

Комментарии к математической теории явлений бильярдной игры¹

А. Резаль

1. Общие сведения

1. Создателем данной теории следует считать Кориолиса, хотя еще до него Иоганн-Альберт Эйлер² нашел решение одной частной задачи, о которой мы расскажем позже.

Знаменитая работа Кориолиса, посвященная этой теме, вышла в свет в 1835 году, но сенсацией не стала (может быть, уже из-за своего названия: аналитики обычно не бывают игроками в бильярд, и наоборот). Однако в его работе немало новых взглядов, методов вычислений и специальных интегралов, которыми можно пользоваться во многих других случаях.

И если мы позволяем себе комментировать вышеупомянутую работу, то дело не только в том, что некоторые доказательства можно упростить. Важнее всего то, что мы иначе, чем Кориолис, оцениваем живую силу, которая теряется при столкновении двух не вполне упругих тел. Так, например, рассматривая эффект, возникающий в результате удара горизонтальным кием, Кориолис считает, что после удара полная живая сила представляет собой часть начальной живой силы кия, — часть, которую он находит экспериментально, не учитывая тем самым слагаемое, возникающее из-за тангенциального взаимодействия между кием и шаром.

То уравнение живых сил, которое выведем мы, приводит к намного более простым результатам; они оказываются даже проще, чем можно было предполагать.

2. *Основные принципы теории столкновения тел.* Когда два твердых тела, двигаясь по направлению друг к другу, встречаются, происходит так называемый *удар*, или *столкновение*. И хотя продолжительность столкновения очень мала и практически неощутима, оно все-таки делится на две очень разные части. В течение первой стадии тела сжимаются до тех пор, пока их деформация, а значит, и их нормальная реакция в месте соприкосновения не достигнут максимума. В течение второй стадии, которая наступает сразу после этого момента, тела постепенно восстанавливают форму, хотя она более или менее отличается от изначальной, и в конце концов стремятся отделиться друг от друга, поскольку упругая сила придает им большую или меньшую энергию.

¹Resal H. Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard, *J. Math. Pures Appl.* (3), 1883, t. IX, pp. 65–98. Научная редакция перевода и комментариев (с. 439) — А. П. Иванов.

²Старший сын (1734–1800) знаменитого геометра Леонарда Эйлера.

Во время удара молекулы тел могут совершать перемещения только того же порядка, что и длительность удара, следовательно, мы можем пренебречь этими перемещениями, не допустив ощутимой ошибки. Однако в конце соударения скорости тел могут как по величине, так и по направлению заметно отличаться от первоначальных; отсюда следует, что интенсивность молекулярных действий, возникающих в телах во время столкновения, более заметна по сравнению с интенсивностью сил, отвечающих за обычные непрерывные явления (например, силы тяжести). Таким образом, мы можем абстрагироваться от этих последних сил, пока длится удар.

В момент наибольшего сжатия нормальные компоненты скоростей молекул, находящихся на участке соприкосновения двух тел, совпадают; следовательно, в этот момент времени данные тела ведут себя по отношению друг к другу как два неизменных твердых тела, которые, впрочем, могут скользить друг относительно друга.

Если во время удара имеется скольжение, то в месте соприкосновения возникает тангенциальное действие, которое, вообще говоря, приводит к трению скольжения, так что его необходимо учитывать.

Итак, даже если не принимать во внимание пассивное сопротивление, возникающее в месте соприкосновения, для окончательной деформации необходимо совершить некоторую работу, поэтому полная живая сила тел в конце столкновения обязательно будет меньше первоначальной, и прежде всего нам необходимо выяснить, насколько велика эта разница.

3. Оценка живой силы, потерянной двумя столкнувшимися телами к концу соударения. Рассмотрим произвольную молекулу массы M , принадлежащую одному из двух тел. Пусть (см. рис. 1).

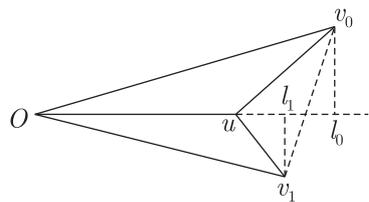


Рис. 1

Ov_0, Ov_1, Ou — прямые, проходящие через точку O и задающие скорости v_0 до столкновения, v_1 — после него и u — в момент наибольшего сжатия соответственно;

$U = \overline{v_0 v_1} = \overline{v_0} - \overline{v_1}$ — скорость, потерянная к концу столкновения;

$\varphi_0 = \overline{v_0 u} = \overline{v_0} - \overline{u}$ — скорость, потерянная во время первой части столкновения;

$\varphi_1 = \overline{v_1 u} = \overline{v_1} - \overline{u}$ — скорость, набранная во время второй части;

I_0, I_1 — проекции точек v_0 и v_1 на направление луча Ou .

Тогда

$$v_0^2 = u^2 + \varphi_0^2 + 2u \cdot \overline{u l_0}, \quad v_1^2 = u^2 + \varphi_1^2 + 2u \cdot \overline{u l_1};$$

откуда, замечая, что $I_0 I_1 = U \cos(U, u)$, находим

$$mv_0^2 - mv_1^2 = m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + 2mU \cos(U, u)u.$$

Если сложить уравнения, аналогичные последним, для всех таких масс m , то мы получим³

$$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2 = \sum m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + 2 \sum mU \cos(U, u)u. \quad (1)$$

Выражение

$$\sum mU \cos(U, u)u dt$$

представляет собой элементарную работу количеств движения, потерянных к концу столкновения, если оценивать ее при движении обоих тел в момент наибольшего сжатия. Однако,

³Прим. ред. — Здесь и ниже (формулы (2)–(6)) суммирование проводится по точкам обоих тел.

как уже отмечалось выше, в этот момент они движутся как два неизменных твердых тела, которые, правда, могут скользить или вращаться вокруг друг друга; отсюда следует, что вышеупомянутая работа равна оцениваемой точно так же, но с противоположным знаком, элементарной работе импульса, возникающего из-за касательного молекулярного взаимодействия в месте соприкосновения. Итак, обозначая через J этот импульс, а через w — проекцию скорости скольжения⁴ на его направление, получаем

$$\sum mU \cos(U, u)u dt = -Jw dt,$$

и формула (1) принимает вид

$$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2 = \sum m(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) - 2Jw. \tag{2}$$

До сих пор мы использовали только те гипотезы, с которыми уже давно согласны все исследователи. Теперь мы хотим сделать одно вполне правдоподобное предположение, состоящее в том, что φ_1 направлено противоположно φ_0 , так что, полагая

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = -n, \quad \frac{1-n}{1+n} = \varepsilon,$$

мы получим

$$U = \varphi - \varphi_0 = \varphi_0(1+n), \quad \varphi_0 = \frac{U}{1+n}, \quad \varphi_1 = \frac{nU}{1+n},$$

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = \frac{1-n}{1+n}U^2 = \varepsilon U^2.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2 = \sum \varepsilon mU^2 - 2Jw. \tag{3}$$

Если сталкивающиеся тела полностью лишены упругости, то вторая часть столкновения отсутствует, и тогда

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad n = 0, \quad \varepsilon = 1;$$

следовательно,

$$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2 = \sum mU^2 - 2Jw. \tag{4}$$

Если перевести это уравнение на обычный язык и опустить слагаемое, содержащее J , то мы получим теорему Карно⁵.

Если бы оба тела были совершенно упругими, то скорости частиц в конце столкновения были бы равны по величине и противоположны по знаку⁶ начальным скоростям, и тогда

$$n = 1, \quad \varepsilon = 0.$$

Однако в природе не существует ни совершенно упругих тел, ни тел, полностью лишенных упругости, поэтому мы должны обратить все свое внимание на уравнение (3) во

⁴Прим. ред. — Скорость скольжения w во время столкновения изменяется по величине и по направлению, поэтому следующая ниже формула лишена смысла. Правильная формула составляет содержание теоремы Кельвина об изменении кинетической энергии при ударе, доказанной в «Натурфилософии» Томсона и Тета: под величиной w следует понимать проекцию на J полусуммы начальной и конечной скоростей скольжения.

