О математическом описании ударов в бильярдной игре (Комментарий к переводу статьи А. Резаля)

А. П. Иванов
Московский физико-технический институт
apivanov@orc.ru

Бильярд — одна из древнейших игр, родиной которой считают Индию или Китай, в Европе появилась в XV–XVI вв. В наши дни бильярд стал спортивной игрой, по которой проводятся многочисленные соревнования разного ранга. Его популярности способствуют телетрансляции матчей, а также компьютерные симуляторы, позволяющие играть виртуально. С другой стороны, бильярд можно рассматривать как систему твердых тел, механические параметры которых известны с высокой точностью (что регламентируется правилами игры). Это дает принципиальную возможность построения математических моделей явлений бильярдной игры, адекватно отражающих реальность. По-видимому, высококачественные модели могут служить серьезным подспорьем в подготовке спортсменов, как это стало привычным в шахматной игре.

Каждый «ход» в бильярде включает удар кием по шару (активное действие игрока), последующее движение шара по столу, его соударения с другими шарами или бортами вплоть до остановки (на столе или в лузах). Впервые подробный анализ этих явлений был проведен известным французским ученым-механиком Г. Кориолисом, книга которого [1] стала «библией» для многих поколений поклонников бильярда. Важным достоинством этой работы является сравнение теоретических результатов с наблюдениями за игрой знаменитых бильярдистов того времени. Впоследствии А. Резаль опубликовал аналогичное исследование [2], кое в чем не согласившись с Кориолисом. В связи с переводом статьи Резаля на русский язык представляется целесообразным рассмотреть вопрос о математическом описании ударов. Ниже обсуждается решение нескольких типичных задач об ударе.

Прямой удар без вращения. Данный простейший случай соударения твердых тел (двух шаров или шара со стенкой) известен в наши дни по школьным учебникам.

Два шара с массами m_1 и m_2 движутся без вращения вдоль некоторой прямой навстречу друг другу с известными скоростями v_1 и v_2. Требуется определить скорости после столкновения V_1 и V_2.

Однозначного решения этой задачи не существует; для определения двух неизвестных имеется единственное уравнение, выражающее закон сохранения количества движения,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2, \tag{1}$$

а также неравенство

$$m_1V_1^2 + m_2V_2^2 \leqslant m_1v_1^2 + m_2v_2^2,$$

выражающее невозможность увеличения кинетической энергии при ударе. В то же время все решения уравнения (1) можно описать при помощи единственного параметра $e \in [0, 1]$, полагая

$$V_2 - V_1 = -e(v_2 - v_1). \tag{2}$$

Линейная система (1), (2) имеет единственное решение, причем предельному случаю $e = 1$ соответствует абсолютно упругий удар, а случаю $e = 0$ — пластический (или абсолютно неупругий) удар. Коэффициент e называют ньютоновским коэффициентом восстановления относительной скорости при ударе. Он определяется экспериментально и зависит главным образом от материалов, из которых сделаны шары. К примеру, для стеклянных шариков Ньютон нашел $e = 15/16$. Кориолис не указал конкретного значения коэффициента восстановления, считая его близким к единице. В любом случае, этот коэффициент является одним из параметров моделей удара, для его уточнения требуется проведение экспериментов с шарами, изготовленными по современным технологиям.

Заметим, что Резаль предлагает использовать два коэффициента восстановления — для каждого тела в отдельности. Такой подход не получил дальнейшего развития, и его ценность представляется спорной.

Косой удар шара о плоскую поверхность. При косом ударе шара о массивную ($m_1 \ll m_2$) неподвижную ($v_2 = V_2 = 0$) стенку необходимо учитывать не только поступательное, но и вращательное движение. Задача об ударе ставится следующим образом.

Свободно летящий шар имеет непосредственно перед ударом о неподвижную шероховатую стенку скорость центра $\vec{v}$ и угловую скорость $\vec{\omega}$. Требуется определить скорость и угловую скорость после удара $\vec{V}$ и $\vec{\Omega}$.

Примем следующие допущения, обычные в классической теории удара:

(i) изменения координат в течение времени удара τ пренебрежимо малы;

(ii) действие обычных сил, таких как сила тяжести, при ударе не учитывается;

(iii) область контакта считается точечной.

