Геометрическое исследование ударов и столкновений тел[1]

Г. Дарбу

В 1874 году я представил Академии наук основные результаты исследования, посвященного столкновению тел (см. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. LXXVIII, pp. 1421, 1559, 1645, 1767 и *Bull. Sci. Math.*, *Sér. 2*, t. IV). Здесь я попытаюсь рассказать об основных полученных мной результатах.

1. Удары

Рассмотрим материальную точку массы m, на которую действуют различные силы. Пусть x, y, z обозначают координаты этой точки в момент времени t, v_x, v_y, v_z — компоненты ее скорости в тот же момент времени, X_i, Y_i, Z_i — компоненты какой-либо из сил, действующих на точку. Тогда справедливы уравнения

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = X_1 + \ldots + X_n, \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = Y_1 + \ldots + Y_n, \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = Z_1 + \ldots + Z_n, \end{cases} \tag{1}$$

следовательно, обозначая через v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} компоненты скорости тела в момент времени O, мы получим

$$\begin{cases} mv_x - mv_{0x} = \displaystyle\int_0^t X_1 dt + \ldots + \int_0^t X_n dt, \\ mv_y - mv_{0y} = \displaystyle\int_0^t Y_1 dt + \ldots + \int_0^t Y_n dt, \\ mv_z - mv_{0z} = \displaystyle\int_0^t Z_1 dt + \ldots + \int_0^t Z_n dt. \end{cases} \tag{2}$$

[1]Darboux G. Note XXI: Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps // Despeyrous T. Cours de mécanique (avec des notes par m. G. Darboux): T. II. Paris, 1884. P. 547–581. Научная редакция перевода и комментарий (с. 412) — А. П. Иванов.

Эти уравнения допускают следующую интерпретацию.

Вслед за другими авторами будем называть *импульсом* силы (X, Y, Z) геометрическую величину, компоненты которой равны

$$\int_0^t X dt, \quad \int_0^t Y dt, \quad \int_0^t Z dt;$$

тогда уравнения (2) позволяют нам сформулировать следующую теорему.

Геометрическое приращение количества движения материальной точки на произвольном конечном промежутке времени равно геометрической сумме импульсов сил, которые действуют на эту точку в течение рассматриваемого промежутка времени.

Эта теорема означает, что если на материальную точку действуют какие-то силы и если нам известны *только* импульсы этих сил на данном промежутке времени, то мы сможем определить геометрическое приращение количества движения точки, на которую действуют силы; поэтому, зная массу и начальную скорость точки, мы найдем величину и направление ее конечной скорости. Но важно отметить, что *у нас не будет ни малейшего представления о положении этой точки в конечный момент времени.*

Теперь представим себе, что промежуток становится все короче, хотя импульсы некоторых сил сохраняют конечное значение, для чего эти силы должны становиться все больше: изменение скорости происходит за все более короткий отрезок времени, но все время остается конечным. Кроме того, если предположить, что импульсы сил относительно любого промежутка времени, лежащего в пределах рассматриваемого, не превышают фиксированных величин, то изменения скорости материальной точки будут конечны, а ее перемещение с сокращением промежутка времени будет становиться все меньше.

Действительно, сведем все силы к одной, компоненты которой в момент времени θ равны $X_\theta, Y_\theta, Z_\theta$, и рассмотрим проекцию движения, например, на ось X. Получаем

$$x - x_0 - v_{0x}t = \int_0^t d\theta \int_0^\theta X_\theta d\theta.$$

Мы предполагаем, что, каково бы ни было θ, импульс $\int_0^\theta X_\theta d\theta$ не превосходит фиксированного числа M. Тогда в абсолютных величинах

$$x - x_0 - v_{0x}t < \int_0^t M d\theta$$

или

$$x - x_0 - v_{0x}t < Mt,$$

следовательно, при сокращении промежутка времени разность $X - X_0$ будет убывать[2].

[2]Понятно, что здесь мы вводим условие, которое, вообще говоря, не очевидно: то, что импульс силы на произвольном участке рассматриваемого промежутка времени не превосходит фиксированной величины, как бы ни уменьшался этот промежуток. В приложениях это условие всегда выполняется, так как в них рассматривают только такие ударные силы, направление которых за все время их действия не претерпевает существенных изменений. Например, при соударении двух тел сила, действующая на точку соприкосновения одного из них, может действовать только в определенном направлении, так, чтобы эти тела разошлись. Тогда интеграл $\int_0^\theta X_\theta d\theta$ сохраняет знак и все время возрастает, поэтому он не превосходит своего конечного значения, которое, по предположению, ограничено.

Однако, если встать на чисто теоретическую точку зрения, то нетрудно найти силы, которые за очень короткое время вызывают конечные или даже нулевые изменения скорости, и тем не менее тело перемеща-

Итак, мы постепенно приближаемся к предельному состоянию, в котором тело, не изменяя своего положения, резко меняет скорость. Именно это предельное состояние изучает теория столкновений, и из предыдущих рассуждений сразу следует, что мы сможем найти, как изменилась скорость тела, если будем знать, чему равны импульсы различных действующих на него сил. Эти импульсы принято называть *ударами*. Понятно, что удары, производимые конечными силами, такими как сила тяжести, можно считать равными нулю.

Я не буду тратить время на то, чтобы оспаривать одно возражение, которое иногда выдвигают против теории ударов. Некоторые авторы, основываясь на том, что сил, мгновенных в строгом смысле этого слова, не существует, предпочитают не использовать понятие удара и теории, изучающие действие ударов. С геометрической точки зрения в природе и прямых линий не существует тоже, тем не менее мы используем это абстрактное понятие и с интересом изучаем его. Несомненно, при переходе к приложениям нам приходится выяснять, какие ошибки мы можем допустить, применяя теоремы чистой науки, однако, с нашей точки зрения, этот вопрос не следует смешивать с развитием науки самой по себе.

Мы знаем, как измерять и как представлять удары. В сущности, достаточно рассмотреть количества движения, сопоставив их с количествами движения точек, на которые удары действуют. Я вкратце напомню читателю правила, касающиеся воздействия ударов на твердые тела, и одновременно выскажу несколько новых замечаний об их применении.

Если у твердого тела есть неподвижная ось, то произведение момента инерции относи-

---

ется на конечную величину. Пусть, например, точка движется по прямой, и на нее действует сила, которая в момент времени θ выражается по формуле

$$X_\theta = \frac{4c\pi}{T^2}\sin\frac{\theta\pi}{T}\cos\frac{\theta\pi}{T},$$

где c и T — константы. Тогда

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{4c\pi}{T^2}\sin\frac{\theta\pi}{T}\cos\frac{\theta\pi}{T},$$

следовательно, обозначая через v_0 начальную скорость, мы получим

$$v_x - v_0 = \frac{2c}{T}\sin^2\frac{2\theta\pi}{T},$$

$$x - x_0 - v_0\theta = \frac{c\theta}{T} - \frac{c}{2\pi}\sin\frac{2\theta\pi}{T}.$$

В результате при $\theta = T$

$$v = v_0,$$

$$x = x_0 + v_0T + c.$$

Если предположить, что промежуток времени T становится все меньше, тогда как c остается постоянной, то мы получим очень большую силу, действующую очень короткое время, *и эта сила никак не изменяет скорость, но перемещает точку на некоторое расстояние c.*

Однако легко понять, что сформулированное в тексте условие уже не выполняется, поскольку частичный импульс

$$\int_0^\theta X_\theta d\theta = \frac{2c}{T}\sin^2\frac{\theta\pi}{T}$$

не будет конечным, например, при $\theta = \dfrac{T}{2}$, когда T стремится к нулю. Впрочем, нетрудно увидеть, что во время своего действия сила меняет направление.

Именно силы такого рода используют локомотивы, когда им необходимо выполнить одну из операций, часто производимых на вокзале: быстро передвинуть один или несколько вагонов в другое положение, не придав им скорости.

тельно этой оси на приращение скорости вращения равно сумме моментов ударов относительно этой оси.

Если у тела есть неподвижная точка, то обозначим через p, q, r компоненты скорости вращения, разложенной по трем главным осям, проходящим через эту точку, а через A, B, C — моменты инерции относительно трех данных осей. Тогда приращения скоростей Δp, Δq, Δr будут записываться по формулам

$$\begin{cases} A\Delta p = L, \\ B\Delta q = M, \\ C\Delta r = N, \end{cases} \tag{3}$$

где L, M, N обозначают суммы моментов ударов относительно наших трех осей.

Вышеуказанные формулы можно заменить на очень элегантное геометрическое построение, которым часто пользуется Пуансо. Пусть O — неподвижная точка. Предположим, что мы переносим в нее количества движения всех точек системы, составляя из них пары, возникающие после таких переносов; результирующая пара будет *парой количеств движения*, перенесенных в точку O. Как известно, существует очень простая связь между ней и вращением. 1) Ось вращения служит сопряженным диаметром плоскости этой пары относительно центрального эллипсоида точки O и расположена по ту же сторону от плоскости, что и ось пары. 2) Если G обозначает момент пары, l — длину полудиаметра, который пересекается в эллипсоиде с осью вращения, а δ — расстояние от центра до плоскости, которая касается эллипсоида в конечной точке оси вращения, то значение угловой скорости вращения равно

$$\omega = Gl\delta.$$

Итак, мы видим, что, зная пару количеств движения, мы тут же определим движение твердого тела.

