

Динамическая адвекция

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, С. М. Рамоданов

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru, ramodanov@mail.ru

Получено 4 декабря 2009 г.

В работе введено новое понятие *динамической адвекции*, описывающее динамику пассивной массивной примеси в плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. В отличие от стандартной модели адвекции, рассматриваемой в большинстве современных работ, уравнения движения затрагивают не только кинематический аспект движения примеси (движение которой определяется уравнениями Эйлера), но и ее динамическое поведение. Рассмотрен ряд простейших модельных задач.

Ключевые слова: адвекция, перемешивание, точечный вихрь, крупнозернистая примесь, бифуркационный комплекс

A. V. Borisov, I. S. Mamaev, S. M. Ramodanov

Dynamic advection

A new concept of *dynamic advection* is introduced. The model of dynamic advection deals with the motion of massive particles in a 2D flow of an ideal incompressible liquid. Unlike the standard advection problem, which is widely treated in the modern literature, our equations of motion account not only for particles' kinematics, governed by the Euler equations, but also for their dynamics (which is obviously neglected if the mass of particles is taken to be zero). A few simple model problems are considered.

Keywords: advection, mixing, point vortex, coarse-grained impurities, bifurcation complex
MSC 2010: 76M23, 76B47, 70Exx, 70Hxx



1. Введение

Под *задачей адвекции* традиционно понимается изучение движения в жидкости легких частиц (примесей), пренебрежительно малых размеров и массы. Предполагается, что частица приобретает скорость окружающего потока, и потому уравнения движения частицы могут быть записаны в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где \mathbf{r} — координата частицы, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость жидкости, которая считается известной. В частном случае плоскопараллельного ($n = 2$) течения несжимаемой жидкости уравнения (1.1) представляют собой гамильтонову систему с полутора степенями свободы:

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (1.2)$$

где $\psi(x, y, t)$ — функция тока, а $\mathbf{r} = (x, y)$ — координаты частицы.

Термин *адвекция*, обозначающий явление смешивания и перемешивания, известен достаточно давно. Однако указание на необходимость изучения именно хаотических режимов, описываемых (1.1), (1.2) (а не поиск интегрируемых случаев), приведшее к созданию и развитию концепции *хаотической адвекции*, было дано Х. Арефом, среди трудов которого, посвященных этой тематике, отметим основополагающую работу [4], в которой термин *хаотическая адвекция* и был впервые введен. Исследование хаотической адвекции имеет большое значение для задач перемешивания жидкостей (в микро- и планетарных масштабах), теории плазмы, разработки жидкостных устройств для обработки материалов. Об этом подробно рассказывается в широкой по охвату статье [3]; упомянем в этой связи также и недавнюю более прикладную работу [1], а также [11]. Отметим, что хаотическую адвекцию называют иногда *лагранжевой турбулентностью*.

Недостатком подхода к изучению движения примесей на основе уравнений (1.1), (1.2) является предположение о несущественности массы, увлекаемой потоком частицы. В настоящей работе, на основе результатов [10, 7], представлены уравнения движения частицы ненулевой массы под действием нескольких точечных вихрей, которые могут служить простейшими моделями перемешивающих устройств (см., например, [5]). Динамику этих частиц мы и называем *динамической адвекцией*. В плане приложений можно сказать, что обычная адвекция описывает поведение растворимых или мелкодисперсных примесей, а динамическая — более крупнозернистых и нерастворимых.

2. Уравнения движения массивной частицы в поле точечных вихрей

2.1. Уравнения движения кругового цилиндра, взаимодействующего с точечными вихрями

Рассмотрим задачу о движении n точечных вихрей с интенсивностями Γ_i , взаимодействующих с круговым цилиндром радиуса R и массы m , в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, имеющей всюду (кроме точечных вихрей) нулевую завихренность и покоящейся на бесконечности.