Введем систему координат $CXYZ$ с началом в точке контакта и осью CZ, проходящей через центр шара O. Пусть $\vec{F}$ — ударная реакция плоскости, приложенная в точке C, R — радиус шара, ρ — его радиус инерции (для однородного шара $\rho = \sqrt{\frac{2}{5}}R$). Теоремы об изменении импульса и момента импульса выражаются формулами

$$m\dot{\vec{v}}(O) = \vec{F}, \quad m\rho^2\dot{\omega} = R\vec{F} \times \vec{k}, \tag{3}$$

где $\vec{k}$ — орт оси CZ. Скорость точки C определяется по формуле Эйлера

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(O) + R\vec{k} \times \vec{\omega}, \tag{4}$$

откуда при учете (3) получаем

$$m\dot{\vec{v}}(C) = \vec{F}(1 + \chi) - \chi(\vec{F}, \vec{k})\vec{k}, \quad \chi = \frac{R^2}{\rho^2} \tag{5}$$

(т. е. для однородного шара $\chi = 5/2$).

Отметим два следствия формулы (5).

1°. Изменение нормальной скорости точки контакта пропорционально нормальной составляющей реакции:

$$m(\dot{\vec{v}}(C),\,\vec{k}) = (\vec{F},\,\vec{k}).$$

Следовательно, общее изменение скорости $\Delta\vec{v}$ за время удара τ равно

$$m(\Delta\vec{v}(C),\,\vec{k}) = (\vec{I},\,\vec{k}), \quad \vec{I} = \int\limits_0^\tau \vec{F}(t)dt. \tag{6}$$

2°. Изменение касательной скорости точки контакта пропорционально касательной составляющей реакции (т. е. силе трения):

$$m\dot{\vec{v}}_t(C) = \vec{F}_t(1+\chi), \quad \vec{u}_t = \vec{u} - (\vec{u},\,\vec{k})\vec{k}.$$

Считая, что сила трения направлена противоположно скорости скольжения, придем к выводу:

направление скорости скольжения (и силы трения) в процессе удара неизменно.

В интегральной форме это свойство запишется так:

$$m\Delta\vec{v}_t(C) = \vec{I}_t(1+\chi). \tag{7}$$

Наличие данного свойства позволяет построить алгебраическое решение задачи об ударе с сухим (кулоновым) трением. При скольжении выполняется закон трения

$$\vec{F}_t = -\mu\vec{e}_t F_n, \quad \vec{e}_t = \frac{\vec{v}_t}{|\vec{v}_t|}, \tag{8}$$

где μ — коэффициент трения. Если этот коэффициент достаточно мал, то скольжение во время удара не останавливается, при этом вектор $\vec{e}_t$ остается неизменным, откуда получаем

$$\vec{I}_t = -\mu\vec{e}_t(\vec{I},\,\vec{k}). \tag{9}$$

Для решения поставленной задачи достаточно теперь определить нормальную составляющую импульса из формул (2) и (6):

$$(\vec{I},\,\vec{k}) = -(1+e)m(\vec{v}(C),\,\vec{k}), \tag{10}$$

а затем его касательную составляющую по формуле (9). Найденное значение подставляем в интегральную версию системы (3):

$$m(\vec{V}(O) - \vec{v}(O)) = \vec{I}, \quad m\rho^2(\vec{\Omega} - \vec{\omega}) = R\vec{I}\times\vec{k}. \tag{11}$$

Аналогичные формулы были получены Кориолисом в более общей задаче о косом ударе шаров с учетом трения.

Заметим, что формулы (11) справедливы лишь для достаточно малых значений коэффициента трения, что обеспечивает сохранение скольжения при ударе. Для проверки выполнения этого требования достаточно подставить значения $\vec{V}(O)$ и $\vec{\Omega}$ в формулу (4) и найти касательную составляющую $\vec{V}_t(C)$. Если этот вектор окажется направленным противоположно $\vec{v}_t(C)$, то формулу (9) следует изменить, подставляя в нее вместо μ значение $\mu' < \mu$. Это значение можно определить из формул (11), полагая $\vec{V}_t(C) = 0$. Данное правило следует из общих закономерностей удара с трением [3–5], так как в рассматриваемом случае скольжение после остановки не возобновляется.

Удар шара о борт. Следующий случай соударения в бильярде принципиально отличается от предыдущего наличием дополнительной точки контакта C' между шаром и столом (рис. 1).

Движущийся по столу шар имеет непосредственно перед ударом о неподвижную шероховатую стенку скорость центра $\vec{v}$ и угловую скорость $\vec{\omega}$. Требуется определить скорость и угловую скорость после удара $\vec{V}$ и $\vec{\Omega}$.

