

## О классификации классических и полуориентируемых подков в терминах граничных точек

С. В. Гонченко<sup>1</sup>, А. С. Гонченко<sup>2</sup>, М. И. Малкин<sup>3</sup>

<sup>1</sup> НИИ прикладной математики и кибернетики  
603005, Россия, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 1

<sup>2,3</sup> Нижегородский государственный университет  
603000, Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

<sup>1</sup> gosv100@uic.nnov.ru, <sup>2</sup> agonchenko@mail.ru, <sup>3</sup> malkin@unn.ru

*Получено 15 декабря 2009 г.*

Недавно в работе [1] были обнаружены подковы Смейла новых типов, так называемые полуориентируемые подковы. Они существуют у эндоморфизмов диска и у диффеоморфизмов неориентируемых двумерных многообразий. Эти подковы обладают интересными свойствами, отличными от свойств классических подков. Например, они могут иметь граничные точки любых периодов. Отсюда можно вывести, что существует бесконечно много типов подков, которые не являются локально топологически сопряженными. Для доказательства этого и других результатов в работе эффективно используется конструктивный геометрический метод.

Ключевые слова: подкова Смейла, локальная топологическая сопряженность, гиперболическое множество, стандартное и обобщенное отображения Эно

**S. V. Gonchenko, A. S. Gonchenko, M. I. Malkin**

### **On classification of classical and half-orientable horseshoes in terms of boundary points**

Recently, Smale horseshoes of new types, the so called half-orientable horseshoes, were found in [1]. Such horseshoes may exist for endomorphisms of the disk and for diffeomorphisms of non-orientable two-dimensional manifolds as well. They have many interesting properties different from those of the classical orientable and non-orientable horseshoes. In particular, half-orientable horseshoes may have boundary points of arbitrary periods. It is shown from this fact that there are infinitely many types of such horseshoes with respect to the local topological conjugacy. To prove this and similar results, an effective geometric construction is used.

Keywords: Smale horseshoe, local topological conjugacy, hyperbolic set, standard and generalized Hénon maps

MSC 2010: 37Dxx, 37D20

## Введение

В настоящей работе мы обсуждаем некоторые проблемы, касающиеся динамических и топологических свойств подков Смейла нового типа, так называемых *полуориентируемых подков*. Такие подковы были обнаружены совсем недавно, см. [1, 2], в связи с исследованием вопросов гиперболической динамики *обобщенных отображений Эно* вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1 - y) - bx + \alpha xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

при малых значениях параметров  $b$  и  $\alpha$  и достаточно больших  $\gamma$ . Мы будем использовать аббревиатуру ГНМ (от Generalized Hénon Map) для обозначения отображения (1). Как показано в [1], ГНМ при любом фиксированном  $\gamma > 4$  и достаточно малых  $\alpha$  и  $b$  имеет так называемую *геометрическую подкову Смейла*. Последнее означает, в частности, что существует такой квадрат  $Q_\beta = [-\beta, 1 + \beta] \times [-\beta, 1 + \beta]$ , где  $\beta = \beta(\alpha, b) \rightarrow +0$  при  $(\alpha, b) \rightarrow 0$ , который под действием отображения (1) отображается в фигуру, напоминающую подкову, но, в отличие от классических подков, имеющую вырожденную точку («точку коллапса», см. рис. 6). Такая геометрия порождает существование на  $Q_\beta$  замкнутого инвариантного множества  $\Lambda = \Lambda(\alpha, b)$  — отображение (1) не имеет неблуждающих точек вне  $Q_\beta$ .

С общепринятой точки зрения, подковы Смейла считаются простейшими нетривиальными (нульмерными) гиперболическими множествами, о которых «известно все». Действительно, все они одинаковы с точки зрения  $\Omega$ -сопряженности, т. е. топологической сопряженности на множестве  $\Lambda$  неблуждающих траекторий. Множество  $\Lambda$  имеет в любой подкове (геометрическую) структуру прямого произведения двух канторовских множеств отрезка, а ограничение отображения на  $\Lambda$  сопряжено с топологической схемой Бернулли  $\mathcal{B}_2$  из двух символов. Однако если рассматривать не только траектории из  $\Lambda$ , но и близкие, т. е. изучать подковы с точки зрения *локальной топологической сопряженности*, то можно заметить, что подковы бывают разные. Даже линейных подков (см. §1) можно насчитать 10 различных типов (см. рисунки 2, 3 и утверждение 1). Шесть из них, такие как на рис. 2, могут встречаться у диффеоморфизмов плоскости. Четыре типа подков, представленные на рис. 3, могут быть у диффеоморфизмов двумерных неориентируемых многообразий или у двумерных эндоморфизмов (гладких необратимых отображений). В нелинейном случае различных подков может быть гораздо больше. Однако если рассматривать только диффеоморфизмы плоскости (точнее, диффеоморфизмы диска на себя), то дело ограничивается, по-видимому, указанными на рис. 2 шестью типами подков. Если же рассматривать эндоморфизмы или диффеоморфизмы двумерных неориентируемых многообразий, то, как было установлено в [1], в этом случае существует бесконечное множество различных подков, которые принадлежат классу так называемых *полуориентируемых подков*.