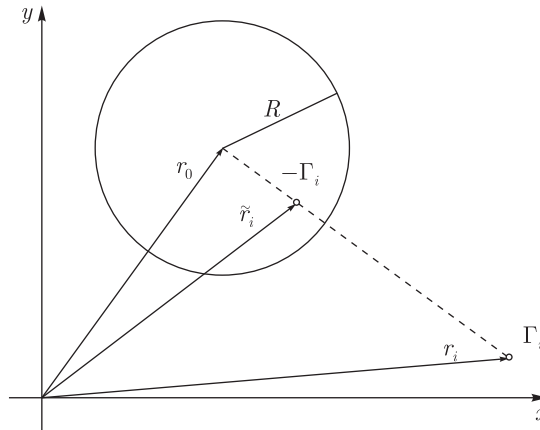


Рис. 1.

Уравнения движения цилиндра и вихрей имеют вид [10, 7]

$$a\ddot{x}_0 = \sum_{i=1}^n \Gamma_i (\dot{y}_i - \dot{y}_0) - \tilde{\Gamma} \dot{y}_0, \quad a\dot{y}_0 = - \sum_{i=1}^n \Gamma_i (\dot{x}_i - \dot{x}_0) + \tilde{\Gamma} \dot{x}_0, \tag{2.1}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \text{grad } \tilde{\varphi}_i(\mathbf{r}).$$

Постоянный коэффициент $a = m + \pi R^2$ включает в себя массу и присоединенную массу цилиндра, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — радиус-векторы центра цилиндра и i -го вихря относительно начала неподвижной декартовой системы координат, $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_0 + \frac{R^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)$ — радиус-вектор инверсного образа i -го вихря. Функция $\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})$ представляет собой потенциал течения вне цилиндра $\varphi(\mathbf{r})$ с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$.

Согласно принципу суперпозиции потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ представим в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varphi_c(\mathbf{r}) + \varphi_v(\mathbf{r}).$$

Потенциал

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = - \frac{R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$$

определяет течение, вызванное движением цилиндра со скоростью $\mathbf{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$. Течение $\varphi_v(\mathbf{r})$, порожденное точечными вихрями, получается размещением вихрей интенсивности $(-\Gamma_i)$ в инверсно-симметричные точки $\tilde{\mathbf{r}}_i$ (рис. 1), так что

$$\varphi_v(\mathbf{r}) = - \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i}{2\pi} \left(\text{arctg} \frac{y - \tilde{y}_i}{x - \tilde{x}_i} - \text{arctg} \frac{y - y_i}{x - x_i} \right).$$

Циркуляция жидкости вокруг цилиндра равна $-\sum_{i=1}^n \Gamma_i + \tilde{\Gamma}$. Величина $-\sum_{i=1}^n \Gamma_i$ обусловлена, как отмечалось, наличием внутри цилиндра инверсных образов вихрей с интенсивностями $(-\Gamma_i)$. Константа $\tilde{\Gamma}$ (собственная циркуляция), вообще говоря, произвольна; она определяет чисто циркуляционное обтекание цилиндра, задаваемое функцией

$$\varphi_c(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi} \text{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$



2.2. Уравнения движения примеси

Чтобы из уравнений движений цилиндра получить уравнения движения малой массивной частицы, следует устремить к нулю радиус цилиндра и его массу, сохраняя при этом постоянной его плотность. Для этого выполним в (2.1) замену

$$m \rightarrow m\varepsilon^2, \quad R \rightarrow R\varepsilon, \quad \tilde{\Gamma} \rightarrow \sum_{i=1}^n \Gamma_i + \Gamma^* \varepsilon^2, \quad (2.2)$$

а затем устремим ε к нулю, поделив предварительно первые два уравнения на ε^2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Обсудим выражение (2.2) для $\tilde{\Gamma}$. Рассмотрим, например, силу, приложенную со стороны жидкости к цилиндру, которая обусловлена чистой циркуляцией. Согласно (2.1), она представляется вектором $(-\tilde{\Gamma}\dot{y}_0, \tilde{\Gamma}\dot{x}_0)$. Очевидно, что ее компоненты могут быть существенно отличными от нуля. Устремив массу цилиндра к нулю, приходим к нереалистичному выводу, что его ускорение бесконечно. Чтобы этого избежать (т. е. чтобы правые части первых двух уравнений (2.1) стремились к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$), выражение для $\tilde{\Gamma}$ следует выбрать указанным способом.