⁵Прим. ред. — Речь идет о первой теореме Карно об изменении кинетической энергии при наложении идеальной геометрической связи.

⁶Прим. ред. — Данное утверждение следует отнести к потерянными и набранным скоростям.



всей его общности, причем коэффициент ε в нем представляет собой дробь, которая может меняться от молекулы к молекуле.

Пусть M обозначает массу ударившего тела, а M' — массу тела, получившего удар. Договоримся, что в правой части уравнения (3) символы m , U , ε будут обозначать только массу молекулы тела M , ее потерянную скорость и соответствующий этой скорости коэффициент потери живой силы. Для молекулы тела M' аналогичные символы будут отмечены штрихом.

После этих уточнений наше уравнение (3) принимает следующий вид:

$$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2 = S\varepsilon mU^2 + S'\varepsilon' m'U'^2 - 2Jw, \quad (5)$$

где символы S , S' обозначают суммы по всем молекулам первого и второго тела соответственно.

Теперь предположим, что коэффициенты ε и ε' постоянны для молекул m и m' соответственно, хотя и могут не совпадать друг с другом.⁷ Тогда

$$\sum mv_0^2 - \sum mv_1^2 = \varepsilon S m U^2 + \varepsilon' S' m' U'^2 - 2Jw. \quad (6)$$

После наших рассуждений становится очевидно, что если друг с другом сталкиваются одновременно несколько тел, то в правую часть нашего уравнения надо ввести столько же слагаемых, содержащих ε и ε' , сколько было тел, и столько же слагаемых, аналогичных $2Jw$, сколько было столкновений.⁸

Но мы будем рассматривать только наиболее простой вариант уравнения (6). Казалось бы, из нашего последнего предположения вытекает, что константы ε , ε' — это особые характеристики каждого из тел, и их значения можно раз и навсегда определить, рассмотрев простые случаи, когда легко поставить эксперимент. Однако это невозможно; действительно, если мы добавим к уравнению (6) обычные уравнения механики, свои в каждой задаче, то мы придем к результатам, которые не согласуются с данными наблюдениями; впрочем, то же самое происходит и с другими формулами, менее общими, чем (6), предлагавшимися до сих пор. Дело в том, что мы пренебрегли колебаниями молекул в обоих телах, вызванными столкновением, а живую силу этих колебаний, которая более или менее превращается в тепло, необходимо добавить к той потерянной живой силе, которую мы уже оценивали. Живая сила колебаний для каждого из тел зависит не только от природы этого тела, но и от его формы, размеров, а также от положения тел друг относительно друга. Две живые силы этой природы, соответствующие телам M и M' и влияющие на два первых слагаемых в правой части уравнения (6), можно понимать эмпирически и относительно, при условии, что мы рассматриваем первый из коэффициентов ε , ε' как зависящий от природы тела M' и оба — как зависящие от формы, размеров тел и от их взаимного расположения.⁹

4. Шары, которые используются при игре в бильярд, практически одинаковые, поэтому можно считать, что значения коэффициентов ε , ε' совпадают. Нам известно, что эти значения очень малы, хотя и не определены.

⁷Прим. ред. — Неясен физический смысл такого предположения. На самом деле эти коэффициенты равны, что следует из закона сохранения количества движения (см. ниже комментарии к примеру в п. 5).

⁸Прим. ред. — Такое упрощенное представление о кратном ударе не реалистично (см. Иванов А. П. О кратном ударе // ПММ, 1995, т. 59, вып. 6, с. 930–946).

⁹Прим. ред. — В настоящее время для описания удара используется единственный коэффициент, допускающий различные физические толкования (см. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.).

Как показывает опыт, при косом ударе шара о неподвижную плоскость или о борт отношение нормальных компонент скорости шара после и до удара практически не зависит от угла наклона, следовательно, это отношение такое же, как и при нормальном (перпендикулярном) ударе. Допуская этот принцип, мы можем в данном случае не рассматривать уравнение (6).

Мы еще остановимся на этих общих принципах, которые впоследствии станут понятнее, а пока займемся следующим частным случаем и соответствующими ему результатами эксперимента.

5. О прямом ударе двух тел. Предположим, что каждая из двух масс осуществляет поступательное движение в определенном направлении и что произошло столкновение, при котором нормаль к участку соприкосновения проходит через центры тяжести C, C' обоих тел и параллельна направлению движения. Поскольку при соприкосновении никакого тангенциального взаимодействия не возникает, в конце соударения столкнувшиеся тела будут по-прежнему осуществлять поступательное движение параллельно прямой CC' .

Пусть V_0, V_1 — скорости ударившегося тела M до и после удара; V'_0, V'_1 — аналогичные скорости второго тела.

По закону сохранения количеств движения получаем

$$MV_1 + M'V'_1 = MV_0 + M'V'_0,$$

или

$$M'(V'_0 - V'_1) = M(V_1 - V_0). \tag{a}$$

С другой стороны, уравнение (6) сводится к следующему:

$$M(V_0^2 - V_1^2) + M'(V'^2_0 - V'^2_1) = \varepsilon M(V_0 - V_1)^2 + \varepsilon' M'(V'_0 - V'_1)^2$$

или

$$\begin{aligned} M(V_0 - V_1)(V_0 + V_1) + M'(V'_0 - V'_1)(V'_0 + V'_1) = \\ = \varepsilon M(V_0 - V_1)^2 + \varepsilon' M'(V'_0 - V'_1)^2. \end{aligned}$$

Заменяя в этом последнем уравнении множитель $M'(V'_0 - V'_1)$ на его значение (a) и сокращая обе части на общий множитель, находим

$$V_0 + V_1 - (V'_0 + V'_1) = \varepsilon(V_0 - V_1) - \varepsilon'(V'_0 - V'_1), \tag{b}$$

после чего, последовательно исключая V'_1 и V_1 из (a) и (b), получаем

$$\begin{cases} V_1 = V_0 - \frac{2M'(V_0 - V'_0)}{M'(1 + \varepsilon) + M(1 + \varepsilon')}, \\ V'_1 = V'_0 + \frac{2M(V_0 - V'_0)}{M'(1 + \varepsilon) + M(1 + \varepsilon')}. \end{cases} \tag{7}$$

Если тело, испытавшее удар, до столкновения находилось в покое, то попросту

$$\begin{cases} V_1 = V_0 \left[1 - \frac{2M'}{M'(1 + \varepsilon) + M(1 + \varepsilon')} \right], \\ V'_0 = \frac{2MV_0}{M'(1 + \varepsilon) + M(1 + \varepsilon')}. \end{cases} \tag{8}$$



Теперь предположим, во-первых, что оба тела подвешены на нитях в двух точках, находящихся на фиксированном уровне, в результате чего линия центров тяжести горизонтальна, проходит через участок соприкосновения и нормальна к нему; во-вторых, что сбоку от шаров и параллельно этой линии установлены две вертикальные металлические круговые арки, на которые нанесена шкала. Если отклонить массу M от ее положения на определенную высоту, а затем отпустить, то ее скорость в момент соприкосновения с массой M' будет зависеть от этой высоты; с помощью шкалы, нанесенной на арки, мы найдем, на какую высоту поднимаются центры тяжести двух тел вследствие удара, и в результате вычислим скорости тел в конце столкновения. Подставляя полученные таким способом значения V_0, V_1, V_1' в формулы (8), мы найдем два разных уравнения, связывающие ε и ε' , что позволит нам определить значения этих неизвестных.¹⁰

В случае, когда кий ударяет по шару, вес которого равен $1/3$ веса кия, и когда скорости V_0 не превосходят 2.80 м/с, Кориолис, действуя описанным выше способом, нашел

$$V_1 = \frac{7}{12}V_0, \quad V_1' = \frac{5}{4}V_0,$$

а затем, подставив эти значения в формулы (8), получил только одно соотношение, а именно

$$1 + \varepsilon + 3(1 + \varepsilon') = \frac{24}{5},$$

недостаточное для того, чтобы определить ε и ε' . Если предположить, что шар после большого числа ударов практически не изменяет своей формы, то мы не допустим большой ошибки, положив $\varepsilon = 0$, и тогда

$$\varepsilon' = \frac{4}{15} = 0.27.$$

Мы будем считать, что эта цифра верна и для других случаев, когда кий ударяет по шару, как бы этот удар ни происходил.

