УДК 531.38

К модели неголономного бильярда

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований,
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 2 июня 2010 г.

В данной работе предложена новая модель неголономного бильярда, учитывающая собственное вращение шара. Данная модель получена с помощью предельного перехода от задачи о качении шара без проскальзывания по поверхности второго порядка. Проведено качественное исследование динамики неголономного бильярда между двумя параллельных стенок и внутри круга. С помощью построения трехмерного точечного отображения показана неинтегрируемость неголономного бильярда внутри эллипса.

Ключевые слова: бильярд, удар, точечное отображение, неинтегрируемость, периодическое решение, неголономная связь, интеграл движения

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev

On the model of non-holonomic billiard

In this paper we develop a new model of non-holonomic billiard that accounts for the intrinsic rotation of the billiard ball. This model is a limit case of the problem of rolling without slipping of a ball without slipping over a quadric surface. The billiards between two parallel walls and inside a circle are studied in detail. Using the three-dimensional-point-map technique, the non-integrability of the non-holonomic billiard within an ellipse is shown.

Keywords: billiard, impact, point mapping, nonintegrability, periodic solution, nonholonomic constraint, integral of motion
Mathematical Subject Classifications: 34D20, 70E40, 37J35

1. Введение

Игра в бильярд известна с древнейших времен и остается чрезвычайно популярной по сегодняшний день. Она издавна привлекает к себе внимание исследователей, математиков и механиков, пытающихся в той или иной степени описать закономерности отскока шаров и их необычное поведение, в том числе и для создания выигрышной техники игры. Множество усилий было потрачено на создание теории бильярдной игры, описывающей взаимодействие шаров друг с другом и со стенками. Однако данная задача является очень сложной и, к сожалению, до сих пор не существует единой теории, объясняющей все аспекты бильярдной игры.

Одним из первых систематически изучал теорию бильярдной игры Г. Кориолис, результаты которого изложены в его знаменитой книге «Математическая теория явлений бильярдной игры» [3]. Среди классических работ по теории бильярда следует отметить работу А. Резаля [12], в которой он дискутирует с Кориолисом по ряду дополнительных гипотез, необходимых для описания ударов шаров друг о друга либо о стенку, работу Аппеля [1] о движении бильярдного шара с учетом трения и систематическую книгу Хемминга [9].

Обоснование теории бильярдной игры и исследование присущих ей частных эффектов связано с изучением закономерностей общей теории удара. В настоящее время теория удара (см. книги [16, 18]) является отдельной дисциплиной и имеет ряд разделов, таких как стереомеханическая и волновая теория удара и др.; однако законченной теоретической модели удара на сегодняшней день не существует, и для того чтобы продвинуться в решении данного вопроса, как правило, вводят некоторые дополнительные гипотезы. Одной из классических и наиболее широко применяемых гипотез является гипотеза о коэффициенте восстановления, предложенная еще Ньютоном.

Не претендуя на полноту приведем некоторые теоретические работы по теории удара [8, 10, 11, 21, 22], а также отметим ряд экспериментальных исследований, описывающих как методику, так и результаты конкретных экспериментов по соударению различных тел [4–7, 24]. Кроме того, многие результаты также можно извлечь из практических пособий по игре в бильярд [23].

В данной статье мы развиваем несколько формальный подход к получению законов бильярда исходя из предельного перехода от некоторой более общей задачи [20]. Как известно, существует модель математического бильярда, или бильярда Биркгофа, которой посвящено множество работ (обзор можно найти, например, в [14, 17]). В данной модели рассматривается отражение материальной точки от некоторой плоской кривой по закону «угол падения равен углу отражения». Изначально данная модель была получена Биркгофом путем предельного перехода от задачи о движении материальной точки по эллипсоиду. Хотя данная модель и носит название бильярда, однако многих особенностей бильярдной игры она не охватывает, в частности, она не учитывает собственное вращение шара. Поэтому одной из целей написания данной работы являлось получение некоторого закона отражения, учитывающего собственное вращение шара. Отметим в этой связи работы [19, 20], где развивается модель удара, основанная на гипотезе «удара о связь», при которой скорость точки контакта при ударе меняет направление на обратное. Еще один подход, позволяющий учесть вращение шара и развиваемый нами в этой работе, основывается на методе Биркгофа получения бильярда с помощью предельного перехода. В качестве начальной задачи для такого перехода мы выбираем задачу о качении шара по поверхности без проскальзывания, которая была подробно изучена в [2]. Получающаяся при этом модель бильярда, которую мы называем неголономным бильярдом, наследует законы сохранения начальной задачи. В частности, она является консервативной, а также сохраняет модуль нормальной составляющей скорости шара.