Поясним присутствие в (2.2) слагаемого, пропорционального ε^2 . Рассмотрим цилиндр радиуса ε , вращающийся вокруг своей оси. Ясно, что в силу присутствия в реальных жидкостях вязкости, касательная составляющая скоростей частиц жидкости на границе цилиндра будет $\sim \varepsilon$. Проинтегрировав скорость по границе, получим величину, пропорциональную ε^2 . Конкретное значение коэффициента пропорциональности Γ^* должно определяться экспериментально.

В результате предельного перехода первые два уравнения (2.1), определяющие движение центра цилиндра, запишутся в виде

$$\begin{aligned} a\ddot{x}_0 &= -\dot{y}_0\Gamma^* + \frac{R^2}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^4} (x_i - x_0) + \\ &+ \frac{2R^2}{\pi} \sum_{i>j}^n \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) ((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0))_3}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \times \\ &\times \left(\frac{y_i - y_0}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^4 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|^2} - \frac{y_j - y_0}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|^4 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2} \right) \Gamma_i \Gamma_j - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma^* \Gamma_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2} (x_i - x_0), \\ a\ddot{y}_0 &= \dot{x}_0\Gamma^* + \frac{R^2}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^4} (y_i - y_0) + \\ &+ \frac{2R^2}{\pi} \sum_{i>j}^n \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) ((\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0))_3}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \times \\ &\times \left(\frac{x_j - x_0}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|^4 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2} - \frac{x_i - x_0}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^4 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|^2} \right) \Gamma_i \Gamma_j - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma^* \Gamma_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|^2} (y_i - y_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

При этом потенциал φ_0 обращается в нуль, а сумма $\varphi_c(\mathbf{r}) + \varphi_v(\mathbf{r})$ в пределе дает выражение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_i}{x - x_i},$$



представляющее собой потенциал течения от n точечных вихрей. Следовательно, движение вихрей происходит теперь независимо от движения частицы и описывается обычными уравнениями Кирхгофа.

Уравнения движения частицы (2.3) представимы в виде

$$a\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_0}, \quad V = \Gamma^*(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0) + \Phi,$$

$$\Phi = -\frac{R^2}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i^2}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^2} - \frac{\Gamma^*}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i| - \frac{R^2}{\pi} \sum_{i<j} \Gamma_i \Gamma_j \frac{[(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)]^2}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^2 |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|^2 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2},$$
(2.4)

и, следовательно, могут быть записаны в лагранжевой форме

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}\right)' - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_0} = 0, \quad L = \frac{a}{2} \dot{\mathbf{r}}_0^2 - \frac{\Gamma^*}{2} (x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0) - \Phi.$$

Выполним преобразование Лежандра этой системы по скоростям $\dot{\mathbf{r}}_0$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} = a\dot{x}_0 + \frac{\Gamma^*}{2} y_0, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} = a\dot{y}_0 - \frac{\Gamma^*}{2} x_0,$$

$$H = p_x \dot{x}_0 + p_y \dot{y}_0 - L = \frac{1}{2a} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{\Gamma^*}{2a} (p_x y_0 - p_y x_0) + \frac{\Gamma^{*2}}{8a} (x_0^2 + y_0^2) + \Phi. \quad (2.5)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Движения малой массивной частицы с координатами (x_0, y_0) под действием n точечных вихрей (движение которых $\mathbf{r}_i(t)$ предполагается известным) описывается гамильтоновой системой

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x_0}, \quad \dot{y}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y_0}, \quad (2.6)$$

где гамильтониан задается соотношением (2.5).

В общем случае гамильтониан (2.5) явно зависит от времени, поэтому уравнения (2.6) описывают систему с $2^{1/2}$ степенями свободы, в то время как в случае обычной адвекции задана система с $1^{1/2}$ степенями свободы.