Теперь предположим, что масса M' достаточно велика по сравнению с массой M , так что мы можем считать ее бесконечной; тогда

$$V_1 = -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}V_0, \quad V_1' = 0. \quad (9)$$

По результатам эксперимента отношение $\frac{V_1}{V_0}$, а вместе с ним и ε , будет зависеть от природы массы, испытавшей удар, и это возвращает нас к соображениям, высказанным в конце третьего пункта.

Данный случай практически соответствует удару шара о борт и, как выяснил Кориолис, отношение нормальных скоростей шара до и после удара мало отличается от 0.55 , если начальные скорости не превосходят 7 м/с, а это почти максимальный предел, возможный на бильярде. Полагая $-\frac{V_1}{V_0} = 0.55$, по формуле (9) получаем

$$\varepsilon = 0.29.$$

¹⁰Прим. ред. — Автор не заметил, что к уравнению (1.а) можно добавить формулу $MV_1 + M'V_1' = (M + M')v$, выражающую закон сохранения импульса в момент окончания первой части столкновения. Отсюда следует $\varepsilon = \varepsilon'$.

Если бильярдный шар падает вертикально на горизонтальную мраморную плиту, то после удара он поднимется на высоту, равную $2/3$ от первоначальной; таким образом,

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

откуда

$$\varepsilon = 0.155.$$

В то же время, если уронить плашмя диск из слоновой кости на мраморную плиту, то он не отскочит от нее; это можно объяснить только тем, что приобретенная живая сила полностью переходит в колебательную.

6. Предположения и обозначения. Мы будем называть *точкой столкновения* точку соприкосновения при ударе кия о бильярдный шар, двух шаров или шара о борт.

Мы будем считать, что шар состоит из однородных сферических частиц, плотность которых у разных шаров может быть разной.

Если в задаче рассматривается только один шар, то мы будем обозначать:

R, M — его радиус и массу;

$M \frac{R^2}{k}$ — его момент инерции относительно диаметра;

χ, η, ζ — параллельные трем прямоугольным осям координат Ox, Oy, Oz компоненты скорости тяжести шара в произвольный момент времени;

n, p, q — аналогичные компоненты вращения шара вокруг центра тяжести.

В случае, когда в задаче участвуют два шара, аналогичные символы для второго шара будем отмечать штрихом.

Характеристики движения тела в момент времени, который считается начальным, будем отмечать индексом 0; при ударе таким моментом считается начало столкновения. Характеристики движения, относящиеся к концу столкновения, будем отмечать индексом 1.

2. Движение шара по сукну с учетом трения скольжения

7. Шар можно бросить на сукно тем или иным способом, но с нашей, особой, точки зрения, шар попадает на сукно после удара кием; эффекты этого удара мы обсудим позже. Совместим плоскость xOy с плоскостью бильярдного стола, тогда ось Oz окажется вне его.

Пусть f обозначает коэффициент трения, который, по Кориолису, можно считать равным 0.25; v_x, v_y — параллельные осям Ox, Oy компоненты скорости скольжения v шара по сукну.

Очевидно, что вращение q остается постоянным, поэтому мы можем его не учитывать, так как оно не влияет на направление трения.¹¹

У нас есть соотношения

$$v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + nR \quad (1)$$

¹¹ Прим. ред. — Данное допущение нереалистично: игроки в бильярд часто используют боковое вращение шара для придания ему дугообразной траектории, избегая ненужных столкновений.

и система уравнений

$$\begin{cases} M \frac{d\chi}{dt} = -\frac{v_x}{v} f Mg, \\ M \frac{d\eta}{dt} = -\frac{v_y}{v} f Mg, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dn}{dt} = -\frac{v_y}{v} f MgR, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_x}{v} f MgR. \end{cases} \quad (2)$$

Из первых двух уравнений этой системы, учитывая значения (1), находим

$$\frac{d\chi}{\chi - pR} = \frac{d\eta}{\eta + nR}. \quad (3)$$

Деля друг на друга первое и четвертое, а затем — второе и третье уравнения системы (2) и проинтегрировав результат, получаем

$$\begin{aligned} pR &= p_0R - k(\chi - \chi_0), \\ nR &= n_0R + k(\eta - \eta_0). \end{aligned}$$

Если подставить эти значения в уравнение (3), то оно примет вид

$$\frac{d\chi}{\chi(1+k) - k\chi_0 - p_0R} = \frac{d\eta}{\eta(1+k) - k\eta_0 + n_0R},$$

а интеграл от него выражает тот факт, что отношение двух знаменателей или $\frac{v_y}{v_x}$ — величина постоянная. Итак, направление скорости скольжения, а значит, и трения, не изменяется. Поскольку сила трения также постоянна, мы видим, что *в проекции на сужно центр шара описывает параболу* (теорема И.-А. Эйлера). По этой кривой будет двигаться точка соприкосновения. Поместим начало координат O в положение, которое занимала горизонтальная проекция центра C шара в некоторый момент времени, считающийся начальным, и пусть ось Oy параллельна скорости скольжения. Тогда

$$v_x = 0, \quad v_y = v,$$

следовательно, уравнения (2) дают нам¹²

$$\begin{cases} \chi = \chi_0, & \eta = \eta_0 - fgt, \\ nR = n_0R - fgkt, & p = p_0. \end{cases} \quad (4)$$

¹²Компоненты скорости точки, лежащей на одной вертикали с центром C на высоте h , выше этого центра, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{вдоль оси } Ox \dots \quad \chi + hp &= \chi_0 + hp_0, \\ \text{вдоль оси } Oy \dots \quad \eta - hn &= \eta_0 - hn_0 - fgt \left(1 - \frac{kh}{R}\right). \end{aligned}$$

Поэтому при $h = \frac{R}{k}$ эта скорость остается постоянной как по величине, так и по направлению. В результате получаем теорему Кориолиса:

Скорость центра качаний, расположенного над центром тяжести шара, остается постоянной по величине и по направлению.

Пусть
 a обозначает начальную скорость центра C шара,
 α — ее наклонение относительно оси Ox ,
 x, y — координаты произвольной точки параболы.
 Тогда

$$\chi_0 = a \cos \alpha, \quad \eta_0 = a \sin \alpha, \quad \chi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt};$$

следовательно,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cos \alpha, & \frac{dy}{dt} = a \sin \alpha - fgt, \\ x = a \cos \alpha t, & y = a \sin \alpha t - \frac{fgt^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

и уравнение параболы имеет вид

$$y = a \operatorname{tg} \alpha x - \frac{fg}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)x^2. \quad (6)$$

За скольжением следует качение: оно начинается в тот момент, когда скорость скольжения обращается в нуль или когда у нас

$$0 = \eta + nR = \eta_0 + n_0R - fgt(1 + k)t;$$

отсюда, обозначая через v_0 начальную скорость скольжения, получаем

$$t = \frac{v_0}{fg(1 + k)}.$$

Координаты соответствующей точки параболы равны

$$x_0 = \frac{av_0 \cos \alpha}{fg(1 + k)}, \quad y_1 = \left(a \sin \alpha - \frac{v_0}{1 + k} \right) \frac{v_0}{fg(1 + k)};$$

начиная с этой точки, центр C будет двигаться по касательной к параболе. Мы считаем, что нам не стоит останавливаться на соответствующих уравнениях движения шара, в которых учтено трение качения. Данный вопрос не представляет особого интереса, к тому же эту тему затрагивают при обычном преподавании.