Заметим, что одним из наиболее известных и информативных топологических инвариантов нетривиальных гиперболических базисных множеств двумерных отображений является множество их *граничных точек* (см. определение 2). Как известно [3], в любом гиперболическом базисном множестве в двумерном случае граничными точками являются периодические, и их устойчивые и/или неустойчивые многообразия формируют естественные инвариантные границы гиперболического множества так, что с одной стороны от соответствующего многообразия нет точек этого множества, а с другой — есть.

В настоящей работе рассматривается задача топологической классификации подков Смейла на основе концепции граничных точек. Как сказано выше, линейные подковы будут представлены 10 различными типами (описание их граничных точек дано в утверждении 1),

тогда как соответствующая классификация для полуориентируемых гиперболических подков — счетна.

Заметим, что, в отличие от хорошо известных *ориентируемых* и *неориентируемых* подков Смейла (см. рис. 2), полуориентируемые подковы, мягко говоря, не так популярны (примеры линейных полуориентируемых подков показаны на рис. 3, а нелинейных — на рис. 6 и 11). По всей видимости, их теория начала разрабатываться в работе [1], в которой такие подковы были, собственно, и обнаружены в ГНМ.

Данная статья имеет следующую структуру. В §1 рассматриваются, в основном, линейные подковы Смейла, для которых устанавливается их полная классификация по типу граничных периодических точек (см. утверждение 1). Основное внимание в §2 уделяется вопросам гиперболической динамики ГНМ (1). Мы показываем, что она связана с существованием как обычных, ориентируемых и неориентируемых, подков, так и полуориентируемых. Области существования таких подков описаны в теореме 1 (мы воспроизводим этот результат из [1]), а также в лемме 1. Далее в §2 доказывается теорема 2 о существовании счетного множества различных, с точки зрения локальной топологической сопряженности, полуориентируемых подков. Этот факт тоже известен из [1], однако в настоящей работе мы даем совершенное другое, конструктивное доказательство. Используя эти же геометрические конструкции, мы доказываем еще один результат, теорему 3, о существовании подков, имеющих граничные точки любого натурального периода. Доказательство этой теоремы — тоже конструктивное, и, фактически, теорема 3 по форме и по доказательству — это теорема реализации.

## 1. Линейные подковы Смейла и их граничные точки

Геометрически, действие отображения  $T$  подковы выглядит весьма просто (см. рис. 1, на котором показана геометрическая конструкция в случае линейной подковы). Здесь  $T$  строится в виде композиции двух отображений  $T_1$  и  $T_2$ , т. е.  $T = T_2 T_1$ . Сначала квадрат  $Q$  под действием  $T_1$  превращается в узкий и длинный прямоугольник  $T_1(Q)$ , т. е.  $T_1$  сжимает  $Q$  в горизонтальном направлении и растягивает в вертикальном. Затем под действием отображения  $T_2$  прямоугольник  $T_1(Q)$  сгибается в форме подковы и накладывается на квадрат  $Q$  так, чтобы вершина подковы лежала вне  $Q$ . При этом геометрическая картина должна быть такой, что (см. рис. 1)

- а)  $T(Q) \cap Q$  состоит из двух компонент связности:  $T(q_1) \cap Q$  и  $T(q_2) \cap Q$ ;
- б)  $T(q_0) \cap Q = \emptyset$ ;
- в) отрезки  $[a', d'] = T([a, d])$  и  $[b', c'] = T([b, c])$  лежат вне  $Q$ .