Отметим, что полагая в (2.3) $m = 0$ и $R = 0$, получаем уравнения типа (1.1), (1.2), описывающие движение частицы жидкости нулевой массы с координатами (x_0, y_0) под действием точечных вихрей (то есть приходим к традиционной задаче адвекции). Если же считать $R = 0$, $m \neq 0$, приходим к модели массовых вихрей [8, 2].

Рассмотрим частные случаи $n = 1, 2$; различные траектории частиц в аналогичном случае в традиционной задаче адвекции (см., например, [11]).

3. Динамическая адвекция в поле одного и двух вихрей

3.1. Случай одного вихря

Движение частицы под действием единственного вихря интенсивности Γ , помещенного в начало координат, описывается, согласно (2.4), уравнениями

$$a\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_0}, \quad V = \Gamma^*(\dot{y}_0 x_0 - \dot{x}_0 y_0) - \frac{R^2 \Gamma^2}{4\pi(x_0^2 + y_0^2)} - \frac{\Gamma \Gamma^*}{4\pi} \ln(x_0^2 + y_0^2). \quad (3.1)$$

Отметим, что при $\Gamma^* = 0$ уравнения (3.1) описывают движение массивной частицы в центральном силовом поле с потенциалом Якоби $V(|\mathbf{r}|) \sim \frac{1}{r^2}$. Такие потенциалы систематически рассмотрены в недавней работе [6].

В результате замены $x_0 + iy_0 = (w_1 + iw_2)e^{i(\Gamma^*/2a)t}$ уравнения (3.1) примут вид

$$\ddot{w} = -\frac{\partial U}{\partial w} = -\left(\frac{\partial U}{\partial w_1} + i\frac{\partial U}{\partial w_2}\right), \quad U = \frac{\Gamma^{*2}}{8a^2}r^2 - \frac{\Gamma\Gamma^*}{4\pi a}\ln r^2 - \frac{R^2\Gamma^2}{4\pi a}\frac{1}{r^2}, \quad r^2 = w_1^2 + w_2^2. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что динамика частицы зависит существенным образом от знака произведения $\Gamma\Gamma^*$. В дальнейшем считаем, что $\Gamma > 0$. При $\Gamma^* \neq 0$ система (3.2) заменой

$$w \rightarrow kw, \quad t \rightarrow \Omega t, \\ k^2 = R^2\frac{|\Gamma^*|}{\Gamma}, \quad \Omega = R\frac{\sqrt{2\pi a}}{\Gamma^*} \quad (3.3)$$

приводится к виду

$$\ddot{w} = -\frac{\partial U}{\partial w}, \quad U = \frac{\varrho^2 r^2}{8} - \frac{\text{sign } \Gamma^*}{2}\ln r^2 - \frac{1}{2r^2}, \quad \varrho^2 = 2\frac{\pi R^2}{a}. \quad (3.4)$$

Коэффициент ϱ , который назовем *приведенной плотностью*, удовлетворяет неравенству

$$0 < \varrho^2 \leq 2. \quad (3.5)$$

Система (3.4), как хорошо известно, обладает интегралами энергии и момента

$$H = \frac{\dot{w}_1^2}{2} + \frac{\dot{w}_2^2}{2} + U = h, \quad F = w_1\dot{w}_2 - w_2\dot{w}_1 = c, \quad (3.6)$$

а потому является интегрируемой.

Критические периодические решения и их устойчивость. Первые интегралы (3.6) задают отображение Φ (отображение момента) фазового пространства $M^4 = (w_1, w_2, \dot{w}_1, \dot{w}_2)$ на плоскость первых интегралов (c, h) . Критическим точкам отображения Φ , как известно, соответствуют периодические решения и неподвижные точки; их устойчивость мы исследуем, следуя методам, развитым в работе [12]. Напомним, что бифуркационной диаграммой интегрируемой системы называют изображенную на плоскости (c, h) область возможных движений $\Phi(M^4)$ совместно с образом критических точек отображения Φ (т. е. тех точек, где градиенты H и F зависимы).