3. Об ударе свободной сферы о неподвижную плоскость

8. Хотя данный вопрос не имеет непосредственного отношения к игре в бильярд, мы считаем, что его необходимо рассмотреть, так как результаты, к которым мы придем, довольно интересны и могут оказаться полезными с точки зрения некоторых экспериментов.

Сохраним обозначения и предположения предыдущего пункта. Кроме того, обозначим через Z нормальную реакцию плоскости по отношению к сфере. По-прежнему не принимая во внимание постоянное вращение q , имеем

$$v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + nR, \quad (1)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d\chi}{dt} = -\frac{v_x}{v} f Z, \\ M \frac{d\eta}{dt} = -\frac{v_y}{v} f Z, \\ M \frac{d\zeta}{dt} = Z, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dn}{dt} = -\frac{v_x}{v} f Z R, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_y}{v} f Z R. \end{array} \right. \quad (2)$$

Как и раньше, можно доказать, что направление скорости скольжения шара по сукну не изменяется. Взяв ось Ox параллельно этому направлению, прежде всего получаем

$$\eta = \eta_0, \quad n = n_0, \quad (3)$$

затем

$$M \frac{d\chi}{dt} = -f Z, \quad M \frac{d\zeta}{dt} = Z, \quad M \frac{R}{k} \frac{dp}{dt} = f Z. \quad (4)$$

Исключая Z с помощью второго уравнения и интегрируя в пределах столкновения, выводим из этих уравнений систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = \chi_0 - f(\zeta_1 - \zeta_0), \\ p_1 R = p_0 R + f k(\zeta_1 - \zeta_0). \end{array} \right. \quad (5)$$

Обозначая через ν коэффициент восстановления нормальной скорости и учитывая, что ζ_0 меньше нуля, получаем

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = -\nu$$

и, окончательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = \chi_0 + f(1 + \nu)\zeta_0, \\ p_1 R = p_0 R - f k(1 + \nu)\zeta_0. \end{array} \right. \quad (6)$$

Пусть a_0, a_1 — результирующие для χ_0, ζ_0 и χ_1, ζ_1 , а α_0, α_1 — острые углы, которые они образуют с осью Ox ; тогда

$$\begin{aligned} \chi_0 &= a_0 \cos \alpha_0, & \zeta_0 &= -a_0 \sin \alpha_0, \\ \chi_1 &= a_1 \cos \alpha_1, & \zeta_1 &= a_1 \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \cos \alpha_1 = a_0 \cos \alpha_0 - f(1 + \nu)a_0 \sin \alpha_0, \\ a_1 \sin \alpha_1 = \nu a_0 \sin \alpha_0, \\ \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\nu \operatorname{tg} \alpha_0}{1 - f(1 + \nu) \operatorname{tg} \alpha_0}. \end{array} \right. \quad (7)$$

9. Рикошеты. Предположим, что мы бросаем сферу на плоскость, считающуюся горизонтальной, под некоторым углом с таким расчетом, чтобы в начальный момент величина η

была равна нулю. Возникает последовательность рикошетов, при которых центр C подвижного тела все время остается в одной и той же плоскости, нормальной по отношению к неподвижной плоскости. Если a_0, α_0 соответствуют окончанию одного из таких рикошетов, то центр C будет описывать дугу параболы, длина¹³ которой равна

$$P_0 = \frac{a_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g},$$

точно так же для следующего рикошета

$$P_1 = \frac{a_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{g},$$

откуда

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{a_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{a_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}$$

и, в силу двух первых формул системы (7),

$$\frac{P_1}{P_0} = \nu[1 - f(1 + \nu) \operatorname{tg} \alpha_0]. \tag{8}$$

Если угол α_0 настолько мал, что произведением $f \operatorname{tg} \alpha_0$ по сравнению с единицей можно пренебречь, то, очевидно, то же самое будет верно для следующих рикошетов, если принять во внимание третью из формул (7); тогда попросту получаем

$$\frac{P_1}{P_0} = \nu. \tag{9}$$

10. Опыт г-на Розе. Этот искусный экспериментатор предложил бросать (соблюдая указанные выше условия) шар из слоновой кости на горизонтальные пластинки, сделанные из различных материалов и обладающие значительной массой, достаточной, чтобы считать их полностью неподвижными.

Он находил отношение двух последовательных отпечатков, оставленных шаром на поверхности; в одном из его опытов число отпечатков достигало дюжины. Таким образом ему удалось установить следующие средние значения, которые относительно мало отличаются от настоящих.

Пластинка из полированного мрамора, покрытая голландской сажей	$\nu = 0.80$ ¹⁴
Пластинка из плохо отполированного мрамора в естественном состоянии (начальная высота, с которой падает тело, не превосходит 0.10 м)	$\nu = 0.85$
Пластинка из мрамора, покрытая листом бумаги и голландской сажей (начальная высота, с которой падает тело, не превосходит 0.15 м)	$\nu = 0.65$
Еловый брусок, покрытый голландской сажей	$\nu = 0.63$

¹³Прим. ред. — На самом деле данная величина равна половине длины хорды, стягивающей концы параболы.

¹⁴Эта цифра мало отличается от значения $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.81$, которое мы указали в пункте 5.



Поскольку и бумага, и дерево — это, в сущности, древесина, из двух последних цифр, судя по всему, следует, что, когда энергия удара не выходит за какие-то пределы, коэффициент восстановления нормальной скорости неподвижной плоскости зависит в основном от пластинки из некоторого вещества, покрывающего большую массу другого вещества.

4. Удар шара о борт

11. Проведем оси Oy и Oz перпендикулярно к сукну и, соответственно, к борту и вслед за Кориолисом будем считать, что $f = 0.20$.

Если бы во время столкновения из-за трения шара о борт возникла вертикальная компонента, направленная снизу вверх, то в конце столкновения шар мог бы приобрести малую поступательную скорость, направленную в ту же сторону, однако она тут же исчезла бы из-за действия силы тяжести. Если бы вышеуказанная компонента была направлена в противоположную сторону, то шар оказывал бы на сукно давление, порядок которого совпадает с порядком этой компоненты¹⁵. Тогда в конце столкновения из-за упругости сукна (впрочем, очень слабой) шар приобрел бы вертикальную поступательную скорость, направленную снизу вверх, и эта очень небольшая скорость тоже почти сразу исчезла бы под действием силы тяжести. Итак, в любом случае можно предположить, что шар не покидает сукна, что, вообще говоря, согласуется с нашими наблюдениями. Таким образом, у нас $\eta = 0$, и нам не надо рассматривать второе из уравнений (2) пункта 8.

Как и раньше и из тех же самых соображений, мы не будем принимать во внимание постоянное вращение q .

Для удобства, но только при рассмотрении настоящего вопроса, мы заменим обозначения v_x , v_y на φ и ψ , отмечая эти символы индексами 0 и 1 в зависимости от того, относятся они к началу или к концу столкновения.