Однако вышеуказанные формулы можно интерпретировать следующим образом. Перенесем все импульсивные силы в неподвижную точку и сложим все пары, возникающие вследствие такого переноса; мы получим результирующую пару. *Достаточно сложить эту пару с парой полученных ранее количеств движения, и мы найдем новую пару количеств движения.*

В случае, когда твердое тело полностью свободно, обозначим через m массу тела, через V_x, V_y, V_z — компоненты скорости центра тяжести, через X, Y, Z — компоненты общей результирующей всех ударов, перенесенных в центр тяжести. Тогда

$$\begin{cases} m\Delta V_x = X, \\ m\Delta V_y = Y, \\ m\Delta V_z = Z, \end{cases} \tag{4}$$

и эти уравнения можно понимать следующим образом: новая скорость центра тяжести будет такой, как если бы вся масса была сосредоточена в нем, а все удары — перенесены в него параллельным переносом.

Что касается изменений во вращении вокруг центра тяжести, то, чтобы определить вращение, достаточно будет рассмотреть этот центр как неподвижную точку и применить к нему либо формулы (3), либо эквивалентное им геометрическое построение Пуансо.

Вследствие линейности всех этих уравнений сразу делаем следующие выводы. 1) Чтобы получить новую скорость произвольной точки, надо сложить прежнюю скорость со скоростью, которая возникла бы, если бы удары действовали на покоящееся тело. 2) Результат не зависит от того, действуют ли удары одновременно или последовательно в течение достаточно короткого промежутка времени. 3) Наконец, если умножить удары на произвольное число p, то скорости, возникающие из-за их воздействия на покоящееся тело, тоже умножаются на p. Впрочем, все эти результаты можно без труда обобщить на тот случай, когда на твердое тело наложены связи произвольной природы, и компоненты скорости, которую приобретает произвольная точка, всегда представляют собой линейные функции от компонент ударов, действующих на твердое тело.

В завершение заметим, что приведенные выше геометрические построения позволяют без труда ответить на некоторые вопросы. Например, предположим, что мы хотим найти удары, которые, будучи приложенными к свободному твердому телу, сообщают ему начальное вращение. Нетрудно понять, что линии действия этих ударов должны быть перпендикулярны их поляре относительно центрального эллипсоида центра тяжести; таким образом, они образуют хорошо известный комплекс, исследованный в трудах различных геометров.

Действительно, рассмотрим удар P, приложенный к твердому телу. Он сообщает центру тяжести скорость поступательного движения, которая будет ему параллельна. Что касается вращения вокруг центра тяжести, то мы видели, что оно начинается как вращение вокруг прямой, которая служит сопряженным диаметром плоскости, *проходящей через удар* P и центр тяжести. Для того, чтобы начальное движение было вращением, необходимо, чтобы поступательное движение, сообщенное центру тяжести, было нормальным к оси вращения, то есть чтобы линия действия удара P представляла собой прямую, перпендикулярную диаметру, сопряженному относительно центрального эллипсоида центра тяжести и лежащему в плоскости, проходящей через эту прямую и через центр тяжести; или, что то же самое, необходимо, чтобы эта линия действия представляла собой прямую, перпендикулярную к ее поляре относительно центрального эллипсоида инерции для центра тяжести.

2. Живые силы в теории удара

Вернемся к уравнениям, описывающим действие ударов на материальную точку:

$$\begin{cases} m(v_x - v_{0x}) = \sum \int_0^t X dt, \\ m(v_y - v_{0y}) = \sum \int_0^t Y dt, \\ m(v_Z - v_{0z}) = \sum \int_0^t Z dt. \end{cases} \tag{5}$$

Умножим их на $v_x + v_{0x}, v_y + v_{0y}, v_z + v_{0z}$ и результаты сложим. Обозначая через v_0 и V начальную и конечную скорости, находим

$$\begin{cases} m(v^2 - v_0^2) = \\ \qquad = \sum \int_0^t [X(v_x + v_{0x})dt + y(v_y + v_{0y})dt + Z(v_Z + v_{0z})dt]. \end{cases} \tag{6}$$

Правая часть этой формулы допускает очень простое геометрическое истолкование. Если бы в течение всего времени действия сила (X, Y, Z) действовала на тело, движущееся с постоянной скоростью, компоненты которой равны

$$v_x + v_{0x}, \quad v_y + v_{0y}, \quad v_z + v_{0z},$$

то ее элементарная работа была бы равна

$$X(v_x + v_{0x})dt + Y(v_y + v_{0y})dt + Z(v_z + v_{0z})dt,$$

а ее полная работа на промежутке времени от 0 до t в точности совпала бы с интегралом, стоящим в правой части формулы (6). В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Когда удары действуют на материальную точку, вариация живой силы равна суммарной работе, которую произвели бы силы, вызвавшие эти удары, если бы в течение всего времени их действия материальная точка сохраняла бы постоянную скорость, равную геометрической сумме начальной и конечной скоростей.*

Теперь умножим уравнения (5) на v_x, v_y, v_z соответственно, и результаты сложим. Мы получим уравнение, которому нетрудно придать следующий вид:

$$\begin{cases} mv_0^2 - mv^2 = m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] - \\ \qquad - 2\sum \int_0^t (Xv_x + Yv_y + Zv_z)dt. \end{cases} \tag{7}$$

Если истолковать это уравнение так же, как предыдущее, то мы придем еще к одному утверждению.

Теорема 2. *Потеря живой силы равна живой силе, которая соответствует потерянной скорости, минус удвоенная суммарная работа, которую произвели бы силы, если бы в течение всего времени их действия материальная точка сохраняла бы постоянную скорость, равную своей конечной скорости.*

Наконец, умножая на v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, мы точно так же получим уравнение

$$\begin{cases} mv^2 - mv_0^2 = m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] + \\ \qquad + 2\sum \int_0^t (Xv_{0x} + Yv_{0y} + Zv_{0z})dt, \end{cases} \tag{8}$$

которое даст нам следующую теорему.

Теорема 3. *Приращение живой силы равно живой силе, которая соответствует выигранной (или потерянной) скорости, плюс удвоенная работа, которую произвели бы силы, если бы в течение всего времени их действия материальная точка сохраняла бы постоянную скорость, равную начальной скорости.*

Легко понять, что это последнее предложение представляет собой простое следствие двух предыдущих, но лучше будет использовать его непосредственно.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из некоторого числа материальных точек. Запишем для каждой точки уравнения, аналогичные уравнению (6), и сложим их. Получаем

$$\begin{cases} \sum mv^2 - \sum mv_0^2 = \\ = \sum \sum \int_0^t [Xdt(v_x + v_{0x}) + ydt(v_y + v_{0y}) + Zdt(v_Z + v_{0z})], \end{cases} \tag{9}$$

где суммы, стоящие в левой части, берутся по всем материальным точкам, а сумма в правой части — по всем силам. Данное уравнение приводит нас к следующей теореме.

Теорема 4. *Вариация полной живой силы системы равна суммарной работе, которую произвели бы удары, как внутренние, так и внешние, если бы каждая из точек приложения этих ударов в течение всего времени их действия сохраняла бы постоянную скорость, равную геометрической сумме ее начальной и конечной скоростей.*

Точно так же из уравнения (7) получаем соотношение

$$\left\{\begin{aligned} &\sum mv^2 - \sum mv_0^2 = \sum m[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_Z - v_{0z})^2] - \\ &\qquad\qquad -2\sum\sum \int_0^t (Xv_x + Yv_y + Zv_z)dt, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

которое дает нам следующую теорему.

Теорема 5. *Потеря живой силы системы равна живой силе, которая соответствует потерянным скоростям, минус удвоенная суммарная работа, которую произвели бы удары, как внутренние, так и внешние, если бы каждая из точек их приложения в течение всего времени их действия сохраняла бы постоянную скорость, равную конечной скорости.*

Все сформулированные выше утверждения относятся к силам, действующим в течение некоторого времени. Однако если материальная система представляет собой твердое тело, а силы действуют в течение очень короткого времени, то есть на самом деле представляют собой удары, то нетрудно показать, что члены, соответствующие внутренним ударам, попарно уничтожаются, и в уравнениях (9) и (10) их нет. Действительно, пусть m, m' — это две точки твердого тела, между которыми действует сила (X, Y, Z). Обозначим через v_{0x}, $v_x, \ldots$ скорости точки m, а через v'_{0x}, $v'_x, \ldots$ — скорости точки m'. Слагаемые, возникающие в уравнениях (9) и (10) из-за действия силы (X, Y, Z), состоят из двух выражений

$$\left\{\begin{aligned} &(v_x - v'_x)\int Xdt + (v_y - v'_y)\int Ydt + (v_z - v'_z)\int Zdt, \\ &(v_{0x} - v'_{0x})\int Xdt + (v_{0y} - v'_{0y})\int Ydt + (v_{0z} - v'_{0z})\int Zdt. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

По нашему предположению расстояние между точками m, m' не изменяется, поэтому начальная и конечная скорости удовлетворяют условиям

$$\left\{\begin{aligned} &(x - x')(v_x - v'_x) + (y - y')(v_y - v'_y) + (z - z')(v_z - v'_z) = 0, \\ &(x - x')(v_{0x} - v'_{0x}) + (y - y')(v_{0y} - v'_{0y}) + (z - z')(v_{0z} - v'_{0z}) = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

где x, y, z, x', y', z' обозначают координаты этих точек. Кроме того, поскольку удар направлен вдоль прямой, соединяющей данные точки, справедливы равенства

$$\int Xdt = \lambda(x - x'), \quad \int Ydt = \lambda(y - y'), \quad \int Zdt = \lambda(z - z'),$$

следовательно, с учетом формул (12), оба выражения (11) равны нулю. Таким образом, в формулах (9) и (10) внутренних ударов нет.