В данной работе мы, с одной стороны, докажем теоремы о предельным переходе и получим новую модель математического бильярда, а с другой стороны — опишем класс бильярдов, которые изоморфны новой модели и не противоречат известным физическим экспериментам. Тем самым мы постулируем более сложную, но более адекватную модель бильярда, учитывающую собственное вращение шара. Отметим также, что если изучение бильярда Биркгофа традиционно проводится с помощью построения двумерного точечного отображения, то полученная модель в общем случае описывается уже трехмерным точечным отображением, а в некоторых случаях (например, бильярд в эллипсе) существование дополнительных инвариантов позволяет понизить порядок системы и рассматривать двумерное точечное отображение на некоторой поверхности. Более подробное описание методики построения трехмерных отображений и отображений на поверхности в применении к неголономным динамическим системам можно найти в [2].

В заключение укажем на еще один аспект предлагаемой нами модели неголономного бильярда: эту модель можно также рассматривать как одну из возможных дискретизаций задачи о качении шара по поверхности без проскальзывания [13], причем в отличие от большинства других дискретизаций, популярных в последнее время и рассматриваемых, как правило, формально, без надлежащей механической (физической) реализации, предлагаемая нами модель несет в себе ясный физический смысл.

2. Неголономный бильярд в полосе

2.1. Предельный переход

Рассмотрим задачу о качении шара по цилиндру без проскальзывания. Уравнения движения для данной задачи можно записать в следующем виде [2]:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{v}} = -(\boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{\gamma} + \alpha u \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{u} = (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{v}), \\ \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{v}$ — координаты и скорости центра масс шара, $u = R(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ — проекция угловой скорости шара (далее называемая спином) на нормаль к поверхности $\boldsymbol{\gamma}$, которая задается отображением Гаусса

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\nabla F(\boldsymbol{x})}{|\nabla F(\boldsymbol{x})|}, \tag{2.2}$$

где $F(\boldsymbol{x})$ — уравнение поверхности, а $\alpha = \dfrac{I}{I + mR^2}$ — постоянный коэффициент, зависящий от распределения масс в шаре и принимающий значения от 0 до 2/5. В рассматриваемом случае эллиптического цилиндра $F(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\dot{x}_1^2}{b_1^2} + \dfrac{\dot{x}_2^2}{b_2^2} - 1$, где b_1, b_2 — полуоси основания цилиндра, и уравнение (2.2) принимает вид

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{x}}{|\mathbf{A}\boldsymbol{x}|}, \qquad \mathbf{A} = \operatorname{diag}(b_1^{-2}, b_2^{-2}, 0). \tag{2.3}$$

Уравнения (2.1) допускают следующие первые интегралы движения:

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = 1, \qquad (\boldsymbol{v}, \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = 0,\\
H_1 = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2), \qquad H_2 = \frac{1}{2}(v_3^2 + \alpha u^2),\\
K = \frac{(\boldsymbol{v}, \mathbf{A}\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})} b_2^2, \qquad \text{где} \quad \mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1^2, b_2^2, 0).
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Первые два интеграла являются геометрическими, интегралы H_1 и H_2 представляют собой две независимые части интеграла энергии $H = H_1 + H_2$, а интеграл K является дополнительным квадратичным независимым интегралом, наиболее общий вид которого был указан в [2].

Рассмотрим теперь предельный переход уравнений (2.1) при стремлении одной из полуосей основания цилиндра к нулю $b_2 \to 0$. При таком предельном переходе мы получаем задачу о качении шара без проскальзывания по обеим сторонам полосы, заключенной между двумя прямыми. Легко показать, что внутри полосы движение шара является равномерным и прямолинейным, спин u сохраняется. При подходе шара к границе происходит мгновенный перекат шара на обратную сторону полосы. В проекции на плоскость данный процесс можно рассматривать как удар шара о стенку. Таким образом, мы получаем новую модель неголономного бильярда.