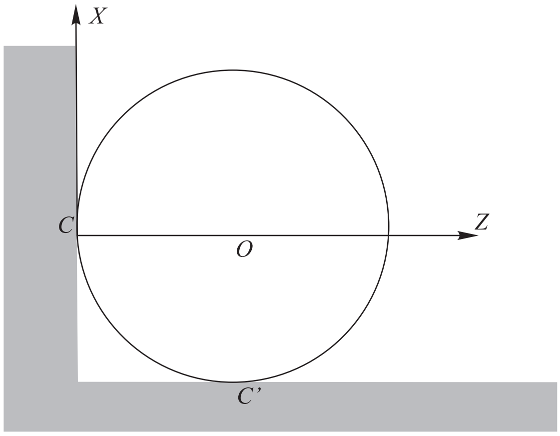

Рис. 1

Известно [6], что для описания такого «стесненного» удара требуется принять некоторые дополнительные гипотезы. В частности, Кориолис предположил, что направление скорости скольжения в точке C не изменяется, как в случае свободного соударения. Роль дополнительной связи сводится, по его мнению, к гашению вертикальной составляющей скорости центра шара O сразу после удара о борт. В этой модели борт и стол действуют на шар поочередно.

По мнению Резаля, вертикальная составляющая скорости точки O при ударе остается равной нулю. Такое предположение противоречит вышеупомянутой гипотезе Кориолиса: направление скорости скольжения в точке C изменяется. Решение задачи об ударе уже не является алгебраическим, а требует интегрирования. Недостаток такого решения состоит в том, что фактически односторонняя связь рассматривается как двусторонняя.

Уточним решения Кориолиса и Резаля с учетом одностороннего характера связи между шаром и столом. Будем считать точку C зафиксированной на борту и направим ось CX вертикально вверх, ось CZ — горизонтально через центр шара (см. рис. 1), ось CY дополняет до правой тройки. Примем за x, y, z координаты центра шара; система подчинена односторонней связи

$$x \geqslant 0, \tag{12}$$

где знак равенства соответствует наличию контакта между шаром и столом (в точке C'), а знак неравенства — подскоку шара. Для учета связи в уравнениях удара (3) следует добавить ее реакцию, приложенную в точке C:

$$m\dot{\vec{v}}(O) = \vec{F} + \vec{F}', \quad m\rho^2\dot{\omega} = R(\vec{F} \times \vec{k} + \vec{F}' \times \vec{i}), \quad \vec{v}(O) = (\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}). \tag{13}$$

Если бы трение между шаром и бортом, а также между шаром и столом отсутствовало, то векторы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ были бы коллинеарны ортам $\vec{k}$ и $\vec{i}$ соответственно. В этом случае правая часть второго уравнения (13) равна нулю, т. е. угловая скорость при ударе неизменна. Первое векторное уравнение распадается в проекциях на координатные оси на три независимых соотношения. Применяя закон восстановления (2), получим в итоге

$$\dot{X} = \dot{x} = 0, \quad \dot{Y} = \dot{y}, \quad \dot{Z} = -e\dot{z}, \quad V = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}). \tag{14}$$

В реальных бильярдах трение довольно значительно: в формуле (8), выражающей закон Кулона, согласно экспериментам Кориолиса, $\mu = 0.2$ (между шаром и бортом) и $\mu' = 0.25$ (между шаром и столом). Учет этого обстоятельства не позволяет в общем случае построить алгебраическое решение задачи об ударе на основе формул (2) и (9). Грубо говоря, такое решение возможно в 50 % случаев в зависимости от знака вертикальной составляющей скорости точки контакта $\dot{x}(C)$ в начале удара.

Допустим, что $\dot{x}(C) \leqslant 0$. Тогда систему (13) можно удовлетворить, полагая $\vec{F}' \equiv 0$: согласно (8), вертикальная компонента силы $\vec{F}$ положительна, и наличие односторонней связи (3.1) не влияет на процесс удара. Следовательно, решение задачи об ударе ничем не отличается от рассмотренного в разделе 2 случая свободного удара. В этой части вывод Кориолиса о неизменности направления скорости скольжения справедлив, а возражение Резаля — нет. Отметим, что к этому случаю относятся такие движения шара, для которых

$$|\dot{z}(C')| \geqslant |\dot{z}|, \tag{15}$$

т. е. шару сообщено «попутное» вращение.