Приведенное выше доказательство не полностью безупречно, так как в нем предполагается, что расстояния между различными точками остаются теми же самыми все время, пока действуют удары. Однако априори легко понять, что это условие не будет необходимым и для выполнения теорем достаточно, чтобы расстояния между различными точками принимали первоначальные значения после ударов. Действительно, в этом случае теоремы о движении центра тяжести и о моментах позволяют найти новое движение твердого тела, следовательно, вариацию живой силы. Однако применение этих теорем не зависит от наличия преходящих деформация, которые могут возникать во время действия ударов. Поэтому понятно, что то же самое справедливо для вариации живой силы, следовательно, выражения, найденные нами в предположении о том, что расстояния неизменны, должны оставаться в силе во всех случаях, когда после прекращения действия ударных сил расстояния принимают свои начальные значения.

Впрочем, сейчас мы проверим найденные выше предложения, используя только обыкновенные уравнения.

С этой целью вернемся к уравнениям (3) и (4), записывая их в виде

$$
\begin{aligned}
m(V_x - V_{0x}) &= \sum X_i = X,\\
m(V_y - V_{0y}) &= \sum Y_i = Y,\\
m(V_z - V_{0z}) &= \sum Z_i = Z,\\
A(p - p_0) &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = L,\\
B(q - q_0) &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = M,\\
C(r - r_0) &= \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = N,
\end{aligned}
$$

где x_i, y_i, z_i обозначают координаты точки приложения удара (X_i, Y_i, Z_i) относительно трех главных осей центра тяжести.

Умножая эти уравнения на $V_x + V_{0x}, \ldots, p + p_0, \ldots$ соответственно и складывая, получаем

$$
\left\{
\begin{aligned}
& mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2 =\\
&\qquad = X(V_x + V_{0x}) + Y(V_y + V_{0y}) + Z(V_z + V_{0z}) +\\
&\qquad + L(p + p_0) + M(q + q_0) + N(r + r_0).
\end{aligned}
\right.
\tag{13}
$$

Левая часть представляет собой вариацию живой силы. С другой стороны, если обозначить через $v_{ix}^0, \ldots, v_{ix}, \ldots$ компоненты начальной и конечной скоростей точки (x_i, y_i, z_i) — точки приложения удара (X_i, Y_i, Z_i), то

$$
\begin{aligned}
v_{ix}^0 &= V_{0x} + q_0 z_i - r_0 y_i, & v_{ix} &= V_x + q z_i - r y_i,\\
v_{iy}^0 &= V_{0y} + p_0 x_i - p_0 z_i, & v_{iy} &= V_y + r x_i - p z_i,\\
v_{iz}^0 &= V_{0z} + r_0 y_i - q_0 x_i, & v_{iz} &= V_z + p y_i - q x_i,
\end{aligned}
$$

и после несложных вычислений находим

$$
\begin{aligned}
& \sum X_i(v_{ix} + v_{ix}^0) + Y_i(v_{iy} + v_{iy}^0) + Z_i(v_{iz} + v_{iz}^0) =\\
&\qquad = X(V_x + V_{0x}) + Y(V_y + V_{0y}) + Z(V_z + V_{0z}) +\\
&\qquad + (p + p_0)L + (q + q_0)M + (r + r_0)N.
\end{aligned}
$$

Сравнивая этот результат с уравнением (13), получаем

$$
\left\{
\begin{aligned}
& mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Cr_0^2 =\\
&\qquad = \sum X_i(v_{ix} + v_{ix}^0) + Y_i(v_{iy} + v_{iy}^0) + Z_i(v_{iz} + v_{iz}^0),
\end{aligned}
\right.
\tag{14}
$$

а данное уравнение отличается от уравнения (9) только тем, что в нем нет членов, соответствующих внутренним действиям. В итоге мы приходим к следующей теореме.

Теорема 6. *Когда удары действуют на твердое тело, вариация живой силы равна суммарной работе, которую произвели бы эти удары, если бы их точки приложения в течение всего времени их действия сохраняли постоянную скорость, равную геометрической сумме их начальной и конечной скоростей.*

Точно так же убеждаемся в справедливости уравнения

$$\begin{cases} Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 + mV_0^2 - Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 - mV^2 = \\ \qquad = A(p-p_0)^2 + B(q-q_0)^2 + C(r-r_0)^2 + m(V-V_0)^2 - \\ \qquad - 2\sum(X_i v_{ix} + Y_i v_{iy} + Z_i v_{iz}), \end{cases} \tag{15}$$

которое отличается от уравнения (10) только тем, что в нем нет членов, соответствующих внутренним ударам, и приводит нас к следующей теореме.

Теорема 7. *Потеря живой силы у твердого тела равна живой силе, соответствующей потерянным скоростям, минус удвоенная суммарная работа, которую произвели бы удары, если бы точки, на которые они действуют, в течение всего времени их действия сохраняли бы постоянную скорость, равную их конечной скорости.*

Имеет смысл заметить, что если на твердое тело наложены какие-то связи, например, если у него есть неподвижные точки либо точки, которые должны оставаться на фиксированной поверхности, либо поверхности, которые должны проходить через фиксированные точки и т. д., то в полученных выше уравнениях все члены, соответствующие ударам связи, равны нулю, при условии, что трением можно пренебречь. Например, при наличии неподвижной точки удар, который получает тело от фиксированного препятствия, при действии на точку, скорость которой равна нулю и таковой останется, не даст слагаемых ни в одном из уравнений (14) или (15).

Соответственно, если на твердое тело, находящееся в состоянии покоя, действует единственный удар, то из теоремы 6 и уравнения (14) следует, что сообщаемая телу живая сила будет равна произведению этого ударного импульса на проекцию скорости, которую получит точка приложения, взятую по направлению удара. Поэтому необходимо, чтобы данная проекция была больше нуля, следовательно, чтобы точка приложения *поддавалась* действию соответствующей ударной силы. Этот результат согласуется с нашим повседневным опытом; но более того, вышеуказанная теорема, позволившая нам его обосновать, приводит нас к рассмотрению еще одного элемента, который связан с прямыми в твердом теле и определение которого мы сейчас дадим.

Представим себе прямую D и предположим, что эта прямая служит линией действия некоторого единичного удара. Пусть этот удар приложен в точке A прямой D. Он сообщает точке A скорость, проекция которой на линию удара, а следовательно, и на нашу прямую, больше нуля; обозначим эту проекцию через $\frac{1}{\mu}$; понятно, что она сохранит свое значение, если мы будем перемещать ударную силу по прямой D: действительно, нам известно, что тогда сообщаемое телу движение останется тем же самым, с другой стороны, при таком движении проекции скоростей всех точек прямой на эту прямую одинаковы.

Эту величину μ, которая строго больше нуля, мы будем называть *параметром прямой.* Определив параметр, мы будем знать, что *любой удар, равный P и направленный вдоль данной прямой, будет задавать в своей точке приложения скорость, проекция которой на линию удара будет больше нуля и равна $\frac{P}{\mu}$.* Найдем, чему равен этот параметр в основных случаях, которые мы собираемся рассмотреть.

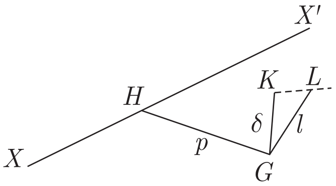

Рис. 1

1) Сначала предположим, что тело свободное, и удар действует вдоль прямой XX' (рис. 1). Обозначим массу тела через M. Сперва удар P сообщает всем точкам скорость поступательного движения, равную $\frac{P}{M}$; кроме того, он вызывает вращение вокруг диаметра GL, сопряженного с плоскостью GXX' в центральном эллипсоиде центра тяжести G. Обозначим через p расстояние GH между центром тяжести и прямой XX'. Момент G пары, возникающей в результате переноса удара в точку G, равен Pp, поэтому скорость вращения вокруг оси GL задается по формуле

$$\omega = Ppl\delta,$$

где l обозначает длину полудиаметра GL центрального эллипсоида, вокруг которого осуществляется вращение, а δ — расстояние GK от центра до плоскости, касающейся конца этого диаметра. Впрочем, мы можем разложить это вращение на две составляющие: на ω', направленную вдоль GK и равную $\omega \times \frac{\delta}{l}$ или $Pp\delta^2$, и ω'', лежащую в плоскости XX', причем значение этой составляющей искать не обязательно.

В итоге скорость произвольной точки, лежащей на прямой XX', например, основания H перпендикуляра, опущенного из центра G, раскладывается на три компоненты: 1) скорость поступательного движения, проекция которой на прямую XX', ориентированную по направлению удара, равна $\frac{P}{M}$; 2) скорость, возникающую из-за вращения ω'; она направлена вдоль прямой XX' и принимает значение $\omega' p$ или $Pp^2\delta^2$; 3) скорость, возникающую из-за вращения ω''; она нормальна к XX', так что ее проекция равна нулю. Итак, мы видим, что проекция скорости, возникающей в точке H, на направление удара, проекция, которая принимает одно и то же значение в произвольной точке прямой XX', равна

$$P\left(\frac{1}{M} + p^2\delta^2\right).$$

Поэтому в данном случае параметр прямой XX' принимает очень простое значение

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + p^2\delta^2. \qquad (16a)$$

Параметр, который в общем случае меньше массы, будет равен ей, когда прямая проходит через центр тяжести.