Рассмотрим теперь подробнее процесс предельного перехода и получаемый при этом закон удара. Оказывается справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть шар катится без проскальзывания по эллиптическому цилиндру, тогда при стремлении одной из полуосей основания цилиндра к нулю ($b_2 \to 0$) получается задача о неголономном бильярде внутри плоской полосы со следующим законом отражения*

$$
\boldsymbol{V}^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\sqrt{\alpha}\pi & -\sin\sqrt{\alpha}\pi\\ 0 & -\sin\sqrt{\alpha}\pi & -\cos\sqrt{\alpha}\pi \end{pmatrix} \boldsymbol{V}^-,
\tag{2.5}
$$

где $\boldsymbol{V} = (v_n, v_\tau, \sqrt{\alpha}u_a)$.

Доказательство.

Получим сначала закон отражения для нормальной составляющей скорости $\boldsymbol{v}$. Для этого введем переменную θ

$$
x_1 = b_1\cos\theta, \qquad x_2 = b_2\sin\theta.
\tag{2.6}
$$

Подставив (2.6) в выражение для интеграла K с учетом геометрической связи $(\boldsymbol{v}, \mathbf{A}\boldsymbol{x}) = 0$, получим

$$
K = (b_1^2\sin^2\theta + b_2^2\cos^2\theta)\frac{v_1^2}{b_1^4\sin^2\theta}.
\tag{2.7}
$$

При предельном переходе $b_2 \to 0$ получим $K = \dfrac{v_1^2}{b_1^2}$. Таким образом, в момент удара из условий сохранения интеграла K следует, что модуль нормальной скорости шара сохраняется, т. е.

$$
v_1^+ = -v_1^-, \qquad |v_1^\pm| = b_1\sqrt{K}.
\tag{2.8}
$$

Для определения закона отражения по переменным u и v_3 введем переменную φ следующим образом

$$v_3 = \sqrt{2H_2}\cos\varphi, \qquad u = \sqrt{\frac{2H_2}{\alpha}}\sin\varphi. \tag{2.9}$$

Выбрав в качестве нового времени переменную θ, запишем уравнение эволюции φ:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{\sqrt{\alpha}b_1b_2}{b_1^2\sin^2\theta + b_2^2\cos^2\theta}. \tag{2.10}$$

Сделав замену $x = b_1\operatorname{tg}\theta$ и использовав представление δ-функции

$$\delta(x) = \lim_{b_2\to 0}\frac{b_2}{\pi(x^2 + b_2^2)}, \tag{2.11}$$

получим в пределе $b_2 \to 0$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\sqrt{\alpha}\pi\delta(x). \tag{2.12}$$

Сделав обратную замену, получим

$$\dot\varphi = -s\sqrt{\alpha}\pi\delta(t - t_0), \tag{2.13}$$

где t_0 — момент удара о стенку, а $s = \operatorname{sign}(\dot\theta)$ определяет направление качения шара по цилиндру и является постоянным для каждой выбранной траектории. Из (2.13) следует закон отражения для φ:

$$\varphi^+ = \varphi^- - s\pi\sqrt{\alpha}. \tag{2.14}$$

Сделав обратную к (2.9) замену и введя переменную $\widetilde{u} = \sqrt{\alpha}u$, получим закон отражения

$$\boldsymbol{V}^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{\alpha}\pi & s\sin\sqrt{\alpha}\pi \\ 0 & -s\sin\sqrt{\alpha}\pi & \cos\sqrt{\alpha}\pi \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^-, \tag{2.15}$$

где $\boldsymbol{V} = (v_1, v_3, \widetilde{u})$.

Заметим, что закон (2.15) записан в проекциях на абсолютные оси x_1, x_2 и вектор нормали $\boldsymbol{\gamma}$. Однако при ударе о стенку вектор $\boldsymbol{\gamma}$ меняет направление на обратное. Поэтому вместо проекции u угловой скорости на вектор $\boldsymbol{\gamma}$ необходимо рассматривать проекцию u_a угловой скорости на некоторый постоянный вектор $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{\gamma}$. Связь между u_a и u задается соотношением

$$u_a = \begin{cases} u, & \theta > 0, \\ -u, & \theta < 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Кроме того, закон удара традиционно записывают в проекциях на локальные оси координат, задающих нормальную и тангенциальную составляющую скорости в точке удара. Эти проекции связаны с проекциями на оси абсолютной системы координат следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} v_n = \begin{cases} v_1, & \theta = 0, \\ -v_1, & \theta = \pi, \end{cases} \\ v_\tau = \begin{cases} v_3, & \theta = 0, \\ -v_3, & \theta = \pi. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.17}$$