В нашем случае критические точки отображения Φ определяются условиями $\dot{w}_1^2 + \dot{w}_2^2 = 0$, $\frac{\partial U_c}{\partial r} = 0$, где $U_c = U + \frac{c^2}{2r^2}$ — приведенный потенциал.

Таким образом, при $\Gamma^* \neq 0$ из условия $\frac{\partial U_c}{\partial r} = 0$ получаем уравнения бифуркационных кривых в параметрической форме

$$h = \frac{\varrho^2}{4}r^4 - \frac{\text{sign } \Gamma^*}{2}\ln r^2 - \frac{1}{2}, \quad c^2 = 1 - r^2 + \frac{\varrho^2}{4}r^4.$$

Бифуркационные диаграммы для различных значений ϱ (с указанием вида приведенного потенциала U_c) представлены на рисунке 2. Область возможных движений указана серым,

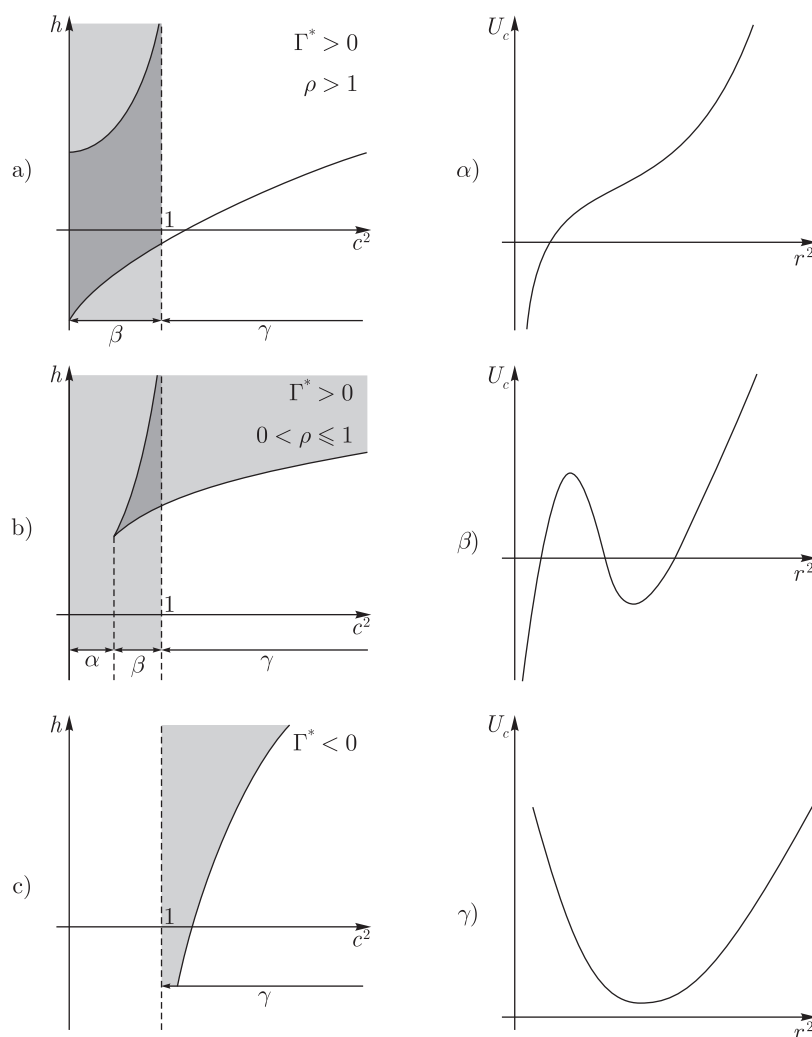


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в задаче о движении массивной частицы под действием одного вихря в случае $\Gamma^* \neq 0$. Буквами α, β, γ обозначен тип приведенного потенциала U_c для соответствующих значений постоянной площадей c .