2) Если у тела есть неподвижная точка, то рассуждения не изменяются, только не надо учитывать скорость поступательного движения; получаем

$$\frac{1}{\mu} = p^2\delta^2, \qquad (16b)$$

где центр тяжести заменяется неподвижной точкой.

3) Наконец, пусть у тела есть неподвижная ось. Обозначим через XX' (рис. 2) линию действия удара, через θ — угол, который она составляет с осью $\alpha\alpha'$, а через d — кратчайшее расстояние от нее до этой оси. Пусть ω — это возникающая угловая скорость, а Mk^2 — момент инерции относительно оси $\alpha\alpha'$. Тогда

$$Mk^2\omega = Pd\sin\theta.$$

Скорость основания B кратчайшего отрезка будет равна $\dfrac{Pd^2\sin\theta}{Mk^2}$, а ее проекция на прямую XX' —

$$\frac{Pd^2\sin^2\theta}{Mk^2}.$$

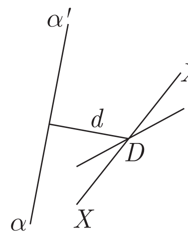

Рис. 2

В итоге получаем

$$\frac{1}{\mu} = \frac{d^2\sin^2\theta}{Mk^2}. \tag{16c}$$

Мы ограничимся этими тремя главными случаями. В остальных случаях нам достаточно будет знать, что параметр μ строго больше нуля.

3. О столкновении тел

Столкновение тел служило предметом многих исследований. Пуаассон во втором томе своей «Механики» («Mécanique») начинает с того, что рассматривает столкновение неупругих тел и получает полное решение задачи, добавляя к двенадцати уравнениям, вытекающим из теоремы о движении центра тяжести и теоремы моментов, еще одно, которое выражает тот факт, что в конце столкновения нормальные скорости в точке соприкосновения двух тел совпадают. Затем он переходит к случаю упругих тел, замечая, что на сей раз столкновение можно разделить на две части, отделенные друг от друга моментом наибольшего сжатия. На первом этапе все происходит точно так же, как если бы оба тела были лишены упругости. На втором этапе тела восстанавливают свою первоначальную форму, и Пуассон допускает, что возникающий при этом ударный импульс равен ударному импульсу в первой части столкновения.

Нетрудно показать, что к концу столкновения полная живая сила восстанавливает свое значение, и это дает нам возможность проверять гипотезу Пуассона.

В «Кратком курсе лекций» 1838 года («Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées») Навье замечает, что если не принимать в расчет колебания молекул в обоих телах, вызванные столкновением, то полная живая сила должна восстановить то же самое значение. Данное замечание позволило ему получить полный ударный импульс, возникающий при соприкосновении тел, следовательно, дать полное решение задачи.

В 1874 году г-н Резаль использует эту идею Навье в одной важной статье, опубликованной в *Comptes Rendus* (t. LXXVIII).

Все эти разные решения — аналитические; они основаны на рассмотрении тринадцати уравнений первой степени, что не позволяет заметить очень простой геометрический смысл результатов. В 1874 году я задался целью найти чисто геометрическое решение этой задачи, и сейчас я расскажу о полученных мной результатах.

Пусть $(M), (M')$ — два твердых тела, которые сталкиваются в точке A. Эффект столкновения можно представить с помощью двух ударов, одинаковых по величине и противоположных по знаку, направленных вдоль нормали к поверхности соприкосновения в точке A: один из них, $\int N dt$, приложен к телу (M), второй, равный $-\int N dt$, к телу (M'). Пусть η_0, η — это компоненты начальной и конечной скоростей той точки тела (M), которая оказалась в точке A, взятые по направлению нормали в этой точке, а η'_0, η' — аналогичные величины для тела (M').

Если мы применим теорему 6 сначала к телу (M), а затем — к телу (M'), то получим

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_M (mv^2 - mv_0^2) = (\eta + \eta_0) \int N dt, \\ &\sum_{M'} (mv^2 - mv_0^2) = -(\eta' + \eta_0') \int N dt, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

где $\sum_M, \sum_{M'}$ обозначают живые силы тел $(M), (M')$ соответственно. Следует отметить, что данные уравнения, заведомо справедливые для свободных тел, остаются в силе, когда у тел есть неподвижные точки или на них наложены какие-то другие связи, так как мы уже видели, что удары связи не приводят к появлению новых членов в правой части общих уравнений (14) и (15), а формулы (17) — это не более чем частный случай уравнения (14)[3].

Складывая оба вышеуказанных уравнения, мы найдем выражение для полной вариации живой силы

$$\sum mv^2 - \sum mv_0^2 = (\eta - \eta' + \eta_0 - \eta_0') \int N dt, \tag{18}$$

что позволит нам получить полное решение задачи.

Сначала предположим, что тела абсолютно упругие, то есть потеря живой силы должна быть равна нулю; это означает, что выполняется равенство

$$\eta - \eta' = -(\eta_0 - \eta_0'). \tag{19}$$

Таким образом, в случае абсолютно упругих тел эффект столкновения состоит в том, что *меняется знак нормальной составляющей относительной скорости обеих точек столкновения, причем величина этой составляющей остается прежней.* К такому очень простому результату приводит нас наша теория.

Установив это, разделим столкновение на два этапа, поставив условие, что интегралы $\int N dt$, соответствующие двум этапам, совпадают. По нашему предположению, удары, действующие на твердые тела в течение обоих этапов разделенного таким способом столкновения, совпадают по величине и действуют вдоль одной и той же прямой. Тогда из известных правил, описывающих действие ударных сил, следует, что скорости, приобретенные точками какого-нибудь из твердых тел на этих двух этапах столкновения, совпадают по величине и по направлению. Данное замечание позволяет нам определить нормальные компоненты скоростей тех точек обоих тел, которые оказались в точке A, в конце первого этапа столкновения. Действительно, если u — это нормальная компонента скорости точки столкновения тела (M), то должно выполняться соотношение

$$\eta_0 - u = u - \eta,$$

а это уравнение означает, что нормальная компонента скорости изменяется на одну и ту же величину в течение каждого из двух этапов столкновения. Отсюда

$$u = \frac{\eta + \eta_0}{2}.$$

[3] *Прим. ред.* — Данное утверждение Дарбу — гипотеза, не имеющая физического смысла. С формальной точки зрения, приложение к твердому телу внешнего ударного импульса можно рассматривать как процесс, не связанный с деформацией тела. Это означает, что ударная сила не столь велика, чтобы вызвать деформации тела как в точках ее приложения, так и в тех точках, где на тело наложены связи. Напротив, при столкновении двух тел ударные реакции как раз вызваны деформациями тел вблизи точки контакта. Одновременно возникают реакции связей, которые имеют тот же порядок, что и контактные напряжения. Они неизбежно приведут к деформациям связей и дополнительным потерям энергии (см. Иванов А. П. К задаче о стесненном ударе // ПММ, 1997, т. 61, вып. 3, с. 355–358).

Если обозначить через u' аналогичную величину для тела (M'), то точно так же получаем

$$u' = \frac{\eta' + \eta'_0}{2}.$$

С учетом уравнения (19) находим

$$u = u'.$$

Итак, в момент, когда интеграл $\int N dt$ достигает половины своего окончательного значения, нормальные скорости обеих точек столкновения совпадают. Если в этот момент времени столкновение прекращается, мы попадаем в случай *неупругих тел.* Таким образом, *если в случае абсолютно упругих тел разделить столкновение на два этапа, выбрав момент времени, когда нормальные скорости обеих точек столкновения совпадут, то ударные импульсы, соответствующие этим двум этапам столкновения, будут равны.* Иначе говоря, ударный импульс в случае абсолютно упругих тел в два раза больше того, который возникает в случае неупругих тел. Именно это и допускалось в теории Пуассона.

В случае неупругих тел можно сразу же использовать теорему 7; поскольку после столкновения нормальные скорости точек соприкосновения обоих тел равны, оба удара, оцениваемые в соответствии с этой теоремой, выполняют одинаковую по величине и противоположную по знаку работу. В результате мы видим, что в данном случае потеря живой силы равна живой силе, соответствующей потерянным скоростям. Это хорошо известная теорема Карно; впрочем, единственное ее преимущество состоит в том, что она демонстрирует потерю живой силы, не позволяя измерить величину этой потери.

Чтобы провести более полное исследование столкновения тел, охватывающее все случаи, найдем формулы, связывающие скорости η, η' в произвольный момент столкновения, с ударом, действующим в тот же момент времени, а затем, выдвигая частные гипотезы, будем находить все возможные случаи.