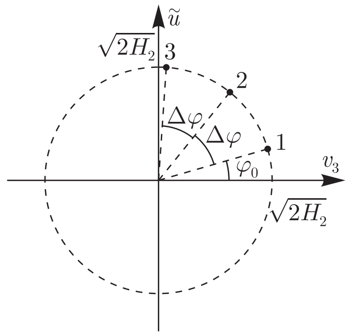

Рис. 1

В указанных проекциях закон отражения принимает вид

$$\boldsymbol{V}^{+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{\alpha}\pi & -\sin\sqrt{\alpha}\pi \\ 0 & -\sin\sqrt{\alpha}\pi & -\cos\sqrt{\alpha}\pi \end{pmatrix} \boldsymbol{V}^{-}, \tag{2.18}$$

где $\boldsymbol{V} = (v_n, v_\tau, \sqrt{\alpha}u_a)$. □

2.2. Анализ динамики

Рассмотрим свойства закона отражения (2.18) на примере полученной предельной задачи о бильярде в полосе. В данном случае проще привести анализ в проекциях на абсолютные оси v_1, v_3, поэтому будем рассматривать закон отражения в виде (2.15). Нетрудно заметить, что на плоскости $(v_3, \widetilde{u})$ закон отражения (2.15) представляет собой обыкновенный поворот на угол $\Delta\varphi = \sqrt{\alpha}\pi$ (см. рис. 1).

Таким образом, при последовательных отражениях от стенок соответствующие точки на плоскости $(v_3, \widetilde{u})$ будут ложиться через равные промежутки $\Delta\varphi = \sqrt{\alpha}\pi$ на окружность, задаваемую интегралом $H_2 = \frac{1}{2}(v_3^2 + \widetilde{u})$ (см. рис. 1). Используя данное свойство, можно доказать следующую теорему, аналогичную теореме об отсутствии вертикального ухода при качении шара по цилиндру (задача Штюблера).

Теорема 2. *Неголономный бильярд в полосе является ограниченным, а максимальный уход вдоль полосы определяется выражением*

$$\Delta z_{\max} = \sqrt{\frac{2H_2}{K}} \frac{2}{\sin\frac{\sqrt{\alpha}\pi}{2}}.$$

Доказательство.

Обозначим через $v_3^{(n)}$ значение скорости вдоль полосы на n-ом шаге. Из закона удара нетрудно получить явное выражение

$$v_3^{(n)} = \sqrt{2H_2}\cos(\varphi_0 + n\sqrt{\alpha}\pi), \tag{2.19}$$

где φ_0 и H_2 задают неголономную скорость v_3 и спин u с помощью (2.9).

Ограниченность движения шара вдоль полосы следует из отсутствия нулевой моды (независящего от n слагаемого) при разложении $v_3^{(n)}$ в ряд Фурье. Оценим теперь максимально возможный уход траектории вдоль полосы.

Время между ударами о противоположные стенки является постоянным и определяется формулой

$$t = \frac{2b_1}{|v_1|} = \frac{2}{\sqrt{K}}. \tag{2.20}$$

Общее смещение вдоль полосы за N ударов можно записать как

$$z_N = \frac{2\sqrt{2H_2}}{\sqrt{K}} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\varphi_0 + n\sqrt{\alpha}\pi) = \sqrt{\frac{2H_2}{K}} \frac{\sin(\varphi_0 + \sqrt{\alpha}\pi(N - \frac{1}{2})) - \sin(\varphi_0 - \frac{\sqrt{\alpha}\pi}{2})}{\sin\frac{\sqrt{\alpha}\pi}{2}}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) следует, что максимальный уход шара вдоль полосы равен

$$\Delta z_{\max} = z_{\max} - z_{\min} = \sqrt{\frac{2H_2}{K}} \frac{2}{\sin\frac{\sqrt{\alpha}\pi}{2}}.$$

□

3. Неголономный бильярд в круге

Рассмотрим аналогичный предельный переход в задаче о качении шара без проскальзывания по эллипсоиду вращения. При этом в пределе мы получим задачу о бильярде внутри круга. Исходные уравнения движения шара по эллипсоиду совпадают с уравнением (2.1), однако уравнение поверхности теперь имеет вид

$$F(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{R^2} + \frac{x_2^2}{R^2} + \frac{x_3^2}{b^2} - 1. \tag{3.1}$$

При этом выражение (2.3) для вектора нормали $\boldsymbol{\gamma}$ и первые два интеграла (2.4) сохраняются с точностью до замены $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(R^{-2}, R^{-2}, b^{-2})$.