причем более темным тоном отмечены точки, которым соответствует два инвариантных тора. Видим, что при $\Gamma^* > 0$ (циркуляция жидкости вокруг частицы и интенсивность вихря имеют один и тот же знак) динамика частицы зависит существенным образом от отношения плотности вещества частицы $\rho_{\text{ч}}$ к плотности жидкости $\rho_{\text{ж}}$, которая у нас принята равной единице. Случаям $\rho_{\text{ч}} < \rho_{\text{ж}}$ (приведенная плотность $\rho > 1$) и $\rho_{\text{ч}} \geq \rho_{\text{ж}}$ (приведенная плотность $\rho \leq 1$) отвечают рисунки 2 а и 2 б соответственно. Отметим, что здесь возможны как колебательные режимы, так и притяжение частицы вихрем. Если же знаки собственной циркуляции Γ^* и интенсивности вихря Γ различны (рис. 2 с), то частица вихрем притянута быть не может.

Бифуркационные комплексы [12], соответствующие бифуркационным диаграммам на рис. 2 а, б (для рис. 2 с комплекс тривиален, так как состоит из одного листа), приведены на рисунке 3 а, б. Вертикальная ось на этом рисунке не имеет физического смысла и используется для визуализации листов. Устойчивые критические решения, отмеченные символом «+», лежат на границе комплекса, а неустойчивые («-») — внутри него [12].

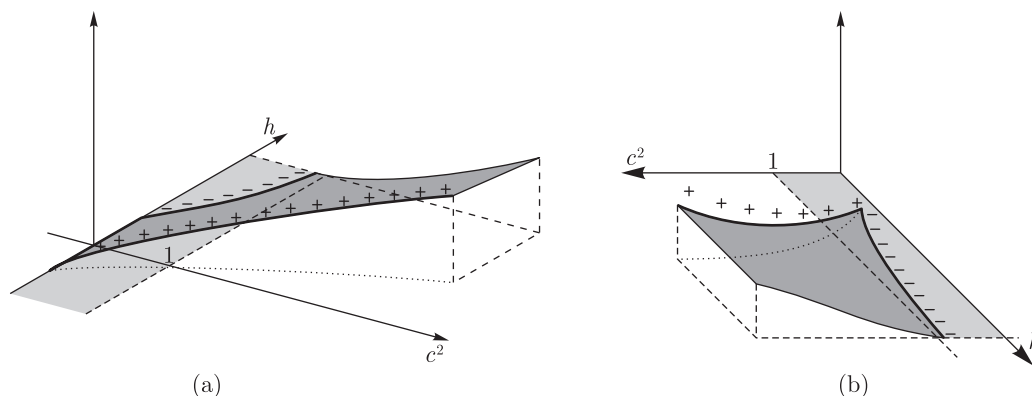


Рис. 3. Бифуркационный комплекс в задаче о движении массивной частицы в поле одного вихря: (a) $\rho > 1$, (b) $0 < \rho \leq 1$. Символом «+» («-») отмечены устойчивые (неустойчивые) критические периодические решения.

3.2. Случай двух вихрей

$\Gamma_1 = -\Gamma_2$. Пусть частица движется под действием вихрей с интенсивностями $-\Gamma$ и $+\Gamma$, то есть вихревой пары. Сами вихри движутся поступательно с постоянной скоростью, перпендикулярной к прямой, их соединяющей (см., например, [9]). Рассмотрим систему координат, движущуюся вместе с вихрями, в которой их координаты постоянны и равны $(-x, 0)$ и $(x, 0)$, $x > 0$. Уравнения движения частицы в подвижной системе координат запишутся в виде (2.6) с гамильтонианом (2.5), в котором следует положить

$$\Phi = -\frac{R^2\Gamma^2}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{4y_0^2}{r_1^2 r_2^2} \right) + \frac{\Gamma\Gamma^*}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + \Gamma^* v x_0,$$

$$r_1^2 = (x + x_0)^2 + y_0^2, \quad r_2^2 = (x - x_0)^2 + y_0^2,$$

где $v = -\frac{\Gamma}{4\pi x}$ — скорость движения вихрей.

