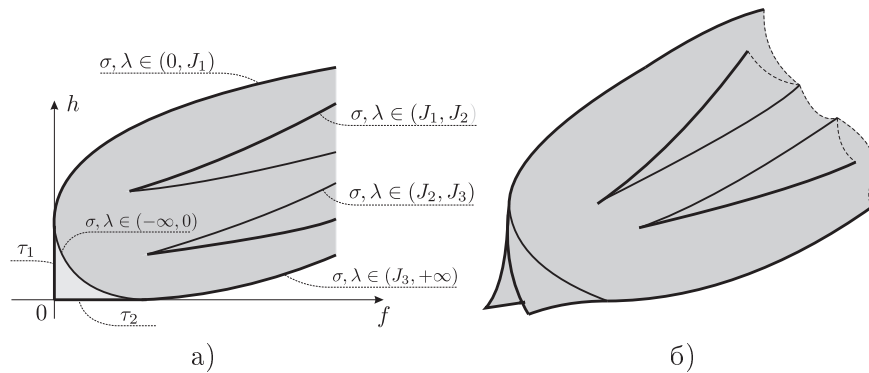


Рис. 3. Резиновый шар с гироскатом на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$, $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$: а) бифуркационная диаграмма интегрального отображения; б) бифуркационный комплекс.

Точка M^4 является стационарной для системы (2.6) при $U(\mathbf{n}) \equiv 0$, если в ней $\boldsymbol{\omega} = 0$. Все такие точки соответствуют состояниям покоя шара и при интегральном отображении переходят в отрезок τ_2 . Точка M^4 является точкой ранга нуль интегрального отображения, если в ней $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{n} \parallel \mathbf{K}$. Обе такие точки при интегральном отображении проектируются в точку $(0, 0)$.

Кратко опишем схему доказательства теоремы. Вначале следует найти множество критических точек интегрального отображения. Это множество полностью состоит из особых траекторий и совпадает с теми точками M^4 , где зависимы градиенты четырех функций H , F , (\mathbf{n}, \mathbf{n}) , $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$ как функций в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$. Далее следует найти образ этого множества при интегральном отображении.

Критические периодические решения в задаче о качении резинового шара с постоянным гироскатом устроены следующим образом. В прообразе каждой точки кривых σ лежит по одной, а лучей σ_i — по две критические траектории. Вдоль таких решений вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и может быть найден из системы $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = \lambda\boldsymbol{\omega}$ для кривых σ , и $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} = J_i\boldsymbol{\omega}$ для луча σ_i . В абсолютном пространстве вдоль таких решений шар равномерно катится по прямой.

Внутренним точкам отрезка τ_1 отвечает по две критические периодические траектории. Вдоль них $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} \parallel \mathbf{n}$, вектор \mathbf{n} описывает траектории (см. рис 4а):

$$(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}) - \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} = 2h.$$

При этом

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(\alpha\mathbf{n} - \mathbf{K}), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}.$$

Прообраз отрезка τ_2 устроен очень просто. В прообразе точки $(f, h = 0)$ лежат стационарные решения, при которых вектор момента гироската \mathbf{K} направлен под углом ϕ к вертикали, где $\sin^2 \phi = f/(\mathbf{K}, \mathbf{K})$.

Опишем некоторые различия в движениях резинового шара и шара Чаплыгина. Критические решения для задачи о качении шара Чаплыгина с гироскатом были описаны в работе [11]. Некоторые из таких решений представляют прямолинейные качения, при которых вектор угловой скорости постоянен в абсолютном пространстве и направлен не горизонтально. Вдоль подобных критических решений для резинового шара с гироскатом вектор угловой скорости тоже постоянен, но обязательно горизонтален.

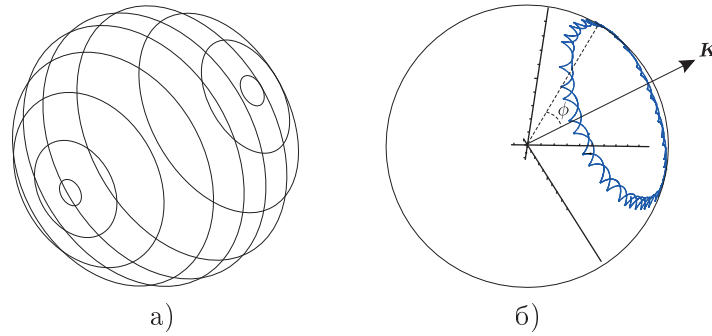


Рис. 4. Резиновый шар с гиростатом на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$, $\mathbf{K} = (1, 1, 1)$: а) траектория точки контакта на поверхности шара вдоль особых решений, где $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} \parallel \mathbf{n}$; б) траектория точки контакта при возмущении стационарной точки $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 6, 0, 0, 8)$.