В случае противоположного знака неравенства (15) (шар движется к борту после удара кием «с оттяжкой») имеем $\dot{x}(C) > 0$. Если бы связи (12) не было, то центр шара приобрел бы под действием реакции борта $\vec{F}$ скорость с отрицательной вертикальной компонентой. Следовательно, $\vec{F}' \neq 0$. Для решения поставленной задачи сделаем следующее предположение.

Материал, из которого сделан борт, имеет намного меньшую жесткость по сравнению с шаром и столом.

Для реальных бильярдных столов эта гипотеза справедлива, так как накладки для бортов изготавливают из резины, шары — из слоновой кости или жесткой пластмассы, столы — из сланцев или мраморной плиты.

Сделанное предположение позволяет пренебречь деформациями в окрестности точки C' и считать, что $\dot{x} = 0$ до тех пор, пока $(\vec{F}, \vec{i}) < 0$. Если показать, что последнее неравенство выполняется в ходе всего удара, то мы получим решение Резаля. Для проверки этого свойства продифференцируем формулу (4) с учетом (13):

$$m\dot{\vec{v}}(C) = \vec{F}(1+\chi) - \chi(\vec{F}, \vec{k})\vec{k} + \vec{F}' - \chi(\vec{F}', \vec{k})\vec{i}. \tag{16}$$

Из первого уравнения (13) следует

$$(\vec{F}' + \vec{F}, \vec{i}) = 0, \tag{17}$$

а касательная составляющая реакции стола описывается законом, аналогичным (8):

$$\vec{F}'_t = -\mu'\vec{e}'_t(\vec{F}', \vec{i}), \quad \vec{e}'_t = \frac{\vec{v}'_t}{|\vec{v}'_t|}. \tag{18}$$

Подставляя формулы (17) и (18) в (16), получим

$$m(\dot{\vec{v}}(C), \vec{i}) = \chi(\vec{F}_t, \vec{i})(1 - \mu'(\vec{e}'_t, k)). \tag{19}$$

Учитывая равенство (8), а также неравенство $\mu' < 1$ (согласно Кориолису, этот коэффициент близок к 0.25), приходим к выводу: изменение вертикальной составляющей скорости в точке C имеет знак, противоположный знаку самой этой составляющей. Если в начальный момент удара эта величина была положительной, то она не может стать отрицательной (либо сохранит знак, либо обратится в нуль). Это означает, что в рассматриваемом случае (выполняется неравенство, противоположное (15)) шар при ударе не отрывается от стола.

По аналогии с (19) можно найти

$$\begin{aligned} m(\dot{\vec{v}}(C), \vec{j}) &= (1+\chi)(\vec{F}_t, \vec{j}) + \mu'(\vec{F}_t, \vec{i})(\vec{e}'_t, \vec{j}), \\ m(\dot{\vec{v}}(C), \vec{k}) &= (\vec{F}_t, \vec{k}) + \mu'(\vec{F}_t, \vec{i})(\vec{e}'_t, k). \end{aligned} \tag{20}$$

Сравнение формул (19) и (20) показывает, что направление скорости $\vec{v}(C)$ при наличии связи (12) в ходе удара переменно, даже если трение между шаром и столом пренебрежимо мало (т. е. $\mu' = 0$), что подтверждает вывод Резаля. Следовательно, в этом случае задача об ударе не может быть решена алгебраически. Систему (19), (20) следует проинтегрировать при учете граничного условия (10); при этом удобно ввести новую независимую переменную ϑ по формуле

$$\frac{d\vartheta}{dt} = (\vec{F}, \vec{k}) > 0,$$

т. е. ϑ — нормальная составляющая ударного импульса. Такое решение (в квадратурах) было получено Резалем.

Соударение двух шаров. *Движущиеся по столу шары имеют непосредственно перед ударом о неподвижную шероховатую стенку скорости центра $\vec{v}_j$ и угловые скорости $\vec{\omega}_j$. Требуется определить скорость и угловую скорость после удара $\vec{V}_j$ и $\vec{\Omega}_j$ $(j = 1, 2)$.*

При соударении двух *свободных* шаров направление относительной скорости в точке контакта не изменяется, как и при ударе свободного шара о плоскость. Аналогичный вывод справедлив и для соударения шаров на бильярдном столе, но лишь при условии, что трение между ними пренебрежимо мало: в этом случае линия действия ударной силы проходит через центры, и угловые скорости шаров неизменны.