Для уменьшения числа параметров в системе выполним замену (2.2); уравнения движения примут вид

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x_0}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y_0}, \quad (3.7)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \left(p_x - \frac{\rho}{2} y_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(p_y + \frac{\rho}{2} x_0 \right)^2 + V,$$

$$V = -\frac{x_0^2 - y_0^2 + x^2}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{x_0}{2x}.$$

По-видимому, эта система является неинтегрируемой.

Стационарные решения системы (3.7) совпадают с критическими точками потенциала V , которые совместно с линиями уровня V изображены на рисунке 4 в зависимости от параметра x . Критические точки V — это или седловые точки (отмеченные крестиком), или точки локального максимума (они отмечены кружочком). В соответствующих седловым точкам V стационарных решениях (3.7) индекс квадратичной формы d^2H нечетен, и,

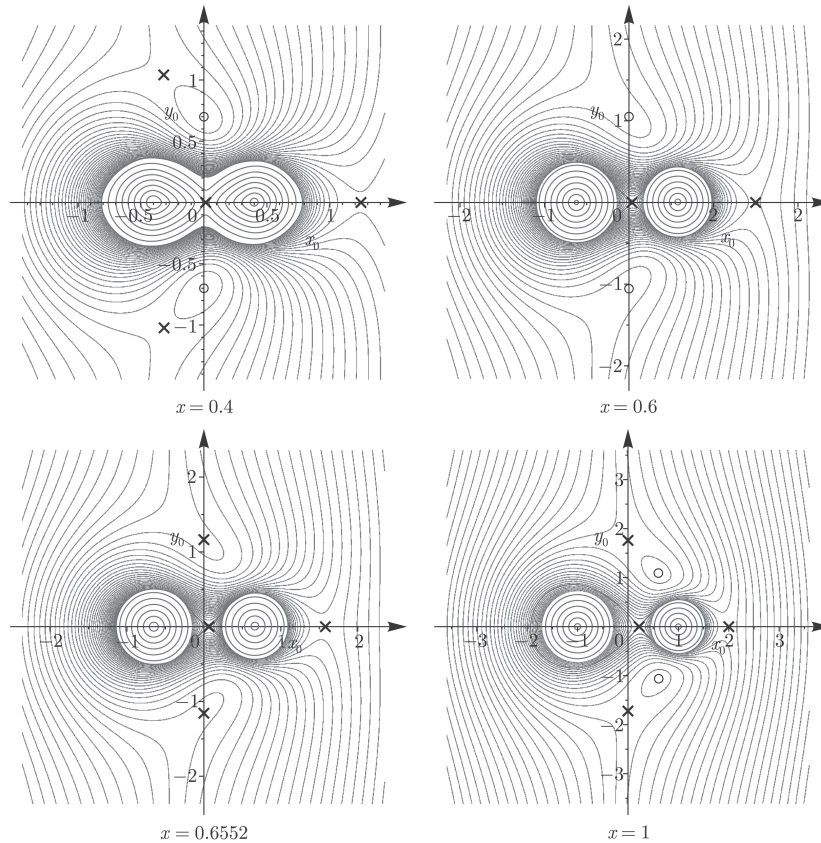


Рис. 4. Линии уровня и критические точки потенциала V в задаче о взаимодействии частицы и вихревой пары в зависимости от параметра x .

следовательно, эти решения неустойчивы. Характеристический полином линеаризованной системы (3.7) имеет вид

$$\det(\mathbf{J}d^2H - \lambda E) = \lambda^4 + a\lambda^2 + b, \quad \text{где } a = \rho^2 + \text{tr}(d^2V), \quad b = \det(d^2V).$$

Численно можно показать, что в точках локального максимума V будет выполнено $\text{tr}(d^2V) \leq -2$, а потому, в силу условия (3.5), им соответствуют неустойчивые стационарные решения типа седло-седло, либо фокус-фокус системы (3.7).