Исследуем устойчивость критических решений аналитически. Для этого воспользуемся подходом, кратко описанном в разделе 1.3. Выпишем выражение

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E})f'_\lambda. \tag{3.1}$$

Утверждение 1. В прообразе каждой внутренней точки

- 1) кривых σ лежит по одной устойчивой критической периодической траектории, если выражение (3.1) положительно, и одной неустойчивой в противном случае;
- 2) луча σ_i лежит по две устойчивые критические периодические траектории при $i = 1, 3$ и две неустойчивые при $i = 2$;
- 3) отрезка τ_1 лежит по две устойчивые критические периодические траектории;
- 4) отрезка τ_2 лежит по две окружности; каждая точка этих окружностей есть неустойчивое положение равновесия.

Доказательство вынесено в дополнение. Среди стационарных решений устойчивы только два. Это точки, где $\mathbf{n} \parallel \mathbf{K}$. При возмущении остальных неподвижных точек, вектор \mathbf{n} в \mathcal{M}^4 будет вращаться вокруг вектора \mathbf{K} (см. рис. 4б). Бифуркационный комплекс слоения Лиувилля изображен на (рис. 3б).

3.3. Резиновый шар в поле сил задачи Бруна

Задача о качении резинового шара в поле сил задачи Бруна также является интегрируемой по Лиувиллю после замены времени. Многообразие (2.10) является фазовым пространством, гамильтониан и дополнительный первый интеграл выписаны в выражениях (2.7) и (2.13). Так определено интегральное отображение $H \times F: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — главные направления тензора инерции, отвечающие моментам I_1, I_2, I_3 соответственно.

Теорема 2. Бифуркационная диаграмма интегрального отображения для задачи о качении резинового шара в поле сил Бруна состоит из объединения (см. рис. 5)

- 1) трех лучей

$$\sigma_i: \quad f = 2J_i h + \frac{\varepsilon J_i}{2}(\text{tr } \mathbf{J} - J_i), \quad h > -\frac{\varepsilon}{4} \max_{j \neq i} J_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

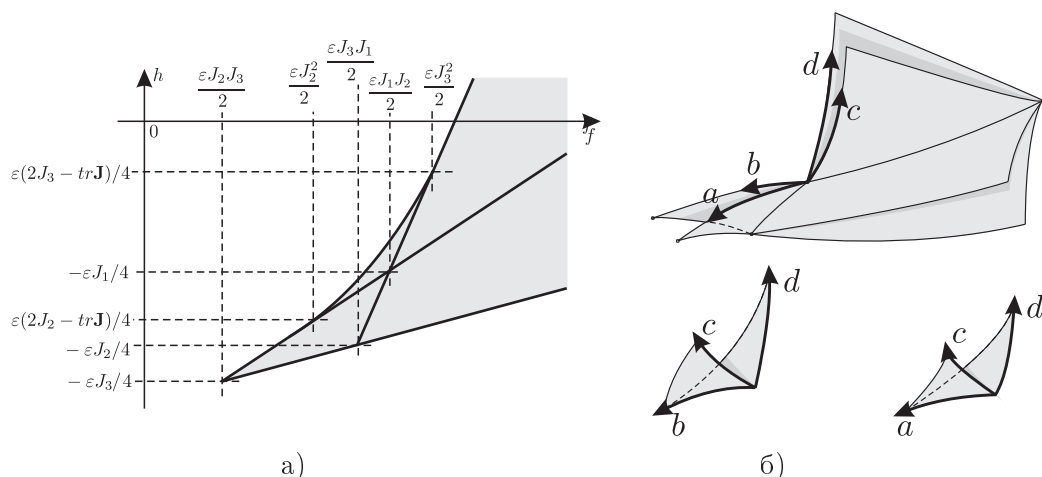


Рис. 5. Резиновый шар в поле сил задачи Бруна на плоскости: а) бифуркационная диаграмма; б) бифуркационный комплекс (состоит из склейки трех компонент).