Итак, у нас есть соотношения

$$\varphi = \chi - pR, \quad \psi = nR, \quad (1)$$

и система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d\chi}{dt} = -\frac{\varphi}{v} fZ, \\ M \frac{d\zeta}{dt} = Z, \\ M \frac{R}{k} \frac{dn}{dt} = -\frac{\psi}{v} fZ, \\ M \frac{R}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{\varphi}{v} fZ. \end{array} \right. \quad (2)$$

Принимая во внимание значения (1), из двух последних уравнений этой системы получаем

$$\frac{dn}{nR} = -\frac{dp}{\chi - pR}. \quad (3)$$

¹⁵Прим. ред. — В этом случае в уравнениях удара следовало бы учесть изменение угловой скорости q , обусловленное наличием нормального ударного импульса в точке контакта шара со столом, а также трением о сукно. Отметим, что такая ситуация возникает при движении шара к борту с нижним винтом («оттяжка»). Для описания такого «стесненного» удара требуются более сложные модели, нежели рассматриваемые Резальем (см. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.).

Деля друг на друга первое и последнее из этих же уравнений и проинтегрировав результат, находим

$$\chi = \chi_0 - \frac{R}{k}(p - p_0), \tag{4}$$

следовательно,

$$\varphi = \chi_0 + \frac{p_0 R}{k} - \frac{1+k}{k} p R. \tag{5}$$

В итоге уравнение (3) принимает вид

$$\frac{dn}{nR} = \frac{dp}{\frac{1+k}{k} p R - \left(\chi_0 + \frac{p_0 R}{k} \right)}.$$

Отсюда получаем

$$n = n_0 \left[\frac{\frac{1+k}{k} p R - \left(\chi_0 + \frac{p_0 R}{k} \right)}{\frac{1+k}{k} p_0 R - \left(\chi_0 + \frac{p_0 R}{k} \right)} \right]^{\frac{k}{1+k}}$$

или попросту

$$nR = n_0 R \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^{\frac{k}{1+k}} = \psi. \tag{6}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$v = \pm \varphi \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}}, \tag{7}$$

где верхний или нижний знак выбирается в зависимости от знака φ , который, впрочем, определяется знаком φ_0 .

Деля друг над друга первые два уравнения системы (2) и принимая во внимание только что записанную формулу, находим

$$f d\zeta_1 = \mp \sqrt{1 + \frac{n_1^2 R^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{2}}} d\chi. \tag{8}$$

Из первой формулы (1) и из уравнения (5) после исключения переменной p выводим соотношение

$$\chi = \frac{k\chi_0 + p_0 R + \varphi}{1+k}, \tag{9}$$

откуда

$$d\chi = \frac{d\varphi}{1+k},$$

следовательно, после интегрирования по длительности столкновения уравнение (8) дает нам

$$(\zeta_1 - \zeta_0) f (1+k) = \mp \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{\frac{1+k}{k}}} d\varphi.$$

Пусть a обозначает абсолютную величину компоненты ζ_0 , ν — долю начальной нормальной скорости, возвращенную бортом; оценим ее как 0.55 (см. пункт 5). Получаем

$$\zeta_0 = -a, \quad \zeta_1 = \nu a$$

и, окончательно,

$$af(1+k)(1+\nu) = \mp \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{\frac{1+k}{2}}} d\varphi. \quad (10)$$

Если мы допустим, что из этого уравнения можно вывести значение φ , то задача полностью решена, так как уравнения (5), (6), (9) позволяют нам найти p_1 , n_1 , χ_1 соответственно. Однако очевидно, что решить это уравнение практически невозможно, исключение составляет только случай $n_0 = 0$.

Как бы то ни было, если заметить, что порядок отношения $\frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi}$ совпадает с порядком величины f , и допустить, что квадратом этого отношения можно пренебречь, мы получим

$$\left(\frac{\varphi_0}{\varphi}\right)^{\frac{1+k}{2}} = \left(1 + \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0}\right)^{\frac{1+k}{2}} = 1 + \left(\frac{1+k}{2}\right) \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0},$$

следовательно,

$$af(1+k)(1+\nu) = \pm \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sqrt{1 + \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} - \frac{1+k}{2} \frac{n_0^2 R^2}{\varphi_0^2} (\varphi - \varphi_0)} d\varphi. \quad (11)$$

Теперь можно провести интегрирование, но, на наш взгляд, останавливаться на дальнейших вычислениях смысла не имеет.

5. О столкновении двух свободных сфер с учетом трения и степени их упругости

12. Пусть ось x совпадает с прямой, соединяющей центры C , C' ударившего и получившего удар шара; массы этих шаров обозначим через M , M' соответственно и поместим начало координат O дальше точки C , если смотреть из точки C' . Обозначим через X нормальное действие, которое масса M оказывает на M' во время столкновения, через f — коэффициент трения, возникающего в точке удара, наконец, через v_y , v_z — параллельные осям Ox , Oy компоненты скорости скольжения v массы M относительно M' . Мы не будем принимать во внимание вращения n , n' , так как с начала до конца столкновения они не изменяются и не влияют на направление трения, ни на уравнение живых сил.

Справедливы соотношения

$$v_y = \eta - \eta' + Rq + R'q', \quad v_z = \zeta - \zeta' - pR - p'R' \quad (1)$$

и уравнения

$$\begin{cases} M \frac{dX}{dt} = -X, & M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_z}{v} fRX, \\ M \frac{d\eta}{dt} = -\frac{v_y}{v} fX, & M \frac{R^2}{k} \frac{dq}{dt} = -\frac{v_y}{v} fRX, \\ M \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{v_z}{v} fX, & \end{cases} \quad (2)$$



$$\begin{cases} M' \frac{dX'}{dt} = X, & M' \frac{R'^2}{k'} \frac{dp'}{dt} = \frac{v_z}{v} f R' X, \\ M' \frac{d\eta'}{dt} = \frac{v_y}{v} f X, & M' \frac{R'^2}{k'} \frac{dq'}{dt} = -\frac{v_y}{v} f R' X, \\ M' \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{v_z}{v} f X. \end{cases} \quad (2')$$

Деля друг на друга второе и третье уравнения системы (2) и принимая в расчет значения (1), находим

$$\frac{d\eta}{\eta - \eta' + Rq + R'q'} = \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta' - Rp - R'p'}. \quad (3)$$

Подставим значения $\frac{v_y}{v} f X$, $\frac{v_z}{v} f X$, полученные из второго и третьего уравнений системы (2), в остальные уравнения систем (2) и (2'), содержащие эти величины, а затем проинтегрируем; в результате

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta'_0 - \frac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rq &= Rq_0 + k(\eta - \eta_0), \\ Rp &= Rp_0 - k(\zeta - \zeta_0), \\ \zeta' &= \zeta'_0 - \frac{M}{M'}(\zeta - \zeta_0), \\ R'q' &= R'q'_0 + \frac{M}{M'}k'(\eta - \eta_0), \\ R'p' &= R'p'_0 - \frac{M}{M'}k'(\zeta - \zeta_0). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), придаем ему вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\eta}{\eta_0 - \eta'_0 + Rq_0 + Rq'_0 + \left[1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k')\right](\eta - \eta_0)} = \\ &= \frac{d\zeta}{\zeta_0 - \zeta'_0 - Rp_0 - R'p'_0 + \left[1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k')\right](\zeta - \zeta_0)}, \end{aligned}$$

и его интеграл выражает тот факт, что отношение знаменателей, или $\frac{v_y}{v_z}$, постоянно.

Таким образом, пока длится столкновение, скорость скольжения массы M к M' сохраняет постоянное направление и зависит только от относительного движения двух сфер в момент начала столкновения¹⁶.

Взяв ось Oy параллельной этому направлению, получаем $v_y = v$, $v_z = 0$ и, в силу двух уравнений в каждой из групп (2) и (2'), компоненты ζ , ζ' , p , p' остаются постоянными; мы можем их не учитывать, так как они не вносят дополнительных слагаемых в уравнение живых сил. Затем, интегрируя остальные уравнения из этих двух групп в пределах столк-

¹⁶Прим. ред. — Данное свойство ранее было доказано Кориолисом. На него также указывал Л. Эйлер.