Ввиду цилиндрической симметрии предельной задачи наиболее удобными переменными для исследования являются проекции скорости шара на орты цилиндрической системы координат

$$v_n = \frac{v_1x_1 + v_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad v_\tau = \frac{v_1x_2 - v_2x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad v_3 \tag{3.2}$$

и сферические координаты

$$\boldsymbol{x} = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, b\sin\theta). \tag{3.3}$$

В данных переменных первый из интегралов (2.4) сохраняется автоматически, а второй приводит к простому соотношению

$$v_3 = -\delta \operatorname{ctg}\theta v_n, \tag{3.4}$$

где введено обозначение $\delta = b/R$.

Уравнения движения в переменных v_n, v_τ, u, θ, φ имеют вид

$$\begin{cases} \dot{v}_n = \dfrac{\sin^2\theta v_\tau^2}{R\cos\theta(\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta)} + \dfrac{\alpha\delta\sin\theta v_\tau u}{R(\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta)} - \dfrac{\delta^2\cos\theta v_n^2}{R\sin^2\theta(\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta)}, \\ \dot{v}_\tau = -\dfrac{v_n v_\tau}{R\cos\theta} - \dfrac{\alpha\delta u v_n}{R\sin\theta(\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta)}, \\ \dot{u} = \dfrac{\delta(1-\delta^2)\cos^2\theta v_n v_\tau}{R\sin\theta(\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta)}, \qquad \dot\theta = -\dfrac{v_n}{R\sin\theta}, \qquad \dot\varphi = -\dfrac{v_\tau}{R\cos\theta}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5) допускают два первых интеграла движения

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2}(v_n^2 + v_\tau^2 + v_3^2 + \alpha u^2), \\ K = (1 + \delta^2\operatorname{ctg}^2\theta)(v_n^2 + v_\tau^2\sin^2\theta). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Так же, как и выше, из условий сохранения K после предельного перехода получаем

$$v_n^+ = -v_n^-. \tag{3.7}$$

Для определения закона отражения по другим переменным выберем θ в качестве нового времени и запишем уравнения движения для v_τ и u

$$\begin{cases} v_\tau' = \operatorname{tg}\theta v_\tau + \dfrac{\alpha\delta}{\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta}u, \\ u' = -\dfrac{\delta(1-\delta^2)\cos^2\theta}{\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta}v_\tau, \end{cases} \tag{3.8}$$

здесь штрих обозначает дифференцирование по θ. Уравнения (3.8) допускают первый интеграл движения

$$\mathcal{J}^2 = \frac{2H - K}{1-\delta^2} = v_\tau^2\cos^2\theta + \frac{\alpha}{1-\delta^2}u^2. \tag{3.9}$$

Используя этот интеграл, сведем систему (3.8) к одному дифференциальному уравнению с помощью следующей замены переменных:

$$u_\tau = \frac{\mathcal{J}}{\cos\theta}\cos\psi, \qquad u = \frac{\mathcal{J}\sqrt{1-\delta^2}}{\sqrt{\alpha}}\sin\psi. \tag{3.10}$$

Дифференциальное уравнение для ψ при этом имеет вид

$$\psi' = -\sqrt{\alpha}\frac{\delta\sqrt{1-\delta^2}\cos\theta}{\sin^2\theta + \delta^2\cos^2\theta}. \tag{3.11}$$

Используя замену $z = \sin\theta$, $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$ и представление δ-функции (2.11), в пределе $\delta \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ получим

$$\frac{d\psi}{dz} = -\sqrt{\alpha}\pi\delta(z) \tag{3.12}$$

или, после обратной замены,

$$\dot\psi = -\sqrt{\alpha}\pi s\delta(t - t_0), \tag{3.13}$$

где $s = \operatorname{sign}(\dot\theta)$, $s = -1$ при переходе с верхней полусферы ($\theta > 0$) на нижнюю ($\theta < 0$) и $s = 1$ в случае обратного перехода. Проинтегрировав уравнение (3.13) и сделав преобразование, обратное к (3.10), получим закон удара, совпадающий с (2.15). Так же, как и в случае бильярда в полосе, теперь необходимо перейти к проекции u_a угловой скорости на постоянный вектор. После такого перехода получим закон удара, полностью совпадающий с (2.5). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть шар катится без проскальзывания по эллипсоиду вращения, задаваемому уравнением* (3.1)*, тогда при стремлении третьей полуоси к нулю* ($b \to 0$) *получим задачу о неголономном бильярде внутри круга с законом отражения* (2.5).