2) кривой τ при $\lambda \in (J_2, J_3)$

$$h(\lambda) = \frac{\varepsilon}{4}(2\lambda - \text{tr } \mathbf{J}),$$

$$f(\lambda) = 2\lambda h(\lambda) + \frac{\varepsilon\lambda}{2}(\text{tr } \mathbf{J} - \lambda).$$

Точка M^4 является стационарной для системы (2.6) при $\mathbf{K} = 0$, если в ней $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_i$ для некоторого $i = 1, 2, 3$. Все шесть таких точек соответствуют состояниям покоя шара и при интегральном отображении переходят в точки пересечения лучей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Точки ранга нуль интегрального отображения совпадают со стационарными решениями.

Опишем, как устроены критические решения. В прообразе каждой неособой точки лучей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ лежит по две, а дуги τ — по четыре критические периодические траектории. Вдоль критических решений, отвечающих лучу σ_i , вектор угловой скорости параллелен \mathbf{e}_i — i -ому главному направлению тензора инерции. Пусть

$$j = \min_{k \neq i} k.$$

Тогда при $h < -\varepsilon J_j/4$ шар осуществляет колебания. Минимум потенциальной энергии этого колебания достигается, когда вектор \mathbf{e}_j направлен вертикально. Если же $h > -\varepsilon J_j/4$, то шар неравномерно катится по прямой.

Вдоль критических периодических траекторий, отвечающих внутренним точкам дуги τ , шар также осуществляет колебания, при которых направление вектора угловой скорости уже не постоянно. В прообразе точки $(f(\lambda), h(\lambda))$ вектор \mathbf{n} описывает траекторию

$$((\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0.$$

Вектор угловой скорости при этом будет

$$\boldsymbol{\omega} = \nu(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{n}, \quad \text{где} \quad \nu^2 = \frac{\varepsilon \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E})}{\lambda}.$$

Некоторые траектории точки контакта вдоль таких особых решений на поверхности шара и на плоскости изображены на рис. 6.