Обозначим через μ, μ' параметры нормали в точке столкновения относительно тел $(M), (M')$ соответственно. Ударный импульс $\int N dt$, приложенный к телу (M), придает точке столкновения нормальную скорость

$$\eta = \eta_0 + \frac{1}{\mu} \int N dt, \tag{20}$$

которая складывается из начальной скорости η_0 и той скорости, которую приобрело бы под действием удара тело, находившееся в состоянии покоя. Точно так же ударный импульс $-\int N dt$, приложенный к телу (M'), придает точке столкновения этого тела нормальную скорость

$$\eta' = \eta'_0 - \frac{1}{\mu'} \int N dt. \tag{21}$$

Записанные выше уравнения приводят нас к соотношениям

$$\mu\eta + \mu'\eta' = \mu\eta_0 + \mu'\eta'_0, \tag{22}$$

$$\eta - \eta' = \eta_0 - \eta'_0 + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right) \int N dt.$$

Введем относительные скорости

$$W = \eta - \eta', \quad W_0 = \eta_0 - \eta'_0.$$

Предыдущее уравнение примет вид

$$W - W_0 = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right) \int N dt. \tag{23}$$

Подставляя это значение $\int N dt$ в формулу (18), мы получим

$$\sum mv^2 - \sum mv_0^2 = \frac{W^2 - W_0^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}. \tag{24}$$

Что касается вариации живой силы для каждого из тел, то она будет записываться по формулам (17), которые примут вид

$$\sum_M m(v^2 - v_0^2) = (\eta + \eta_0) \frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}},$$

$$\sum_{M'} m(v^2 - v_0^2) = -(\eta' + \eta'_0) \frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Данные формулы ничем не отличаются от тех, которые описывают столкновение двух сфер с массами μ, μ'. Поэтому не имеет смысла подробно их обсуждать. Полагая $W = 0$, мы получим столкновение неупругих тел, а столкновение упругих тел возникает при $W = -W_0$.

Пора сказать несколько слов о широко известной гипотезе Ньютона относительно не абсолютно упругих тел. Ньютон считал, что для этих тел столкновение заканчивается в тот момент времени, когда

$$W = -eW_0,$$

где e — положительное дробное число, зависящее от природы обоих тел. Мы видим, что в рамках этой гипотезы предельными будут случаи столкновения неупругих тел ($e = 0$) и столкновения абсолютно упругих тел ($e = 1$). Нетрудно найти, чему равна потеря живой силы. Обращаясь к формуле (24), находим для нее следующее выражение:

$$(1 - e^2) \frac{W^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Таким образом, мы можем охарактеризовать гипотезу Ньютона, сказав, что *она дает нам потерю живой силы, равную определенной, всегда одной и той же доле, задаваемой числом* $(1 - e^2)$, *от потери живой силы, возникающей при столкновении неупругих тел.*

4. О столкновении с учетом трения

До сих пор мы пренебрегаем трением, возникающем при соприкосновении тел. Как показывают эксперименты генерала Морена, в этом случае трение, судя по всему, подчиняется обычным законам. Во всяком случае, в теории механизмов исследовались только простые задачи, для которых нетрудно понять априори, что относительная скорость точки соприкосновения двух тел обладает тангенциальной составляющей, направление которой не изменяется в течение всего времени столкновения. Поэтому наряду с нормальными ударами, приложенными к обоим телам, мы должны ввести удары тангенциальные, равные общему значению нормальных ударов, умноженному на коэффициент трения; их направление не изменяется в течение столкновения и совпадает с направлением тангенциальной составляющей относительной скорости в точке соприкосновения. Я буду использовать работу Пуассона «О трении вращающихся тел» («Sur le frottement des corps qui tournent») из *Bulletin de Férussac* (t. VI, p. 163) и исследования Кориолиса, посвященные столкновению сфер, из его «Математической теории явлений биллиардной игры» («Théorie mathématique des du jeu de billard»).

Если обратиться к изучению задачи в ее общем виде, то она становится намного сложнее. Как известно, если трение отсутствует, относительная скорость в точке соприкосновения за короткое время столкновения последовательно переходит от одного значения к другому, совершенно иному по величине и по направлению; то же самое происходит при наличии трения, так что если мы хотим строго учитывать действие этой силы, то мы должны в каждый новый момент столкновения придавать трению новое направление, противоположное относительной скорости в данный момент времени. Кроме того, направление относительной скорости зависит от трения, действовавшего в предыдущие моменты столкновения, так что нетрудно предугадать, что закон, описывающий это явление, будет выражаться с помощью дифференциального уравнения, интегрирование которого и составит наиболее трудную часть решения задачи; заметим также, что если бы мы захотели пренебречь изменением относительной тангенциальной скорости в точке соприкосновения и считали бы, что направление трения остается постоянным, то мы допустили бы ошибки того же порядка, что и эффекты, которые мы собираемся рассчитать.

Г-н Филлипс в своей замечательной работе, опубликованной в *Journal de Liouville* (Sér. 1, t. XIV, p. 312), впервые рассмотрел вопрос с этой точки зрения и проинтегрировал дифференциальное уравнение, возникающее в данной теории. Позднее, в моей статье, опубликованной в *Comptes Rendus* (t. LXXVIII, p. 1645), я получил те же результаты другим способом, в некотором отношении более простым. Когда, желая полностью изучить теорию столкновений, я рассмотрел этот вопрос еще раз, мне стало понятно, что даже если упомянутые выше исследования позволяют преодолеть основную трудность данной задачи, они все-таки не дают полного ее решения, потому что в них не учтен такой важный момент, как возможность обращения в нуль тангенциальной относительной скорости во время столкновения. Мы вернулись к изучению данного вопроса в *Bulletin des Sciences Mathématiques*, уделив внимание тем обстоятельствам, которые не были рассмотрены в прежних работах.

Возьмем за ось z общую нормаль к двум телам в точке соприкосновения и будем считать положительным направление к телу (M). Оси x и y лежат в плоскости соприкосновения. Обозначим через η нормальную компоненту относительной скорости точки столкновения тела (M) по отношению к точке столкновения тела (M'), а через v — ее тангенциальную компоненту. Если скорость v образует с осью x угол φ, то три компоненты относительной скорости, соответствующие осям O_x, O_y, O_z, равны

$$v\cos\varphi, \quad v\sin\varphi, \quad \eta.$$

Обозначим через N нормальную силу, действующую на тело (M) в момент времени t. Компоненты силы трения, соответствующие осям O_x, O_y, равны

$$-fN\cos\varphi, \quad -fN\sin\varphi,$$

где f обозначает коэффициент трения. Тогда три компоненты ударного импульса, полученного телом (M) с момента начала столкновения, имеют вид

$$-f\int_0^t N\cos\varphi dt,\quad -f\int_0^t N\sin\varphi dt,\quad \int_0^t N dt,$$

а тело (M') за то же самое время получило такие же по величине и противоположные по знаку удары. Установив все это, видим, что по законам, описывающим действие ударной силы, компоненты относительной скорости наших тел линейно зависят от данных ударов, и мы получаем

$$\begin{cases} v\cos\varphi = v_0\cos\varphi_0 - af\displaystyle\int_0^t N\cos\varphi dt - bf\int_0^t N\sin\varphi dt + c\int N dt,\\ v\sin\varphi = v_0\sin\varphi_0 - a'f\displaystyle\int_0^t N\cos\varphi dt - b'f\int_0^t N\sin\varphi dt + c'\int N dt,\\ \eta = \eta_0 - a''f\displaystyle\int_0^t N\cos\varphi dt - b''f\int_0^t N\sin\varphi dt + c''\int N dt,\end{cases} \tag{25}$$

где v_0, φ_0, η_0 обозначают начальные значения величин v, φ, η. Что касается $a, b, c, \ldots$, то это константы; их нетрудно определить, они зависят от формы и относительного положения двух тел: a, a', a'' — это компоненты относительной скорости, которую приобрели бы точки соприкосновения под действием двух единичных ударов, направленных вдоль оси x, причем один из ударов должен быть приложен к телу (M), а другой — к телу (M'), первый действует в положительном направлении оси x, второй — в противоположную сторону. Величины b, b', b'', c, c', c'' определяются аналогично для ударов, направленных вдоль осей O_y и O_z. Таким образом, эти девять констант, которые в случае свободных тел зависят от двадцати параметров, у нас не связаны никаким соотношением. Правда, в записанных выше уравнениях никоим образом не предполагалось, что тела свободны; эти уравнения выполняются абсолютно, какова бы ни была природа связей. Однако при обсуждении задачи мы сможем предполагать, что они произвольны; нам будет достаточно показать, что они во всех случаях удовлетворяют некоторым неравенствам, очень важным для наших рассуждений. Покажем прежде всего, что это за неравенства.

Если тела $(M), (M')$ находятся в состоянии покоя, и в одной из их точек соприкосновения мы прикладываем к ним ударные импульсы $P, -P$ соответственно, равные по величине и противоположные по знаку, то нетрудно показать, что проекция относительной скорости, которую приобретет точка соприкосновения тела (M) по отношению к точке соприкосновения тела (M'), на вектор P, приложенный к телу (M), всегда будет больше нуля. Действительно, мы знаем, что удар P сообщает своей точке приложения скорость, проекция которой на вектор P равна $\dfrac{P}{\mu}$, где μ — параметр линии действия относительно тела (M). Точно так же удар $-P$ сообщает своей точке приложения, принадлежащей телу (M'), скорость, проекция которой на вектор $-P$ будет равна $+\dfrac{P}{\mu'}$, где μ' — параметр линии действия относительно тела (M'); следовательно, проекция этой скорости на вектор P будет равна $\dfrac{-P}{\mu}$. Проекция относительной скорости на вектор P, равная разности проекций двух абсолютных скоростей, имеет вид

$$P\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right),$$

то есть она всегда больше нуля.