3.1. Построение трехмерного отображения

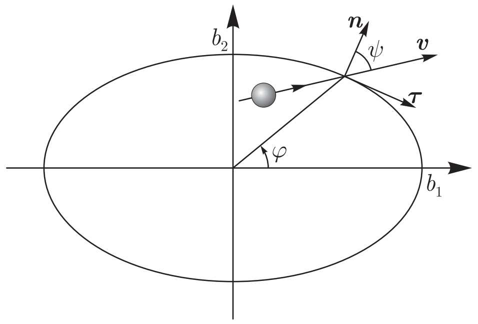

Рис. 2

Классическая задача о математическом бильярде традиционно исследуется с помощью двумерного точечного отображения. Добавление спина при рассмотрении бильярда влечет за собой увеличение размерности соответствующего отображения на единицу. Таким образом, для исследования динамики неголономного бильярда с законом отражения (2.18), в отличие от классического бильярда, необходимо рассмотрение трехмерного точечного отображения. В качестве примера построим такое отображение для неголономного бильярда в эллипсе. Выберем в качестве переменных отображения $\varphi \in [0, \pi)$ — угловую координату точки удара, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ — угол между скоростью падения шара и нормалью к границе эллипса в точке удара (рис. 2), и спин u_a.

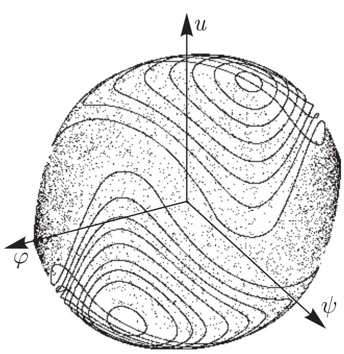

Рис. 3

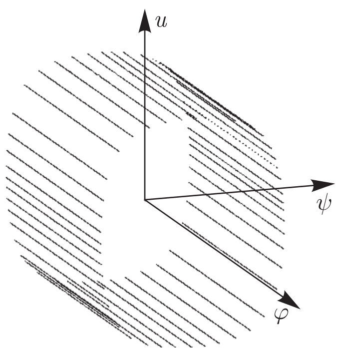

Рис. 4

При заданном значении интеграла энергии компоненты скорости падения имеют вид

$$\begin{aligned} v_n^- &= \sqrt{2H - \alpha u_a^2} \cos\psi, \\ v_\tau^- &= \sqrt{2H - \alpha u_a^2} \sin\psi. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Таким образом, координаты (φ, ψ, u_a) и значение интеграла H однозначно задают начальные условия траектории. В рассматриваемом случае бильярда в эллипсе существует дополнительный интеграл

$$K = \frac{(b_1^2 \sin^2 \varphi + b_2^2 \cos^2 \varphi)}{b_1^2 b_2^2} v_n^2, \tag{3.15}$$

благодаря чему все точки отображения лежат на поверхности

$$\frac{b_1^2 \sin^2 \varphi + b_2^2 \cos^2 \varphi}{b_1^2 b_2^2} (2H - \alpha u_a^2) \cos^2 \psi = K. \tag{3.16}$$

Пример такого отображения приведен на рис. 3. Как видно из рисунка, получившееся отображение содержит хаотический слой, что говорит о неинтегрируемости неголономного бильярда в эллипсе.

В случае бильярда в круге ситуация упрощается. Интеграл K перестает зависеть от φ. Кроме того, нетрудно показать, что для круга выполняется тождество $V_k^+ = V_{k-2}^+$, где k — номер итерации. Следовательно, все точки отдельной траектории попеременно ложатся на две параллельные прямые $u_a = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$, причем значения u и ψ связаны соотношением

$$(2H - \alpha u_a^2) \cos^2 \psi = R^2 K.$$

На рис. 4 приведен пример соответствующего трехмерного отображения, иллюстрирующий указанные свойства бильярда.