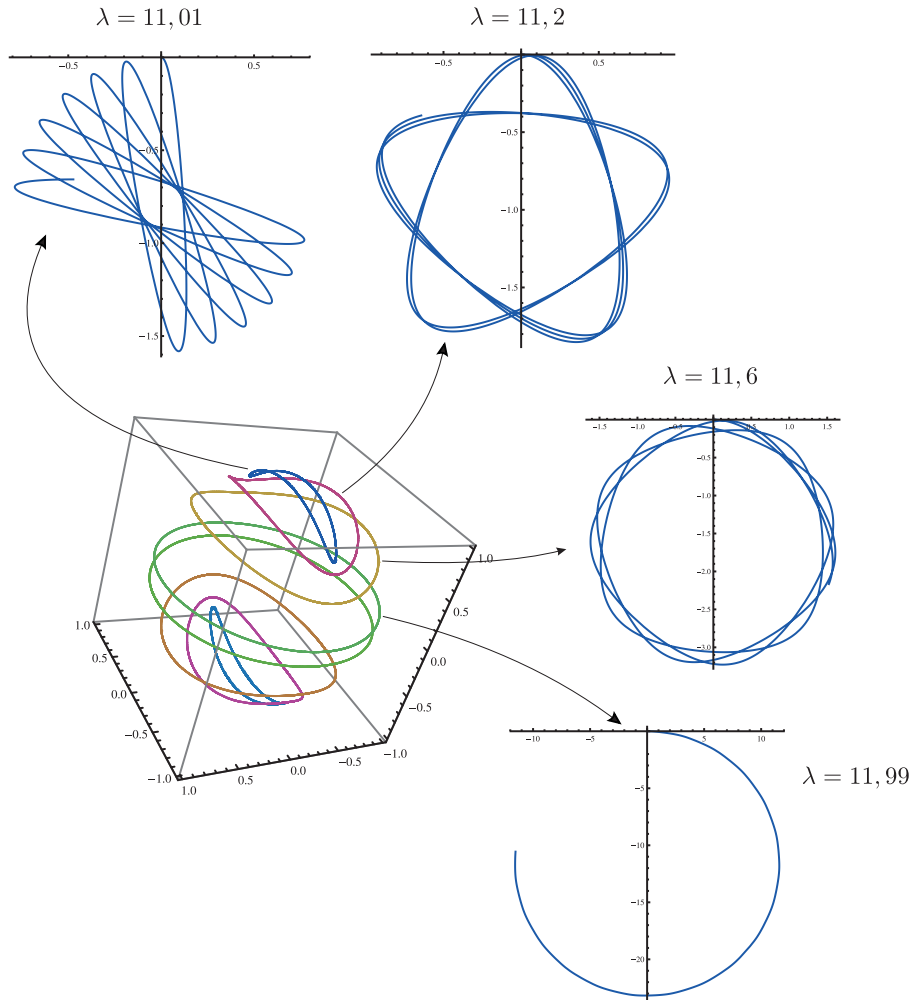


Рис. 6. Резиновый шар в поле сил задачи Бруна на плоскости, $\mathbf{I} = \text{diag}(4, 5, 6)$, $D = 7$, $R = 1$, $\varepsilon = 1$. Траектория точки контакта на поверхности шара и на плоскости при $\lambda = 11,01; 11,2; 11,6; 11,99$ для решений в прообразе дуги τ .

Воспользуемся соображениями раздела 1.3 для исследования орбитальной устойчивости критических периодических траекторий.

Утверждение 2. В прообразе

- 1) части луча σ_i на границе заштрихованной области (см. рис. 5) лежит по две устойчивые критические периодические траектории;
- 2) части луча σ_i внутри заштрихованной области лежит по две неустойчивые критические периодические траектории;
- 3) дуги τ лежит по четыре устойчивые критические периодические траектории.

Стационарные решения, в которых $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_3$, — устойчивы, а в которых $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_1$ или $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_2$ — неустойчивы.

Последнее утверждение можно иллюстрировать с помощью бифуркационного комплекса. Этот комплекс не вкладывается в \mathbb{R}^3 , однако его можно представить в виде склейки (см. рис. 5б): ребро a приклеивается к ребру a , ребро b — к ребру b .

4. Дополнение

Доказательство утверждения 1.

Докажем пункт 1). Вдоль критических периодических траекторий в прообразе кривой σ верно

$$dF = 2\lambda dH.$$

Введем матрицу $G = d^2F - 2\lambda d^2H$. Двумерное пространство в $\mathbb{R}^6(\omega, \mathbf{n})$, ортогональное градиентам функций (ω, \mathbf{n}) , (\mathbf{n}, \mathbf{n}) , H и трансверсальное к полю (2.6) при $U(\mathbf{n}) = 0$, натянуто на векторы

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{(\omega, \omega)}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n} \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{(\mathbf{J}\omega, \mathbf{n} \times \omega)}{(\omega, \mathbf{J}\omega)} \omega + \mathbf{n} \times \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через \widehat{G} ограничение G на $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ как квадратичную форму. Согласно соображениям из раздела 1.3, критическая траектория устойчива, если вдоль нее $\det \widehat{G} > 0$, и неустойчива, если $\det \widehat{G} < 0$. Получаем

$$\det \widehat{G} = \frac{(\omega, \omega)^4 (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n}) \det \mathbf{J}}{(\mathbf{J}\omega, \omega)} \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}) f'_\lambda.$$

Поскольку дробь в последней формуле строго положительна, а выражение после дроби совпадает с выражением (3.1), утверждение пункта 1) доказано. В критических точках, отвечающих лучу σ_i , имеем

$$\det \widehat{G} = 2J_i \omega_i^4 (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n}) (\det \mathbf{J}) \prod_{j \neq i} (J_j - J_i).$$

Отсюда $\det \widehat{G} > 0$ при $i = 1, 3$ и $\det \widehat{G} < 0$ при $i = 2$.

Исследуем устойчивость критических траекторий в прообразе отрезка τ_1 . Следуя определению из раздела 1.3, эти траектории будут вырожденными. Поэтому их орбитальную устойчивость будем проверять по определению. Рассмотрим прообраз точки $H = h + o(1)$, $F = o(1)$ и убедимся, что он лежит в окрестности прообраза точки $H = h$, $F = 0$. Действительно, имеем

$$(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}) - \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} = 2h + o(1).$$

При этом

$$\omega = \mathbf{J}^{-1}(\alpha \mathbf{n} - \mathbf{K}) + o(1), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{(\mathbf{K}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} + o(1).$$

Таким образом, утверждение доказано. \square



Доказательство утверждения 2.