Теперь вернемся к телам $(M), (M')$, по предположению находящимся в состоянии покоя, и сначала приложим к телу (M) произвольный удар с компонентами X, Y, Z, а к телу (M') — удар, равный по величине и противоположный по знаку. Относительная скорость, возникающая из-за действия этих двух ударов, задается по формулам

$$\begin{aligned} v_x &= a + bY + cZ, \\ v_y &= a' + b'Y + c'Z, \\ v_z &= a'' + b''Y + c''Z, \end{aligned}$$

и это всегда будет скорость точки тела (M) относительно точки тела (M'). Поскольку проекция этой скорости на направление ударной силы, приложенной к телу (M), должна быть больше нуля, справедливо неравенство

$$Xv_x + Yv_y + Zv_z > 0,$$

а следовательно,

$$aX^2 + b'Y^2 + c''Z^2 + (c' + b'')YZ + (c + a'')XZ + (b + a')XY > 0.$$

Итак, константы a, b', c'' должны удовлетворять всем неравенствам, выражающим тот факт, что вышеуказанная сумма больше нуля, каковы бы ни были X, Y, Z. Например, получаем

$$\begin{cases} a > 0, \quad b' > 0, \quad c'' > 0, \\ \qquad (b + a')^2 - 4ab' < 0. \end{cases} \tag{26}$$

В дальнейшем мы воспользуемся этими неравенствами.

Сделав предварительные замечания, вернемся к уравнениям (25) и продифференцируем их. Полагая

$$\begin{aligned} A &= c - af\cos\varphi - bf\sin\varphi, \\ A' &= c' - a'f\cos\varphi - b'f\sin\varphi, \\ A'' &= c'' - a''f\cos\varphi - b''f\sin\varphi, \end{aligned}$$

можно записать

$$\begin{cases} \cos\varphi dv - v\sin\varphi d\varphi = ANdt, \\ \sin\varphi dv + v\cos\varphi d\varphi = A'Ndt, \end{cases} \tag{27}$$

что дает нам

$$\frac{dv}{v} = \frac{A'\sin\varphi + A\cos\varphi}{A'\cos\varphi - A\sin\varphi}d\varphi,$$

$$Ndt = \frac{vd\varphi}{A'\cos\varphi - A\sin\varphi}.$$

Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} H &= A'\sin\varphi + A\cos\varphi, \\ \Delta &= A'\cos\varphi - A\sin\varphi. \end{aligned}$$

Тогда мы получим

$$v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{H}{\Delta} d\varphi}, \tag{28}$$

и, зная v, выводим выражение для Ndt:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t Ndt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{vd\varphi}{\Delta}, & \displaystyle v\cos\varphi = v_0\cos\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{Avd\varphi}{\Delta}, \\ \displaystyle\int_0^t N\cos\varphi dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\cos\varphi d\varphi}{\Delta}, & \displaystyle v\sin\varphi = v_0\sin\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'vd\varphi}{\Delta}, \\ \displaystyle\int_0^t N\sin\varphi dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\sin\varphi d\varphi}{\Delta}, & \displaystyle \eta = \eta_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A''vd\varphi}{\Delta}. \end{cases} \tag{29}$$

Эти квадратуры дают нам полное решение задачи; они позволяют найти различные характеристики столкновения при условии, что скорость v не обращается в нуль; в последнем случае мы уже не смогли бы определить направление трения.

Вышеуказанным формулам можно дать геометрическую интерпретацию. Построим на касательной плоскости вспомогательную кривую — геометрическое место точек, координаты которых в момент времени t равны

$$x = f\int_0^t N\cos\varphi dt, \quad y = f\int_0^t N\sin\varphi dt.$$

Мы видим, что радиус-вектор данной кривой по величине и по направлению соответствует тангенциальной составляющей удара. Значение дуги кривой, если отсчитывать его от начала координат, равно

$$s = f\int_0^t Ndt,$$

следовательно, оно совпадает с нормальной составляющей удара, умноженной на коэффициент трения. Кроме того, дифференцируя формулы, задающие x и y, находим

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\varphi.$$

Таким образом, касательная к этой вспомогательной кривой направлена так же, как и тангенциальная относительная скорость в момент времени t. В результате мы можем сформулировать следующее предложение:

Существует кривая, расположенная в плоскости соприкосновения, проходящая через точку соприкосновения и задающая закон, по которому происходит столкновение. Ее радиус-вектор соответствует тангенциальной составляющей ударного импульса, возникающей благодаря силам трения; касательная к ней задает направление относительной скорости, а ее дуга, отсчитываемая от начала координат, равна произведению коэффициента трения на нормальную составляющую ударного импульса, полученную каждым из тел за время, прошедшее с начала столкновения.

Из формулы (25) следует, что данная кривая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0\sin\varphi_0 - a'x - b'y + c's}{v_0\cos\varphi_0 - ax - by + cs},$$

следовательно, можно считать, что проведенные нами рассуждения позволяют получить интеграл этого уравнения[4].

[4]Рассмотрим дифференциальное уравнение общего вида

$$\frac{f(y') + fF(y')Xdx}{\varphi(y') + f\Phi(y')Xdx} = \theta(y'), \tag{a}$$

Вернемся к формулам (29) и посмотрим, как можно определить конец столкновения. В случае неупругих тел трудностей не возникает: столкновение заканчивается, когда нормальная относительная скорость η становится равной нулю. Но трение может присутство-

---

где y' обозначает $\dfrac{dy}{dx}$, а X — функцию одной переменной x. Нетрудно понять, что уравнение, рассмотренное в тексте, представляет собой частный случай данного. Действительно, чтобы получить вышеупомянутое уравнение, достаточно взять

$$X = 1, \quad \theta(y') = y',$$
$$F(y') = -a' - b'y' + c'\sqrt{1 + y'^2}, \quad f(y') = v_0 \sin\varphi_0,$$
$$\Phi(y') = -a - by' + c\sqrt{1 + y'^2}, \quad \varphi(y') = v_0 \cos\varphi_0.$$

Покажем, что проинтегрировать уравнение (a) очень просто. Для этого положим

$$\varphi(y') + f\varphi(y')Xdx = \lambda$$

и, следовательно,

$$f(y') + fF(y')Xdx = \lambda\theta(y').$$

После дифференцирования получаем

$$\frac{d\varphi}{dy'}dy' + \Phi(y')Xdx = d\lambda,$$

$$\frac{df}{dy'}dy' + F(y')Xdx = \theta(y')d\lambda + \lambda\frac{d\theta}{dy'}dy'$$

и, исключая Xdx, находим

$$\frac{F(y')}{\Phi(y')} = \frac{\theta(y')\dfrac{d\lambda}{dy'} + \lambda\dfrac{d\theta}{dy'} - \dfrac{df}{dy'}}{\dfrac{d\lambda}{dy'} - \dfrac{d\varphi}{dy'}}.$$

Это линейное уравнение позволит нам выразить λ через y'. Затем мы определим x по формуле

$$Xdx = \left(\frac{d\lambda}{dy'} - \frac{d\varphi}{dy'}\right)dy',$$

в которой переменные разделены; наконец, y найдется из формулы

$$dy = y'dx.$$

Таким образом, интегрирование этого дифференциального уравнения сводится к последовательности квадратур.

Если в уравнении (a) заменить Xdx на $d\varphi(x, y)$, то, действуя аналогично, мы бы свели задачу к интегрированию уравнения

$$\varphi(x, y) = F(y').$$

Частными случаями уравнения (a) служат следующие уравнения:

$$\frac{ax + by + cs + F(y')}{a'x + b'y + c's + \Phi(y')} = \theta(y')$$

и

$$\frac{ax^2 + F(y') + c\int xdy}{a'x^2\Phi(y') + c'\int xdy} = \theta(y').$$

Последнее из них, соответствующее случаю $X = x$, эквивалентно достаточно общему соотношению между касательной и площадью сегмента искомой кривой.

вать и при столкновении упругих тел, например, двух шаров из неотполированной слоновой кости. В этом случае нам руководствоваться нечем, так что можно вернуться к старой гипотезе и предположить, что когда тела восстанавливают свою форму после сжатия, они получают нормальный удар, равный удару, возникшему в первой части столкновения. Тогда достаточно будет вычислить нормальный ударный импульс, соответствующий случаю столкновения неупругих тел, и продолжать столкновение до тех пор, пока нормальный ударный импульс не станет вдвое больше уже найденного. Для большей точности в дальнейшем мы всегда будем рассматривать случай столкновения неупругих тел.

В силу наших предположений о направлении оси Z ударный импульс $\int N dt$ всегда будет больше нуля, а начальное значение η_0 скорости η — отрицательно. Поэтому первая из формул (29) показывает нам, что угол φ должен изменяться, начиная со значения φ_0, так, чтобы отношение $\dfrac{d\varphi}{\Delta}$ было положительным. Таким образом, мы знаем, в какую сторону изменяется угол φ. Обозначим через α первый корень уравнения

$$\Delta = 0,$$

которого достигает угол φ, изменяясь в указанном направлении, и выясним, закончится ли столкновение до того, как φ достигнет значения α. Уравнение, задающее конец столкновения, имеет вид

$$\eta = 0 = \eta_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'' v d\varphi}{\Delta}. \tag{30}$$

Если у этого уравнения есть корень, лежащий между нулем и α, то сложностей не возникает; формулы (25), (29) будут применимы вплоть до конца столкновения, и с их помощью мы найдем тангенциальные и нормальные ударные импульсы, а значит, и конечную скорость обоих тел. Я утверждаю, что этот случай имеет место каждый раз, когда при $\varphi = \alpha$ величина, которую мы обозначим через H, больше нуля.