4. Аксиоматический подход

Полученная модель неголономного бильярда (2.5) не может корректно описать ряд эффектов, наблюдаемых в реальных бильярдах, поэтому построим общую неголономную модель удара, основываясь на законах сохранения и эффектах, наблюдаемых в реальных бильярдах.

Рассмотрим неголономный закон удара как некоторое произвольное преобразование скоростей, сохраняющее интегралы

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(v_n^2 + v_\tau^2 + \alpha u^2), \\ K &= v_n^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Наиболее общий закон удара, сохраняющий данные интегралы, имеет вид

$$V^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & A \end{pmatrix} V^-, \tag{4.2}$$

где $V = (v_n, v_\tau, \sqrt{\alpha} u)$, а A — матрица, включающая в себя произвольный поворот и всевозможные отражения. Угол поворота в рассмотренной неголономной постановке определяется из предельного перехода (см. п. 2) и равен $\sqrt{\alpha}\pi$. Таким образом, наиболее общий вид матрицы A —

$$A = \begin{pmatrix} s_1 s_3 \cos \sqrt{\alpha}\pi & s_2 s_3 \sin \sqrt{\alpha}\pi \\ -s_1 s_4 \sin \sqrt{\alpha}\pi & s_2 s_4 \cos \sqrt{\alpha}\pi \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где $s_1, \ldots, s_4$ принимают значения ± 1.

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких значениях s_i неголономная модель удара будет наиболее близко описывать поведение реальных бильярдов. Для этого рассмотрим ряд примеров отражения шара от стенки.

1. *Удар эффе (рис. 5)*

Начальные и конечные значения скоростей при данном ударе удовлетворяют условиям

$$v_\tau^- = 0, \qquad u^- > 0, \qquad v_\tau^+ > 0, \qquad u^+ > 0.$$

Для того чтобы модель (4.3) правильно описывала данный удар в случае однородного шара $I = \frac{2}{5}me^2$ $(\alpha = \frac{2}{7})$, необходимо потребовать выполнения равенств $s_2 \cdot s_4 = -1$ и $s_2 \cdot s_3 = 1$.

2. *Удар без закручивания (рис. 6)*

Начальные и конечные значения скоростей удовлетворяют условиям

$$u^- = 0, \qquad v_\tau^- > 0, \qquad u^+ > 0, \qquad v_\tau^+ > 0.$$

Для описания данного удара с помощью рассматриваемой модели необходимо потребовать выполнения равенств $s_1 s_4 = -1$, $s_1 s_3 = -1$.

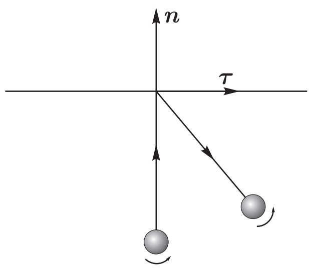

Рис. 5

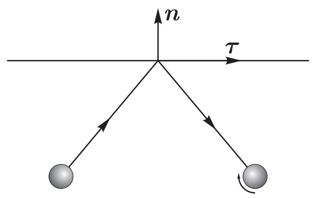

Рис. 6

Нетрудно показать, что все четыре условия выполнить одновременно невозможно. Таким образом, построенная модель может описывать лишь часть наблюдаемых эффектов бильярдной игры. Приведем здесь закон неголономного удара, правильно описывающий удар эффе и дающий правильное направление вращения шара после удара без закручивания

$$V^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{\alpha}\pi & \sin\sqrt{\alpha}\pi \\ 0 & \sin\sqrt{\alpha}\pi & -\cos\sqrt{\alpha}\pi \end{pmatrix} V^-. \tag{4.4}$$

Отметим, что закон (4.4) применим только для распределений масс, при которых $\cos(\sqrt{\alpha}\pi) < 0$, т. е. $\alpha > 1/4$ (сюда, в частности, входит и однородный шар). Для распределений с $\alpha < 1/4$ соответствующий закон будет иметь вид

$$V^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\sqrt{\alpha}\pi & \sin\sqrt{\alpha}\pi \\ 0 & \sin\sqrt{\alpha}\pi & \cos\sqrt{\alpha}\pi \end{pmatrix} V^-. \tag{4.5}$$

Законы (4.4), (4.5) и (2.5) совпадают, с точностью до отражений, относительно некоторых осей; следовательно, результаты о неинтегрируемости, полученные в п. 3, остаются справедливы и для (4.4), (4.5).