новения, получаем

$$\begin{aligned} M(\chi_1 - \chi_0) &= - \int X dt, & \frac{MR}{k}(q_1 - q_0) &= -f \int X dt, \\ M(\eta_1 - \eta_0) &= -f \int X dt, & \frac{M'R'}{k}(q'_1 - q'_0) &= -f \int X dt, \\ M(\chi'_1 - \chi'_0) &= \int X dt, \\ M(\eta'_1 - \eta'_0) &= -f \int X dt, \end{aligned}$$

и, полагая

$$\chi_0 - \chi_1 = \omega_1, \quad (4)$$

приходим к системе

$$\begin{cases} \eta_0 - \eta_1 = f\omega_1, & q_0 - q_1 = f\frac{k}{R}\omega_1, \\ \chi'_0 - \chi'_1 = -\frac{M}{M'}\omega_1, & q'_0 - q'_1 = f\frac{M}{M'}\frac{k'}{M'}\omega_1, \\ \eta'_0 - \eta'_1 = -f\frac{M}{M'}\omega_1. \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая все эти значения и используя теорему Кёнига, находим, что живая сила, потерянная обоими телами после столкновения, равна

$$\begin{aligned} & M \left[\chi_0^2 - \chi_1^2 + \eta_0^2 - \eta_1^2 + \frac{R^2}{k}(q_0^2 - q_1^2) \right] + \\ & + M' \left[\chi_0'^2 - \chi_1'^2 + q_0'^2 - q_1'^2 + \frac{R'^2}{k'}(q_0'^2 - q_1'^2) \right] = \\ & = M\omega_1[\chi_0 + \chi_1] + f(\eta_0 + \eta_1) + fR(q_0 + q_1) - \\ & - (\chi'_0 + \chi'_1) - f(\eta'_0 + \eta'_1) + fR'(q'_0 + q'_1) = \\ & = M\omega_1 \left\{ A - \omega_1[1 + f^2(1 + k)] - \omega_1 \frac{M}{M'}[1 + f^2(1 + k')] \right\}, \end{aligned} \quad (a)$$

где

$$A = 2[\chi_0 - \chi'_0 + f(\eta_0 - \eta'_0 + Rq_0 + R'q'_0)].$$

Точно так же для живых сил тел M и M' , соответствующих потерянными скоростям, получаем

$$M \left[(\chi_0 - \chi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2 + \frac{R^2}{k}(q_0 - q_1)^2 \right] = M\omega_1^2[1 + f^2(1 + k)], \quad (b)$$

$$M' \left\{ (\chi'_0 - \chi'_1)^2 + (\eta'_0 - \eta'_1)^2 + \frac{R'^2}{k'}(q'_0 - q'_1)^2 \right\} = M\omega_1^2 \frac{M}{M'}[1 + f^2(1 + k')]. \quad (b')$$

С учетом первого из уравнений (2) импульс трения, соответствующий продолжительности столкновения, равен

$$f \int X dt = fM\omega_1. \quad (c)$$



Обозначая через w скорость скольжения массы M' относительно M в момент наибольшего сжатия и используя уравнение (6) из пункта 3, а также выражение (a) и сумму значений (b), (b'), (c), умноженных на ε , ε' , $-2w$ соответственно, получаем

$$\omega_1 \left\{ [1 + f^2(1 + k)](1 + \varepsilon) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')](1 + \varepsilon') \right\} = A + 2fw. \tag{6}$$

Все только что установленные нами формулы относятся к моменту наибольшего сжатия, а не к концу столкновения; однако в этот момент времени сталкивающиеся тела ведут себя так, словно они полностью лишены упругости, поэтому нам надо взять $\varepsilon = \varepsilon' = 1$. Если мы уберем индекс 1, чтобы различать элементы движения, относящиеся к этому моменту и к концу столкновения, то уравнение (6) даст нам

$$2\omega \left\{ [1 + f^2(1 + k)] + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')] \right\} = A + 2fw, \tag{7}$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{2\omega \left\{ 1 + f^2(1 + k) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')] \right\}}{[1 + f^2(1 + k)](1 + \varepsilon) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')](1 + \varepsilon')}. \tag{8}$$

Однако у нас $\chi' = \chi$, и второе из уравнений (5) принимает вид

$$\chi'_0 - \chi = -\frac{M}{M'}\omega = -\frac{M}{M'}(\chi_0 - \chi),$$

поэтому

$$\chi = \frac{\chi'_0 + \frac{M}{M'}\chi_0}{1 + \frac{M}{M'}}, \quad \omega = \frac{\chi_0 - \chi'_0}{1 + \frac{M}{M'}}$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \frac{2 \left\{ 1 + f^2(1 + k) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')] \right\}}{[1 + f^2(1 + k)](1 + \varepsilon) + \frac{M}{M'} [1 + f^2(1 + k')](1 + \varepsilon')}. \tag{9}$$

Теперь, обращаясь к формулам (4) и (5), мы видим, что все элементы движения двух сфер в конце столкновения найдены.

6. О столкновении двух шаров, помещенных на сукно

13. При игре в бильярд очень важно, чтобы все шары имели один и тот же диаметр, потому что тогда линия центров, на которой лежит точка столкновения двух таких шаров, параллельна сукну. Действительно, если игрок в разных партиях будет пользоваться шарами, у которых эти отношения различны, то его тактика может привести к поражению, каким бы искусным он ни был.

Несмотря на совпадение диаметров, случается, что массы двух шаров различны, как и их моменты инерции относительно диаметра, и это тоже неблагоприятно для игры. В главнии своей пятой главы Кориолис заявил, что он учитывает эту разницу; тем не менее, все его расчеты относятся к столкновению двух одинаковых по форме и однородных шаров.

Что касается столкновения шаров, то Кориолис пишет следующим образом: «Учитывая взаимное трение шаров, мы можем полностью пренебречь трением о сукно в точках опоры шаров во время столкновения, потому что это трение возникает только из-за вертикальной составляющей количества движения, произведенной только взаимным трением шаров, а оно очень мало, как показывают описанные нами ранее эксперименты. Есть еще более веские причины, чтобы пренебречь и очень малой вертикальной скоростью, которую могут приобрести центры шаров в результате трения. Эта скорость исчезнет из-за сопротивления сукна либо станет неощутимой из-за веса шаров, который возвращает их на сукно; впрочем, они его даже не покидают». Это очень верное рассуждение, и мы имеем полное право удивляться, почему же сам автор не принял его в расчет, так как в своих аналитических выкладках он неявно допускает, что оба шара свободны.

Согласно Кориолису, коэффициент трения f одного шара о другой, по-видимому, не должен достигать значения 0,03. Поскольку шары сделаны из одинакового материала, мы можем считать, что коэффициенты ε , ε' совпадают, однако их значение, очень маленькое, не определено.

Сохраняя обозначения предыдущего пункта, мы, однако, должны предположить, что $R' = R$, $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$, и не учитывать двух уравнений, относящихся к поступательному движению по вертикали.

В итоге у нас есть соотношения

$$v_y = \eta = \eta' + R(q + q'), \quad v_z = -R(p + p') \quad (1)$$

и уравнения

$$\begin{cases} M \frac{dX}{dt} = -X, & M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = \frac{v_x}{v} f X.R, \\ M \frac{d\eta}{dt} = -\frac{v_y}{v} f X, & M \frac{R^2}{k} \frac{dq}{dt} = -\frac{v_y}{v} f X.R, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} M' \frac{dX'}{dt} = X, & M' \frac{R^2}{k} \frac{dp'}{dt} = \frac{v_z}{v} f X.R, \\ M' \frac{d\eta'}{dt} = \frac{v_y}{v} f X, & M' \frac{R^2}{k'} \frac{dq'}{dt} = -\frac{v_y}{v} f X.R, \end{cases} \quad (2')$$

Из первого и третьего уравнений системы (2) выводим

$$\frac{d\eta}{v_y} = -\frac{R}{k} \frac{dp}{v_z}. \quad (3)$$

Теперь нам надо попытаться выразить v_y и v_z через η и p соответственно.