По мнению Кориолиса, даже наличие трения между шарами не приводит к изменению скорости скольжения при ударе. К иному результату пришел Резаль, который учитывал контакты между шарами и столом как двусторонние. Ниже рассмотрим более реалистичную модель односторонних связей.

В исключительном случае, когда относительная скорость в точке контакта шаров горизонтальна, ударные реакции стола отсутствуют. При этом соударение шаров происходит как свободное, и задача имеет алгебраическое решение. Наличие вертикальной составляющей этой скорости и трения между шарами приводит к появлению в точке контакта ударной силы с ненулевой вертикальной составляющей, причем один из шаров прижимается этой силой к столу, а второй — отрывается от стола. Одновременно появляется ударная сила в точке контакта первого шара со столом, при этом на второй шар стол влияние не оказывает. Очевидно, что такое поведение не описывается моделью Резаля.

Необходимость расчета ударных сил в двух точках C и C_1 (см. рис. 2) делает аналитическое решение задачи невозможным, что обусловлено неправомерностью допущения о существенной разнице контактных жесткостей в точках C и C_1.

Действительно, в точке C деформируется два шара, и возникающая упругая сила складывается из двух симметричных составляющих. В точке C_1 деформируются шар и стол, поэтому упругие свойства данной контактной пары не имеют существенного отличия от

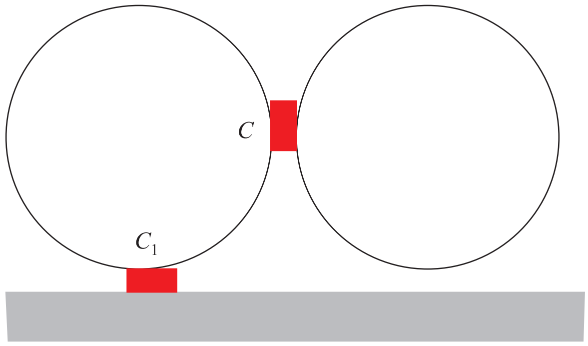

Рис. 2. Дискретная модель стесненного удара.

контактной пары, составленной двумя шарами. Единственное исключение — случай «мягкого» стола, для которого развитие деформаций в точке C_1 происходит настолько медленно, что удар в точке C заканчивается ранее, чем ударные силы в точке C_1 становятся заметными. В пользу такого допущения может служить малость коэффициента трения между шарами (по Кориолису, он равен 0.03) и наличие сукна на столе. При таком предположении наличием стола при ударе можно пренебречь, т. е. рассматривать удар как свободный. Такое решение, основанное на коэффициентах трения и восстановления, было получено Кориолисом.

В общем случае требуется численное интегрирование при фактических данных. Заметим, что результаты такого интегрирования могут изменяться в широком диапазоне в зависимости от характеристик деформируемых элементов. Примером может служить численное исследование задачи о коллинеарном ударе трех шаров [7].

Удар кием по шару. При нанесении удара кием игрок выбирает точку на шаре, устанавливает направление кия и рассчитывает силу удара. Его задача состоит в сообщении неподвижному шару такого движения, которое позволило бы достичь целей игры (забить чужой шар, «спрятать» свой шар, сделать карамболь и т. д.). Опытный игрок контролирует положение кия в процессе удара и не допускает проскальзывания наклейки кия по поверхности шара. Следовательно, можно считать, что к шару прикладывается заданный удар, т. е. в уравнениях (3) направление силы $\vec{F}$ неизменно, а ее импульс (6) известен. Если других ударных сил нет, то уравнения импульсивного движения шара можно получить по аналогии с (6), интегрируя формулы (3) по промежутку удара:

$$m\Delta\vec{v}(O) = \vec{I}, \quad m\rho^2\Delta\omega = \vec{r}\times\vec{I}, \quad \vec{r} = OC, \tag{21}$$

где C — точка приложения удара к шару.

Соотношения, аналогичные (21), были получены Кориолисом для удара горизонтальным кием. На практике кий располагается под углом к горизонту, так как высота бортов превышает радиус шара. При этом импульс $\vec{I}$ имеет вертикальную составляющую, направленную вниз, что вызывает реакцию стола. При обычном ударе кий «сопровождает» шар, а отрыва последнего от стола не наблюдается.