Действительно, мы видели, что выражение

$$X(aX + bY + cZ) + Y(a'X + b'Y + c'Z) + Z(a''X + b''Y + c''Z)$$

всегда больше нуля, каковы бы ни были величины X, Y, Z. Пусть

$$X = -f\cos\varphi, \quad Y = -f\sin\varphi, \quad Z = 1;$$

тогда, сохраняя прежние обозначения, получаем

$$A'' - f(A'\cos\varphi + A''\sin\varphi) > 0,$$

что с учетом формул (25) равносильно неравенству

$$d\eta - f dv > 0,$$

и, следовательно,

$$\eta - \eta_0 - f(v - v_0) > 0. \tag{31}$$

Однако когда угол φ приближается к корню α, отношение $\dfrac{d\varphi}{\Delta}$ стремится к $+\infty$, так как мы видели, что знак $d\varphi$ всегда совпадает со знаком Δ. Поэтому если в окрестности значения α угла φ функция H больше нуля, то интеграл $\int \dfrac{H d\varphi}{\Delta}$ принимает бесконечно большие положительные значения, и то же самое можно сказать о скорости v, которая равна

$$v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{H d\varphi}{\Delta}}. \tag{32}$$

Таким образом, если бы угол φ изменялся от нуля до α, то скорость v, а значит, и разность $v - v_0$ стала бы бесконечно возрастать, и в силу неравенства (31) то же самое было бы верно для η. Иначе говоря, еще до того как угол φ достигнет значения α, скорость η получит сколь угодно большое положительно приращение, и, поскольку ее начальное значение было меньше нуля, она пройдет через нуль или через любое другое положительное значение, соответствующее концу столкновения.

Наоборот, если при $\varphi = \alpha$ у нас $H < 0$, то, конечно, может оказаться так, что существует еще одно значение φ, лежащее между φ_0 и α, при котором η обращается в нуль, но вполне возможно, что угол φ достигнет значения α, а скорость η в нуль не обратится. Действительно, в этом случае *v станет равно нулю при $\varphi = \alpha$* и интеграл

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A'' v d\varphi}{\Delta},$$

который при φ, стремящемся к α, сходится к конечному значению, достигает максимума по абсолютной величине. Например, если η_0 превосходит этот максимум, у уравнения (30) не будет корней на отрезке от φ_0 до α.

Это и есть случай, настолько же общий, как и рассмотренный выше, хотя раньше им пренебрегали; случай, когда тангенциальная относительная скорость обращается в нуль до конца столкновения. Рассмотрим его более подробно.

Прежде всего, изучавшиеся ранее аналогичные вопросы (качение сфер, цилиндров) позволяют нам понять, что может возникнуть движение двух совершенно разных типов.

При движении первого типа тангенциальная относительная скорость так и будет равна нулю, и тогда сила трения должна будет удовлетворять только одному условию: она не превосходит нормальной силы, умноженной на коэффициент трения; иначе говоря, сила, приложенная к одному из тел, должна будет составлять с их общей нормалью угол, который меньше, чем угол трения. Именно таким законам подчиняется трение, когда при соприкосновении возникает *относительный покой*.

При движении второго типа тангенциальная относительная скорость будет принимать конечные значения, и нам останется выяснить, какое движение может возникать при таких условиях.

Сначала рассмотрим первый случай. Пусть N обозначает нормальную составляющую в произвольный момент времени, θ, θ_1 — ее тангенциальные составляющие. Поскольку тангенциальная скорость v все время должна быть равна нулю, необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$a\theta + b\theta_1 + cN = 0,$$
$$a'\theta + b'\theta_1 + c'N = 0,$$

что дает нам

$$\theta = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} N, \quad \theta_1 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} N.$$

Выразим тот факт, что тангенциальная составляющая меньше, чем fN; получаем неравенство

$$f^2 N^2 - \theta^2 - \theta_1^2 > 0,$$

следовательно, полагая

$$K = f^2(ab' - ba)^2 - (ac' - ca')^2 - (bc' - cb')^2, \tag{33}$$

приходим к условию

$$K > 0.$$

Если это неравенство не выполняется, то вышеуказанное движение невозможно.

Теперь посмотрим, что происходит в случае, когда предполагается, что относительная тангенциальная скорость, приняв нулевое значение, вновь становится конечной. Тогда из дифференциального уравнения

$$(A' \cos\varphi - A \sin\varphi)dv = v(A' \sin\varphi + A\cos\varphi)d\varphi$$

понятно, что единственное возможное решение имеет вид

$$A' \cos\varphi - A\sin\varphi = 0, \quad d\varphi = 0.$$

Таким образом, возникает движение, при котором направление и знак относительной скорости остаются постоянными, и угол φ может быть равен только одному из корней записанного выше уравнения.

Но у этого уравнения есть четыре корня, причем все они могут быть действительными. Иначе говоря, нам необходимо будет рассмотреть до пяти различных движений, которые могут здесь возникнуть: четыре из них соответствуют этим различным корням, а в пятом случае тангенциальная скорость остается нулевой.

Если бы два таких движения были возможны одновременно, то мы столкнулись бы с очень интересным явлением, однако ни один из известных нам изученных примеров не позволяет предвидеть что-либо подобное. Действительно, рассмотрев эту ситуацию подробнее, мы покажем, что в ней нет неопределенности и нам не придется выбирать между двумя или большим числом одинаково возможных движений.

Сначала сделаем несколько предварительных замечаний.

1) Как мы уже видели, в случае, когда тангенциальная скорость вновь принимает конечное значение, выполняется условие $\varphi = \mathrm{const}$, и из формул (27) без труда получаем

$$dv = HNdt, \quad v = H\int Ndt.$$

Но v и $\int Ndt$ больше нуля, поэтому функция H тоже должна быть положительной. Таким образом, для осуществимости движения, соответствующего корню α уравнения $\Delta = 0$ необходимо, чтобы при этом значении α величина H была больше нуля. Отсюда следует, что если при некотором значении α угла φ тангенциальная скорость обращается в нуль, причем данное значение α служит корнем функции Δ, при котором H меньше нуля, то при φ, равном α, скорость не может принимать конечного значения.

2) Поскольку для нас очень важно, какой знак имеет H при каждом корне функции Δ, постараемся найти этот знак. Для этого заметим, что в нашей задаче выполняется фундаментальное тождество

$$H + \Delta' = -af\sin^2\varphi - b'f\cos^2\varphi + (b + a')f\sin\varphi\cos\varphi,$$

где Δ' обозначает производную функции Δ по φ.

В силу неравенств (26) правая часть всегда меньше нуля. Поэтому H *принимает отрицательные значения при каждом корне функции* Δ*, при котором производная* Δ' *больше или равна нулю.* Это предложение делает возможными наши дальнейшие рассуждения.

3) Составим уравнение, которое дает нам четыре значения функции H; получаем

$$\Delta = A'\cos\varphi - A\sin\varphi = 0, \quad A'\sin\varphi + A\cos\varphi = H,$$

следовательно,

$$H = \frac{A}{\cos\varphi} = \frac{A'}{\sin\varphi},$$

или, более подробно,

$$\begin{gathered} c - (af + H)\cos\varphi - bf\sin\varphi = 0, \\ c' - a'f\cos\varphi - (b'f + H)\sin\varphi = 0. \end{gathered}$$

Отсюда, исключая φ, находим

$$\begin{aligned} \left(ca' - ac' - c'\frac{H}{f}\right)^2 + \left(cb' - bc' + \frac{cH}{f}\right)^2 &= \\ &= \left[(ab' - ba') + \frac{H}{f}(a + b') + \frac{H^2}{f^2}\right] f^2. \end{aligned}$$

В развернутой форме уравнение имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{H^4}{f^2} + 2(a + b')\frac{H^3}{f} + \\ &\quad + [f^2(a + b')^2 + 2f^2(ab' - ba') - c^2 - c'^2]\frac{H^2}{f^2} + \\ &\quad + 2[(a + b')(ab' - ba')f^2 - c(cb' - bc') + c'(ca' - ac')]\frac{H}{f} + \\ &\quad + f^2(ab' - ba')^2 - (ca' - ac')^2 - (cb' - bc')^2 = 0. \end{aligned} \right. \tag{34}$$

Последнее слагаемое этого уравнения совпадает с величиной, которую мы обозначили через K.

Сделав эти замечания, перейдем к обсуждению нашей задачи.

1) Сначала предположим, что уравнение $\Delta = 0$ не имеет действительных корней. Тогда функция H принимает четыре мнимых значения, а величина K больше нуля, так как это последнее слагаемое записанного выше уравнения, у которого четыре мнимых корня. Если в начале столкновения тангенциальная скорость равна нулю, то она так и останется нулевой, поскольку K положительно, а среди четырех других движений действительных нет. Наоборот, если она не была равна нулю, то она уже не будет обращаться в нуль, и формулы (29) остаются в силе до конца столкновения.