Разделим друг на друга вторые, четвертые и третьи уравнения из систем (2) и (2');

после интегрирования получаем

$$\begin{cases} \eta' = \eta'_0 - \frac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rq = Rq_0 + k(\eta - \eta_0), \\ Rq' = Rq'_0 + k' \frac{M}{M'}(\eta - \eta_0), \\ Rp' = Rp'_0 + \frac{k'}{k} \frac{M}{M'}(p - p_0), \end{cases} \quad (4)$$

и формулы (1) принимают вид

$$\begin{cases} v_y = (\eta - \eta_0) \left[1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k') \right] + \eta_0 - \eta'_0 + R(q_0 + q'_0), \\ v_x = -R(p - p_0) \left(1 + \frac{M}{M'} \frac{k'}{k} \right) - R(p_0 + p'_0). \end{cases} \quad (1')$$

Пусть v_0 обозначает скорость скольжения массы M к M' в начале столкновения, а γ — угол между направлением этого скольжения и осью Oy ; полагая

$$a = 1 + k + \frac{M}{M'}(1 + k'), \quad \frac{b}{k} = 1 + \frac{M}{M'} \frac{k'}{k}, \quad (5)$$

мы придадим формулам (1') следующую форму

$$\begin{cases} v_y = v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0), \\ v_z = v_0 \sin \gamma - \frac{bR}{k}(p - p_0). \end{cases} \quad (6)$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d\eta}{v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0)} = \frac{dp}{b(p - p_0) - \frac{Kv_0 \sin \gamma}{R}},$$

а отсюда

$$R(p - p_0) = \frac{kv_0 \sin \gamma}{b} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{a(\eta - \eta_0)}{v_0 \cos \gamma} \right]^{\frac{b}{a}} \right\}. \quad (7)$$

Второе из уравнений (6) принимает вид

$$v_z = v_0 \sin \gamma \left[1 + a \frac{(\eta - \eta_0)}{v_0 \cos \gamma} \right]^{\frac{b}{a}}, \quad (8)$$

поэтому получаем

$$\frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0)}{\sqrt{[v_0 \cos \gamma + a(\eta - \eta_0)]^2 + v_0^2 \sin^2 \gamma \left[1 + \frac{a(\eta - \eta_0)}{v_0 \cos \gamma} \right]^{\frac{3b}{a}}}}. \quad (9)$$



Отсюда следует, что во время столкновения направление трения не постоянно, как это предполагал Кориолис.

Из первых двух уравнений системы (1) выводим соотношение

$$f(\chi_1 - \chi_0) = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{v}{v_y} d\eta \quad (10)$$

и выясняем, как связаны друг с другом χ_1 и неизвестная η_1 , что позволит нам выразить другие элементы движения после столкновения, используя уравнения (4), (7) и первые уравнения систем (2) и (2'), исключив из них X и проинтегрировав. После этого нам остается только найти уравнение живых сил — и мы получим полное решение задачи; однако, останавливаясь на этих общих соотношениях, легко увидеть, что данное решение не будет явным, даже в случае двух одинаковых и однородных шаров, когда $\frac{b}{a} = \frac{7}{5}$.

Но поскольку коэффициент f очень мал, мы можем пренебречь его квадратом, а значит, и второй степенью вариаций всех элементов движения от начала до конца столкновения, которые обращаются в нуль вместе с этим коэффициентом. На данном уровне аппроксимации можно предположить, что в уравнении (10) $\frac{v}{v_y} = \frac{1}{\cos \gamma}$, а это дает нам

$$\eta_0 - \eta_1 = f\omega_1 \cos \gamma, \quad (11)$$

где обозначено

$$\chi_0 - \chi_1 = \omega_1. \quad (12)$$

Используя первые два уравнения из систем (2) и (2'), а также уравнения (4) и (7), получаем следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'_0 - \chi'_1 = -\frac{M}{M'}\omega_1, \\ \eta'_0 - \eta'_1 = -f\frac{M}{M'}\omega_1 \cos \gamma, \\ Rq_0 - Rq_1 = fk\omega_1 \cos \gamma, \\ Rq'_0 - Rq'_1 = fk'\frac{M}{M'}\omega_1 \cos \gamma, \\ Rp_0 - Rp_1 = -fk\omega_1 \sin \gamma, \\ Rp'_0 - Rp'_1 = -fk'\frac{M}{M'}\omega_1 \sin \gamma. \end{array} \right. \quad (13)$$

На условленном уровне аппроксимации живая сила, потерянная шарами после столкновения, равна

$$M\omega_1 \left\{ 2\chi_0 - \omega_1 \left(1 + \frac{M}{M'} \right) + 2f \cos \gamma [\eta_0 - \eta'_0 + R(q_0 + q'_0) - 2f \sin \gamma G(p_0 + p'_0)] \right\}.$$

Потери живой силы у обоих шаров, вызванные падением скоростей, равны $M\omega_1^2$ и $M\frac{M}{M'}\omega_1^2$, поэтому, действуя так же, как в предыдущем пункте, находим, что уравнение живых сил сводится к соотношению

$$\omega_1 \left(1 + \frac{M}{M'} \right) (1 + \varepsilon) = A + 2fw, \quad (14)$$

где A — константа, зависящая только от элементов движения в начале столкновения; искать ее выражение не имеет смысла.

Кроме того, у нас

$$2\omega \left(1 + \frac{M}{M'} \right) (1 + \varepsilon) = A + 2fw, \tag{14'}$$

откуда

$$\omega_1 = \frac{2\omega}{1 + \varepsilon}.$$

Как мы установили выше (см. п. 12),

$$\omega = \frac{\chi_0 - \chi'_0}{1 + \frac{M}{M'}},$$

поэтому

$$\omega_1 = \frac{2(\chi_0 - \chi'_0)}{1 + \frac{M}{M'}}. \tag{15}$$

Теперь формулы (11), (12), (13) позволят нам найти все элементы движения после столкновения.

На практике при игре в бильярд масса M' до столкновения находится в покое, так что в этом случае необходимо опустить все символы, отмеченные одновременно штрихом и индексом 0.

7. Об ударе кием по шару

14. Мы будем предполагать, что в начале удара игрок не оказывает никакого давления на кий (хотя, вообще говоря, некоторая часть игроков так делает) и что удар кием производится так, что руки, направляющие движение, не испытывают никакого толчка, а острый угол между осью кия и нормалью к точке столкновения лежит внутри угла трения¹⁷. Первое из этих условий означает, что тангенциальное взаимодействие в точке столкновения меньше, чем трение скольжения; если это не так, то кий скользит по шару, т. е. происходит *косой удар*, или *кикс*, а подобные удары никакой серьезной пользы не приносят.

Если кий расположен под углом к сукну, как мы предположили для большей общности, то одновременно возникают два удара: кия по шару и шара по сукну. Вслед за Кориолисом мы будем считать, что нормальная скорость, которую мог бы приобрести шар из-за упругости сукна, достаточно мала, чтобы мы могли ею пренебречь; для обычных ударов, когда угол наклона кия над сукном не слишком велик, это действительно верно. Таким образом, мы можем не рассматривать уравнение вертикального поступательного движения шара.