В заключение отметим, что интересно было бы исследовать периодические решения неголономного бильярда в эллипсе и их устойчивость, а также изучить вопросы об интегрируемости неголономных бильярдов в многоугольниках [15, 20]. В качестве смежных задач, напрямую не связанных с описанной выше моделью бильярда, но обобщающих модель математического бильярда, укажем также ряд задач об отскоках твердого тела от гладкой (либо абсолютно шероховатой) плоскости, в которых также возникают точечные отображения и которые было бы интересно исследовать на интегрируемость, наличие периодических решений и их устойчивость.

Авторы выражают признательность за полезные замечания А. П. Иванову и А. П. Маркееву, с которыми мы неоднократно имели дискуссии на семинарах в ИКИ в г. Ижевске, а также В. Драговичу за полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (код проекта 2009-1.1-111-048-011). Работа А. А. Килина выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (код проекта МК-8428.2010.1).

Список литературы

[1] Appell P. Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement // J. Math. Pures Appl., Sér. 6, 1911, vol. 7, pp. 85–96.

[2] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.

[3] Coriolis G.-G. Théorie mathématique des effets du jeu billard. Paris: Carilian-Goeury, 1835. 174 p. [Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехтеориздат, 1956. 236 с.]

[4] Cross R. Grip-slip behavior of a bouncing ball // Am. J. Phys., 2002, vol. 70, no. 11, pp. 1093–1102.

[5] Chatterjee, A. Rigid Body Collisions: Some General Considerations, New Collision Laws, and Some Experimental Data // Ph.D. Thesis, Jan 1997.

[6] Bayes J.H., Scott W. Billiard-ball collision experiment // Am. Jour. Physics, 1963, 3(31), pp. 197–200.

[7] Derby N., Fuller R. Reality and theory in a collision // The Physics Teacher, 1999, vol. 37, no. 1, pp. 24–27.

[8] Glocker Ch. On frictionless impact models in rigid-body systems: Non-smooth mechanics // R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2001, vol. 359, no. 1789, pp. 2385–2404.

[9] Hemming G. W. Billiards mathematically treated. London: Macmillan, 1904. 61 p.

[10] Horák Z. Théorie generále du choc dans les systémes matériels // J. École Polytech., Sér. 2, 1931, vol. 28, pp. 15–64.

[11] Horák Z., Pacáková I. The theory of the spinning impact of imperfectly elastic bodies // Czechoslovak. J. Phys. B, 1961, vol. 11, pp. 46–65.

[12] Resal H. Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard // J. Math. Pures Appl., Sér. 3, 1883, vol. 9, pp. 65–98 [Резаль А. Комментарии к математической теории явлений бильярдной игры // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 415–438].

[13] Suris Yu. B. The problem of integrable discretization: Hamiltonian approach. (Progr. Math., vol. 219.) Boston: Birkhäuser, 2003. 1070 p.

[14] Tabachnikov, S. Geometry and Billiards. (Student Mathematical Library, vol. 30.) Providence, RI: AMS, 2005. 176 p.

[15] Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: механизмы рождения // УМН, 1992, т. 47, вып. 3, с. 9–74.

[16] Гольдсмит В. Удар: Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.

[17] Драгович В., Раднович М. Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.–Ижевск: НИЦ РХД, ИКИ, 2010. 310 с.

[18] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.

[19] Иванов А. П. Об уравнениях движения неголономной системы с неудерживающей связью // ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 717–723.

[20] Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды: Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: МГУ, 1991. 168 с.

[21] Маркеев А.П. Динамика твердого тела при наличии его соударений с твердой поверхностью // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, №1, с. 1–38.

[22] Нагаев Р. Ф., Холодилин Н. А. О теории соударений бильярдных шаров // Изв. РАН Мех. тв. тела, 1992, vol. 27, no. 6, pp. 48–55.

[23] Хубер А. Играем в бильярд. М.: Белый город, 2009. 128 с. [Huber A. Richtig Billard. München: BLV, 2007. 128 S.]

[24] Wallace R.E. Schroeder M.C. Analysis of billiard ball collisions in two dimensions // Am. J. Phys., 1988, vol. 56, no. 9, pp. 815–819.