2) Если уравнение $\Delta = 0$ имеет два действительных корня, то при одном из них производная Δ' будет больше нуля, следовательно, соответствующее значение функции H будет меньше нуля. Если оба действительных значения функции H меньше нуля, то последнее слагаемое в уравнении (34), определяющем H, будет положительным, так что если скорость v в какой-то момент столкновения обращается в нуль, то она так и останется равной нулю. Наоборот, если только одно из значений H отрицательно, то и K будет отрицательно,

и если скорость v обращается в нуль до конца столкновения, то она не может оставаться нулевой; возникнет движение, при котором угол φ примет значение, равное тому из корней функции Δ, для которого $H > 0$.

3) Наконец, если уравнение $\Delta = 0$ имеет четыре действительных корня, то при двух из них производная Δ' будет больше нуля, следовательно, у нас будет *как минимум два корня, для которых* $H < 0$.

Если в этом случае $K < 0$, то количество отрицательных значений функции H нечетно, то есть равно трем. Таким образом, существуют три значения функции φ, при которых скорость v может обращаться в нуль.

Но K отрицательно, поэтому данная скорость не может оставаться нулевой, и скольжение возобновляется при значении угла ϕ, равном единственному корню функции Δ, для которого все коэффициенты многочлена (34) положительны.

Если же $K > 0$, то, как мы сейчас покажем, у уравнения (34) есть только перманетности, следовательно, четыре значения функции H меньше нуля. Чтобы упростить вычисления, мы допустим, что оси координат выбраны так, чтобы c' было равно нулю. Это означает, что плоскость XZ будет проходить по направлению относительной скорости, которая возникла бы в результате воздействия двух одинаковых по величине и противоположных ударных импульсов, направленных вдоль оси OZ.

В интересующем нас случае справедливо неравенство

$$f^2(ab' - ba')^2 - c^2(a'^2 + b'^2) > 0.$$

Вспомним, что выполняются также неравенства

$$(a' + b)^2 - 4ab' < 0, \quad a > 0, b' > 0,$$

которые дают нам

$$(a' - b)^2 < 4(ab' - ba'),$$

и, следовательно,

$$ab' - ba' > 0.$$

Обратившись к уравнению (34), сразу видим, что коэффициент при H^3 больше нуля. Остается показать, что то же самое верно для коэффициентов при H и H^2. Для этого воспользуемся неравенствами

$$f^2 > \frac{c^2(a'^2 + b'^2)}{(ab' - ba')^2},$$

$$a > \frac{(a' + b)^2}{4b'}.$$

Коэффициент при $2\dfrac{H}{f}$ имеет вид

$$L = (a + b')(ab' - ba')f^2 - c^2 b'.$$

Поскольку коэффициент, стоящий при f^2, больше нуля, заменим f^2 на его нижний предел. Получаем

$$\frac{L(ab' - ba')}{c^2} > (a + b')(a'^2 + b'^2) - b'(ab' - ba'),$$

или

$$\frac{L(ab' - ba')}{c^2} > aa'^2 + b'(a'^2 + b'^2) + bb'a'.$$

Теперь заменим a на его нижний предел; это даст нам

$$\frac{4b'L(ab'-ba')}{c^2} > (a'^2 + ba' + 2b'^2)^2,$$

откуда видно, что L больше нуля.

Перейдем к коэффициенту при $\frac{H^2}{f^2}$. Обозначая через L_1

$$L_1 = f^2[(a+b')^2 + 2(ab'-ba')] - c^2$$

и заменяя f^2 на его нижний предел, получаем

$$\frac{L_1(ab'-ba')^2}{c^2} > (aa'+bb')^2 + \\ + 4ab'(a'^2+b'^2) + (a'^2+b'^2)(b'^2 - b^2 - 2ba').$$

Заменяя во втором слагаемом a на его нижний предел, находим

$$\frac{L_1(ab'-ba')^2}{c^2} > (aa'+bb')^2 + (a'^2+b'^2)^2,$$

так что L_1 тоже больше нуля.

Иначе говоря, каждый раз, когда уравнение $\Delta = 0$ имеет четыре действительных корня, а K больше нуля, четыре значения функции H будут отрицательны. Тогда существуют четыре значения угла φ, при которых скорость v может обращаться в нуль, но, обратившись в нуль, она так и останется нулевой до конца столкновения.

Подводя итог, можно сказать,что *в движении нет никакой неопределенности.*

В случае, когда скорость v остается равной нулю, уравнения (29) надо заменить на следующие:

$$\begin{cases} 0 = a\theta + b\theta_1 + cN, \\ 0 = a'\theta + b'\theta_1 + c'N, \\ \eta = \eta_0' a''\theta + b''\theta_1 + c''N, \end{cases} \tag{35}$$

которые остаются в силе до конца столкновения; здесь η_0' обозначает значение, которое примет скорость η в тот момент времени, когда скорость v станет равна нулю.

В завершение я укажу один достаточно простой пример, позволяющий представить себе большую часть обсуждавшихся здесь случаев. Это — косой удар твердого тела вращения о неподвижную плоскость.

Комментарий научного редактора

Дарбу Жан Гастон (13.8.1842–23.2.1917) — известный французский математик. Член Парижской академии наук (1884 г.), ее секретарь (с 1900 г.). Родился в Ниме. Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1864 г.). Профессор математики в Коллеж де Франс, с 1873 г. — в Сорбонне. Многочисленные исследования Дарбу касаются почти всех отраслей физико-математических знаний, но основные труды посвящены дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям. В дифференциальной геометрии Дарбу получил много важных результатов, относящихся к теории поверхностей и теории криволинейных координат (в частности, ввел тетрациклические и пентасферические координаты). Систематическое изложение полученных результатов Дарбу дал в многотомных «Лекциях по общей теории поверхностей» (1887–1896 гг.) и в «Лекциях об ортогональных системах и криволинейных координатах» (1898 г.). В этих трудах, кроме собственных результатов, он изложил и результаты исследований по дифференциальной геометрии кривых и поверхностей за 100 лет. Геометрические исследования привели Дарбу к рассмотрению различных вопросов интегрирования дифференциальных уравнений.

В частности, он обобщил каскадный метод П. Лапласа, распространил его на все уравнения с частными производными 2-го порядка, а также уточнил метод Монжа–Дарбу для нелинейных уравнений (уравнение Дарбу). В теории обыкновенных дифференциальных уравнений изучил уравнения 1-го порядка, уравнения, интегрируемые с помощью найденных в достаточном количестве частных решений, и уравнения, интегрируемые алгебраически. В теории определенных интегралов имя Дарбу носят верхний и нижний интегралы, верхняя и нижняя суммы. Важные результаты Дарбу получил в теории аналитических функций; занимался разложением функций по шаровым функциям и по ортогональным функциям, в частности по полиномам Якоби, написал работы о решении уравнений четвертой степени, по алгебре, теории квадратичных форм. Плодотворно занимался различными вопросами кинематики, равновесия, малых колебаний систем точек. Именем Дарбу названы: вектор, тензор, линии, поверхность, пучок, квадрика, трехгранник.

Публикуемая работа посвящена исследованию импульсивного движения твердых тел. В первом разделе автор вводит понятие ударной силы и обобщает теорему об изменении количества движения и теорему об изменении кинетического момента твердого тела на случай ударных сил. Второй раздел посвящен доказательству теоремы об изменении кинетической энергии (живой силы) механической системы под действием импульсивных сил (заданных ударов). Следует заметить, что Дарбу не ссылается на «Натурфилософию» Томсона и Тета, опубликованную 1860 г., где приведено общее уравнение динамики импульсивного движения, а также выведена формула для изменения кинетической энергии тела под действием заданного удара. Впоследствии Раус упоминает этот результат со ссылкой на Томсона и Тета [Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: Т. 1. М.: Наука, 1983 (§ 346)]; по-видимому, этот факт был незнаком Дарбу. В третьей части рассматривается соударение твердых тел с гладкими поверхностями и проводится расчет потери кинетической энергии в зависимости от величины ньютоновского коэффициента восстановления относительной скорости.

В четвертой части проведено исследование неупругого удара твердых тел с трением. Именно эти результаты являются в работе центральными. Дарбу получил дифференциальное уравнение, описывающее изменение относительной скорости как функции нормальной составляющей ударного импульса. Он также исследовал случай, когда скольжение в процессе удара останавливается, и получил условия, при которых оно далее не возобновляется, а также показал, что в случае возобновления скольжения его направление определено однозначно. Впоследствии результаты Дарбу были дополнены Майером [Mayer A. Über den Zusammenstoss zweier Körper unter Berücksichtigung der gleit Reibung, Berichts über Verhand. sächsisch. Geselsch., 1902, Bd. 54], а в работе Болотова [Болотов Е. А. Об ударе двух твердых тел при действии трения. Изв. Моск. Инж. училища, 1908, ч. 2, вып. 2, с. 43–55] проблема получила законченное и полное геометрическое решение. Вместе с тем данная статья Дарбу не приобрела известности на Западе, где приоритет отдается Келлеру [Keller J. B. Impact with friction. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1986, vol. 53, no. 1, pp. 1–4], который повторил вывод уравнения Дарбу более чем век спустя.

Заметим, что Дарбу ограничился случаем неупругого удара, окончание которого ассоциируется с равенством нулю нормальной составляющей относительной скорости. Позднее был рассмотрен более общий случай упругого удара, характеризующегося некоторым коэффициентом восстановления (см. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997). Показано, что различные определения коэффициента восстановления — ньютоновское, пуассоновское, энергетическое — приводят к разным результатам.

А. П. Иванов