Особый случай представляет собой обводящий удар «массэ», цель которого состоит в придании шару сильного вращения с наклонной осью, что приводит к его движению по дугообразной траектории. Такие удары часто используют в снукере, и на замедленном повторе видеосъемки хорошо видно, что шар после удара подскакивает над столом. В отличие от обычного удара, массэ выполняют быстрым отрывистым движением кия; простейшая модель этого удара — совокупность двух последовательных соударений: кия с шаром и шара со столом. В каждом из двух предельных случаев: ударе горизонтальным кием и массэ — задача об ударе допускает алгебраическое решение, а в промежуточных случаях такое решение может оказаться слишком грубым, что свидетельствует о необходимости численного интегрирования. Интересно отметить, что после удара «массэ» шар может совершить серию перелетов и ударов о стол, теоретически бесконечную. Решение задачи о расчете ударного импульса при помощи вспомогательных переменных получено в [8].

Заметим, что для описания удара кием по шару Кориолис и Резаль использовали также модель, основанную на уравнениях удара свободных двух твердых тел. По-видимому, область применения такой модели ограничена экспериментом, проведенным Кориолисом: подвешенный на двух нитях кий совершает маятниковое поступательное движение и ударяет по неподвижному шару. В процессе игры бильярдист управляет кием при помощи обеих рук, стремясь достигнуть желаемого направления и силы удара.

Заключение. В бильярдной игре удары являются единственным средством для достижения тактических целей, причем правильный расчет требует учета физических свойств всех аксессуаров: кия, шаров, бортов и плиты стола. Имеется два простых случая: соударение двух свободных шаров и удар свободного шара о неподвижную плоскость, — в которых задача об ударе имеет алгебраическое решение, основанное на коэффициенте восстановления и коэффициенте трения. Вопрос в том, можно ли использовать аналогичный подход для описания ударов в бильярде?

Кориолис ответил на этот вопрос положительно в отношении удара шара о борт, а также соударения двух шаров, находящихся на бильярдном столе (с учетом трения между шарами). Резаль в своей статье подверг критике эти выводы и предложил решения таких задач в виде квадратур.

Как показано выше, в отношении удара шара о борт оба ученых правы лишь наполовину: в зависимости от начальной угловой скорости шара следует применять либо решение Кориолиса, либо решение Резаля. Отметим, что различие между этими решениями весьма существенно и может достигать 25 % (величина коэффициента трения между столом и шаром).

Что касается удара двух шаров, находящихся на столе, то ни одно из известных решений этой задачи не представляется обоснованным. Реалистичная модель такого соударения должна учитывать упругие свойства тел (шары и стол). Отметим, что «цена вопроса» здесь не превышает 3 % (величина коэффициента трения между шарами), поэтому в качестве грубого приближения можно использовать простейшее решение Кориолиса.

Удары кием по шару наиболее сложны для описания, так как техника их нанесения вариативна. Алгебраическое решение возможно лишь в идеальном случае, когда кий горизонтален. Для удара наклонным кием Кориолис и Резаль построили аналогичные решения в квадратурах. Погрешность этих решений возрастает с увеличением угла наклона кия к горизонту, что приводит к подскокам шара при ударе. При этом реалистичная модель должна учитывать упругие свойства шара, наклейки кия и стола.

Список литературы

[1] Coriolis G.-G. Théorie mathématique des effets du jeu billard. Paris: Carilian-Goeury, 1835. 174 p. [Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехтеориздат, 1956. 236 с.]

[2] Resal H. Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard // J. Math. Pures Appl. (Sér. 3), 1883, vol. 9, pp. 65–98 [Резаль А. Комментарии к математической теории явлений бильярдной игры // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 415–438.

[3] Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: P. II. London: Macmillan, 1884 [Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х т. М.: Наука, 1983. 464 с., 544 с.].

[4] Darboux G. Note XXI: Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps // Despeyrous T. Cours de mécanique; (avec des notes par m. G. Darboux): T. II. Paris, 1884. P. 547–581 [Дарбу Г. Геометрическое исследование ударов и столкновений тел // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 387–413].

[5] Болотов Е. А. Об ударе двух тел при действии трения // Изв. Моск. инж. училища, 1908, ч. 2, вып. 2, с. 43–55.

[6] Иванов А. П. К задаче о стесненном ударе // ПММ, 1997, т. 61, вып. 3, с. 355–358.

[7] Войнов А. Е., Иванов А. П., Романова Н. Н. Исследование тройного коллинеарного удара // Изв. РАН. МТТ, 2002, вып. 5, с. 15–20.

[8] Иванов А. П. Единая форма уравнений движения тяжелого твердого тела не ниже горизонтальной плоскости // Изв. РАН. МТТ, 1993, вып. 3.