$\Gamma_1 \neq -\Gamma_2$. Как известно [9], вихри в этом случае движутся по концентрическим окружностям с постоянной угловой скоростью. Центр окружностей (так называемый *центр завихренности*) неподвижен в абсолютном пространстве, а его положение определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_c = (\Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_2 \mathbf{r}_2) / (\Gamma_1 + \Gamma_2)$; следовательно, концы векторов $\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ лежат на одной прямой.

Радиусы d_1 и d_2 окружностей и угловая скорость вращения ω определяются по формулам

$$d_1 = \frac{\Gamma_2 d}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad d_2 = \frac{\Gamma_1 d}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad \omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2},$$

где d — расстояние между вихрями.

Перейдем в подвижную систему координат, в которой координаты вихрей постоянны и равны $(d_1, 0)$ и $(d_2, 0)$ (начало координат в центре завихренности, а оси вращаются с угловой скоростью ω). Уравнения движения частицы во вращающейся системе координат



имеют вид уравнений Гамильтона (2.6) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2a}(p_x^2 + p_y^2) - \left(\frac{\Gamma^*}{2a} + \omega\right)(p_x y_0 - p_y x_0) + \frac{(\Gamma^* + 2\omega a)^2}{8a}(x_0^2 + y_0^2) - \\ - r^2 \frac{\omega^2 a - \Gamma^* \omega}{2} - \frac{R^2}{4\pi} \left(\frac{\Gamma_1^2}{r_1^2} + \frac{\Gamma_2^2}{r_2^2}\right) - \frac{\Gamma^*}{2\pi}(\Gamma_1 \ln r_1 + \Gamma_2 \ln r_2) - \frac{R^2}{\pi} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{y_0^2}{r_1^2 r_2^2}.$$

Эти уравнения, видимо, не являются интегрируемыми, хотя это не доказано, и они пока совсем не исследованы. Пользуясь аналогией с небесной механикой, можно сравнить эту задачу с плоской круговой ограниченной задачей трех тел. Последняя задача, кстати, наиболее изучена в классической небесной механике (разумеется, после интегрируемой задачи Кеплера).

Как мы видим из результатов этих исследований, динамическая адвекция описывает интересные динамические эффекты, которые не возникают в стандартной модели адвекции [4, 3]. В связи с этим было бы интересным найти их экспериментальные подтверждения в процессах перемешивания примесей.

Работа выполнена по гранту поддержки ведущих научных школ НШ-8784.2010.1, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (заявка № 2009-1.1-111-048-011), РФФИ 09-01-92504-УК, CRDF RUM1-2943-RO-09.

Список литературы

- [1] Ганиев Р. Ф., Ревизников Д. Л., Украинский Л. Е. Волновое перемешивание // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 2, с. 113–132.
- [2] Рамоданов С. М. К задаче о движении двух массовых вихрей в идеальной жидкости // Нелинейная Динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 435–443.
- [3] Aref H. The development of chaotic advection // Phys. Fluids, 2002, vol. 14, pp. 1315–1325 [Ареф Х. Развитие хаотической адвекции // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 1, с. 111–133].
- [4] Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech., 1984, vol. 143, pp. 1–21.
- [5] Aref H., Pomphrey N. Integrable and chaotic motions of four vortices // Phys. Lett. A, 1980, vol. 78, pp. 297–300.
- [6] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., Multiparticle systems: The algebra of integrals and integrable cases // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 1, pp. 18–41.
- [7] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Motion of circular cylinder and n point vortices in a perfect fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 4, pp. 449–462.
- [8] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Dynamics of two interacting circular cylinders in perfect fluid // Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, vol. 19, no. 2, pp. 235–253.
- [9] Lamb H. Hydrodynamics. 6th ed. New York: Dover, 1945. 738 p. [Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с.].
- [10] Ramodanov S. M. Motion of a circular cylinder and N point vortices in a perfect fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 3, pp. 291–298.
- [11] Aref H., Roenby J., Stremler M. A., Tophøj L. Nonlinear excursions of particles in ideal 2D flows // Phys. D, 2010 (in press).
- [12] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, вып. 2, с. 71–132.