Пусть

M' обозначает массу кия, а угол i — наклонение его оси к сукну;

M — массу шара;

μ — отношение $\frac{M'}{M}$, которое обычно мало отличается от трех;

¹⁷Поскольку обычно наклейка на кие (кусочек буйволиной кожи, по форме похожий на круглую шапочку, прикрепленный к концу кия) более или менее покрыта меловой крошкой, коэффициент этого трения изменяется от 0.50 до 0.20, что соответствует углам трения от 26°34' до 11°20'.



f — коэффициент трения¹⁸ шара о сукно;

Cz, Cx — вертикаль, проведенная из центра I шара, и горизонталь, проведенная из этой же точки и лежащая в вертикальной плоскости, проходящей через прямую Cz параллельно направлению оси кия¹⁹;

a, b, c — координаты точки столкновения, параллельные осям Cx, Cy, Cz .

Пусть, кроме того, в произвольный момент столкновения

V' обозначает скорость кия;

v_x, v_y — параллельные осям Cx, Cy компоненты скорости скольжения v шара по сукну;

F — действие, производимое кием на шар;

тогда давление на сукно будет равно $F \sin i$.

Помимо этих новых обозначений, мы сохраним все те, которыми пользовались раньше. У нас есть соотношения

$$v_x = \chi - pR, \quad v_y = \eta + nR \quad (1)$$

и уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} M' \frac{dV'}{dt} = -F, \\ M \frac{d\chi}{dt} = F \left(\cos i - f \frac{v_x}{v} \cos i \right), \\ M \frac{d\eta}{dt} = -f \frac{v_y}{v} F \sin i, \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dv}{dt} = -F \left(b + f \frac{v_y}{v} R \sin i \right), \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dp}{dt} = F \left(c \cos i + f \frac{v_x}{v} R \sin i \right), \\ M \frac{R^2}{k} \frac{dq}{dt} = -bF \cos i \end{array} \right. \quad (2)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} d\chi = -\mu \left(\cos i - f \frac{v_x}{v} \sin i \right) dV', \\ d\eta = \mu f \frac{v_x}{v} \sin i dV', \\ \frac{R^2}{k} dn = \mu \left(b + f \frac{v_y}{v} R \right) \sin i dV', \\ \frac{R^2}{k} dp = \mu \left(c \cos i + f \frac{v_x}{v} R \sin i \right) dV', \\ \frac{R^2}{k} dq = \mu b \cos i dV'. \end{array} \right. \quad (3)$$

Обозначая через γ угол между скоростью скольжения v и осью Cx , получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \chi - pR = \varphi \cos \gamma, \quad v_y = \eta + nR = \varphi \sin \gamma, \\ \eta + nR = (\chi - pR) \operatorname{tg} \gamma. \end{array} \right. \quad (4)$$

¹⁸Мы уже видели, что этот коэффициент можно считать равным 0.25.

¹⁹*Прим. ред.* — Здесь Резаль рассматривает задачу при тех же предположениях, которые были сделаны Кориолисом (глава VIII): вертикальная плоскость, содержащая ось кия, может не содержать центр шара, причем ось кия наклонна к горизонту.

Мы хотим выяснить, можно ли добиться выполнения уравнений (3), считая угол γ постоянным. С этой целью подставим в соотношение

$$d\eta + Rdn = (d\chi - Rdp) \operatorname{tg} \gamma,$$

вместо содержащихся в нем дифференциалов, найденные из вышеуказанных уравнений; получаем

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{kb \operatorname{tg} i}{kc - R}, \tag{5}$$

т. е. угол γ постоянен, как мы и предполагали.

Тогда уравнения (3) можно сразу проинтегрировать и, полагая

$$\omega_1 = V'_0 - V'_1, \tag{6}$$

находим с их помощью

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1 = \mu(\cos i - f \cos \gamma \sin i)\omega_1, \\ \eta_1 = \mu f \sin \gamma \sin i \cdot \omega_1, \\ \frac{R^2 n_1}{k} = -\mu(b + fR \cos \gamma \sin i)\omega_1, \\ \frac{R^2 p_1}{k} = \mu(c \cos i + fR \cos \gamma \sin i)\omega_1, \\ \frac{R^2 q_1}{k} = -\mu b \cos i \cdot \omega_1. \end{array} \right. \tag{7}$$

Полная живая сила, потерянная после столкновения, равна

$$M'\omega_1(2V'_0 - A\omega_1), \tag{a}$$

где обозначено

$$A = 1 + \mu \left\{ (\cos i - f \cos \gamma \sin i)^2 + f^2 \sin^2 \gamma \sin^2 i + \frac{k^2}{R} [(b + fR)^2 \sin^2 i + (c \cos i + R \cos \gamma \sin i)^2 + b^2 \cos^2 i] \right\}. \tag{8}$$

Если рассмотреть скорости, потерянные шаром и кием, и умножить их на коэффициенты ε и ε' , то значения соответствующих живых сил будут равны²⁰

$$\varepsilon M'(A - 1)\omega_1^2, \tag{b}$$

$$\varepsilon' M'\omega_1^2 \tag{c}$$

соответственно.

Обозначим через ψ угол между силой F и ее проекцией на плоскость, касающуюся точки столкновения; через w — скорость скольжения шара относительно кия²¹ в момент

²⁰В пункте 5 мы видели, что можно взять $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = \frac{4}{15} = 0.27$.

²¹*Прим. ред.* — Здесь усматривается противоречие со сделанным автором в начале главы допущением об отсутствии скольжения кия по шару.



наибольшего сжатия, оцениваемую вдоль этой проекции, а через w' — скорость скольжения шара относительно сукна в этот же момент времени. С учетом первой из формул (2), получаем

$$\begin{cases} -2w \int F \cos \psi dt = 2wM' \cos \psi \omega_1, \\ 2w' \int fF \sin i dt = -2w'M' f \sin i \omega_1. \end{cases} \quad (d)$$

Поскольку величина (a) должна быть равна сумме выражений (b), (c) и (d), находим

$$2V'_0 - [A + \varepsilon(A - 1) + \varepsilon']\omega_1 = 2w \cos \psi - 2w' f \sin i. \quad (9)$$

Опустим индекс 1, чтобы охарактеризовать элементы движения, соответствующие моменту наибольшего сжатия; когда мы должны полагать, что $\varepsilon = \varepsilon' = 1$. В итоге получаем

$$2V'_0 - 2A\omega = 2w \cos \psi - 2w' f \sin i, \quad (9')$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \frac{2A\omega}{A + (A - 1)\varepsilon + \varepsilon'}. \quad (10)$$

Пусть φ — это угол между осью кия и нормалью к точке столкновения; тогда

$$\cos \varphi = -\frac{(a \cos i + c \sin i)}{R}, \quad (11)$$

и, учитывая, что в вышеупомянутый момент времени нормальные компоненты скоростей шара и кия в точке столкновения совпадают, записываем соотношение

$$V' \cos \varphi = -\left(\chi \frac{a}{R} + \eta \frac{b}{R}\right),$$

или, в силу двух первых уравнений системы (7) и уравнения (6),

$$(V'_0 - \omega) \cos \varphi = -\mu[(\cos i - f \cos \gamma \sin i)a - fb \sin \gamma \sin i] \frac{\omega}{R},$$

откуда

$$\omega = \frac{V'_0 \cos \varphi}{\cos \varphi + \frac{\mu}{R}[bf \sin \gamma \sin i - a(\cos i - f \cos \gamma \sin i)]}. \quad (12)$$

Это значение надо будет подставить в уравнение (10), и тогда уравнения (6) и (7) позволяют нам последовательно найти все элементы движения после столкновения.

В заключение отметим, что, в силу первого из уравнений системы (7), движение центра шара, параллельное оси Cx , будет прямым или попятным в зависимости от неравенства

$$\cos \gamma \neq f \cos i,$$

причем понятно, что второй случай возможен только тогда, когда кий достаточно наклонен к сукну, что согласуется с наблюдениями.