Исследуем устойчивость критических траекторий, отвечающих лучу σ_i . Для этого считаем индекс в критической траектории, проходящей через точку $\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_k$. В таких точках имеет место

$$dF = 2J_i dH + \frac{\varepsilon}{2} J_i (\text{tr } \mathbf{J} - J_i) d(\mathbf{n}, \mathbf{n}).$$

Введем матрицу $G = d^2F - 2J_i d^2H - \frac{\varepsilon}{2} J_i (\text{tr } \mathbf{J} - J_i) d^2(\mathbf{n}, \mathbf{n})$. Двумерное пространство в $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, ортогональное градиентам функций $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, (\mathbf{n}, \mathbf{n}) , H и трансверсальное к полю (2.6) при $\mathbf{K} = 0$, натянуто на векторы

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\omega_i \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через \widehat{G} ограничение G на $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ как квадратичную форму. Получаем

$$\det \widehat{G} = 4J_j (J_j - J_i) (J_k - J_i) \left(J_i \omega_i^2 - \frac{\varepsilon}{2} (J_i - J_j) \right).$$

Так, $\det \widehat{G} > 0$ для особых решений из пункта 1), и $\det \widehat{G} < 0$ для особых решений из пункта 2) утверждения 2.

Вдоль особых решений, отвечающих дуге τ , верно

$$dF = 2\lambda dH + \left(\frac{\varepsilon}{2} \lambda (\text{tr } \mathbf{J} - \lambda) - \nu^2 \right) d(\mathbf{n}, \mathbf{n}).$$

Опять введем матрицу $G = d^2F - 2\lambda d^2H - \left(\frac{\varepsilon}{2} \lambda (\text{tr } \mathbf{J} - \lambda) - \nu^2 \right) d^2(\mathbf{n}, \mathbf{n})$. Двумерное пространство, ортогональное градиентам функций $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})$, (\mathbf{n}, \mathbf{n}) , H и трансверсальное к полю (2.6) при $\mathbf{K} = 0$, натянуто на векторы

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{n} + \alpha \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}|}, \quad \alpha = \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{\varepsilon}{2}}{\lambda(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}.$$

Обозначая через \widehat{G} ограничение G на $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ как квадратичную форму, получаем $\det \widehat{G} > 0$. Таким образом, критические траектории в прообразе дуги τ невырожденные и устойчивы.

Исследуем устойчивость неподвижных точек. Функция H является гладкой и ограниченной снизу на \mathcal{M}^4 . Положения равновесия $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_3$ являются ее двумя невырожденными (т.е. морсовскими) изолированными минимумами, а потому устойчивы.

Остальные положения равновесия неустойчивы. Действительно, сколь угодно близко к положениям $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_2$ существуют особые решения, вдоль которых шар катится при $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{e}_2$ или \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}_3 соответственно. \square

Нерешенные задачи

В работе исследованы некоторые конформно-гамильтоновы интегрируемые системы. Однако остаются без ответа следующие интересные вопросы:

- 1) Разделение переменных для задачи о качении резинового шара с гиростатом. Как отмечалось в работе [8], существует разделение переменных для задач о качении просто резинового шара и в поле сил задачи Бруна. Однако про разделение в случае наличия гиростата ничего не известно.



- 2) Показать, возможны ли движения резинового шара с ограниченными на плоскости траекториями точки контакта. И тот же вопрос при добавлении к шару постоянного гиростата. Подобные исследования для задачи о качения шара Чаплыгина были проведены в работе [3].

Автор выражает благодарность А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за постановку задачи и полезные комментарии. А также отдельную благодарность А. В. Болсинову за неоценимые замечания.

Список литературы

- [1] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [2] Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., and Rios P. M. Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin Hamiltonization // The breadth of symplectic and Poisson geometry. (Progr. Math., 232.) Boston, MA: Birkhauser Boston, 2005. P. 75–120.
- [3] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [4] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010 (готовится к печати).
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 892 с.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем // Сибирск. матем. журн., 2007, т. 48, № 1, с. 33–45.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение неоднородного шара по сфере без скольжения и верчения // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 445–452.
- [8] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. М.: МГУ, 1986, с. 64–68.
- [9] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, вып. 3, с. 85–107.
- [10] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ, 1986, т. 21, вып. 1, с. 64–65.
- [11] Москвин А. Ю. Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 345–356.