Этих условий достаточно, если подкова *линейная*, т. е. отображения  $T_1$  и  $T_2|_{T_1(q_i)}$ ,  $i = 1, 2$ , — линейные. В общей ситуации на отображение  $T$ , кроме геометрических условий а)–в), нужно накладывать также определенные условия «сжатия и растяжения», чтобы обеспечить гиперболичность инвариантного множества

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(Q). \quad (1.1)$$

Собственно говоря, это множество  $\Lambda$  и называется *подковой Смейла* — так оно определяется, например, в [4]. Оно является локально максимальным на  $Q$  равномерно гиперболическим инвариантным множеством, которое к тому же нульмерно и гомеоморфно прямому

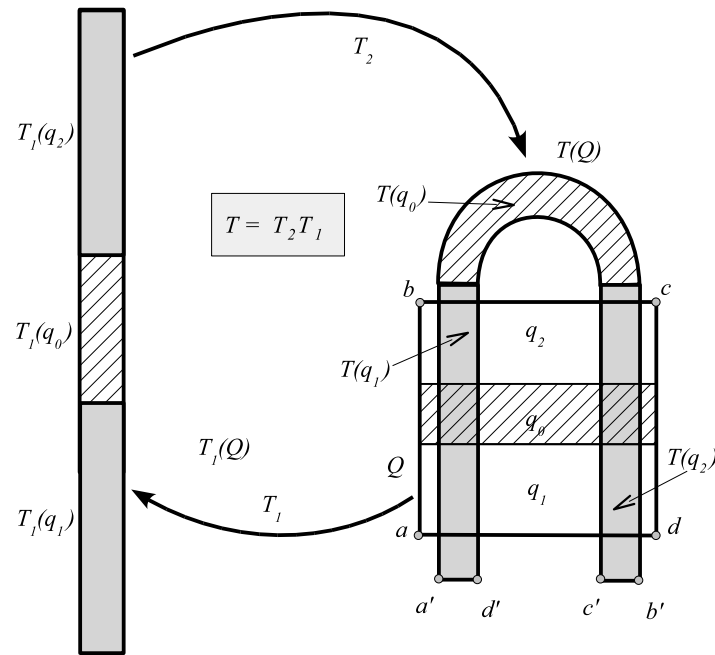


Рис. 1. Геометрическая конструкция линейной подковы Смейла.

произведению двух канторовских множеств интервала. Более того, для любой подковы соответствующая ей динамическая система  $T|_{\Lambda}$  сопряжена с топологической схемой Бернулли  $\mathcal{B}_2$  из двух символов. Последний факт, вместе с гиперболичностью  $\Lambda$ , можно рассматривать, в принципе, в качестве определения подковы. Поэтому можно сказать, что все подковы одинаковы с точки зрения такого отношения эквивалентности, как  $\Omega$ -сопряженность, т. е. топологическая сопряженность на неблуждающем множестве.

Однако если рассматривать более сильные отношения эквивалентности, то с их помощью уже можно различать подковы Смейла. Одним из наиболее хорошо известных типов отношений эквивалентности в теории динамических систем является так называемая *локальная топологическая эквивалентность (сопряженность)*.

**Определение 1.** Пусть даны два отображения  $T$  и  $T'$ , которые имеют замкнутые инвариантные множества  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  соответственно. Тогда  $T$  и  $T'$  *локально топологически сопряжены* (на  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ ), если для любых окрестностей  $V(\Lambda)$  и  $V'(\Lambda')$  существуют такие их подокрестности  $U \subset V$  и  $U' \subset V'$ , а также гомеоморфизм  $\tilde{h}: U \rightarrow U'$ , что  $\tilde{h}(\Lambda) = \Lambda'$  и следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U(\Lambda) & \xrightarrow{T} & U(\Lambda) \\ \downarrow \tilde{h} & & \downarrow \tilde{h} \\ U'(\Lambda') & \xrightarrow{T'} & U'(\Lambda') \end{array} \quad (1.2)$$

коммутативна.

Таким образом, гомеоморфизм  $\tilde{h}$  переводит не только траектории системы  $T|_{\Lambda}$  в траектории системы  $T'|_{\Lambda'}$ , но также и все близкие траектории (точнее, части траекторий, принадлежащие соответствующим окрестностям  $U$  и  $U'$ ).

Очевидно, локальная топологическая сопряженность влечет  $\Omega$ -сопряженность. Обратное, вообще говоря, не верно даже в случае простейших гиперболических множеств, какими являются подковы Смейла. Даже линейных подков существует несколько различных типов<sup>1</sup>. Более того, здесь можно указать очень простые инварианты локальной топологической сопряженности. Например, такие как знаки мультипликаторов неподвижных точек подковы. Отметим, что любая подкова содержит ровно две неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ . Для определенности, можно считать, что  $O_1 \in q_1, O_2 \in q_2$ , т. е. точке  $O_1$  отвечает последовательность  $(\dots, 0, \dots, 0, \dots)$ , а точке  $O_2$  — последовательность  $(\dots, 1, \dots, 1, \dots)$  схемы Бернулли  $\mathcal{B}_2$ . Используя только это, мы можем легко представить 10 различных типов линейных подков Смейла.

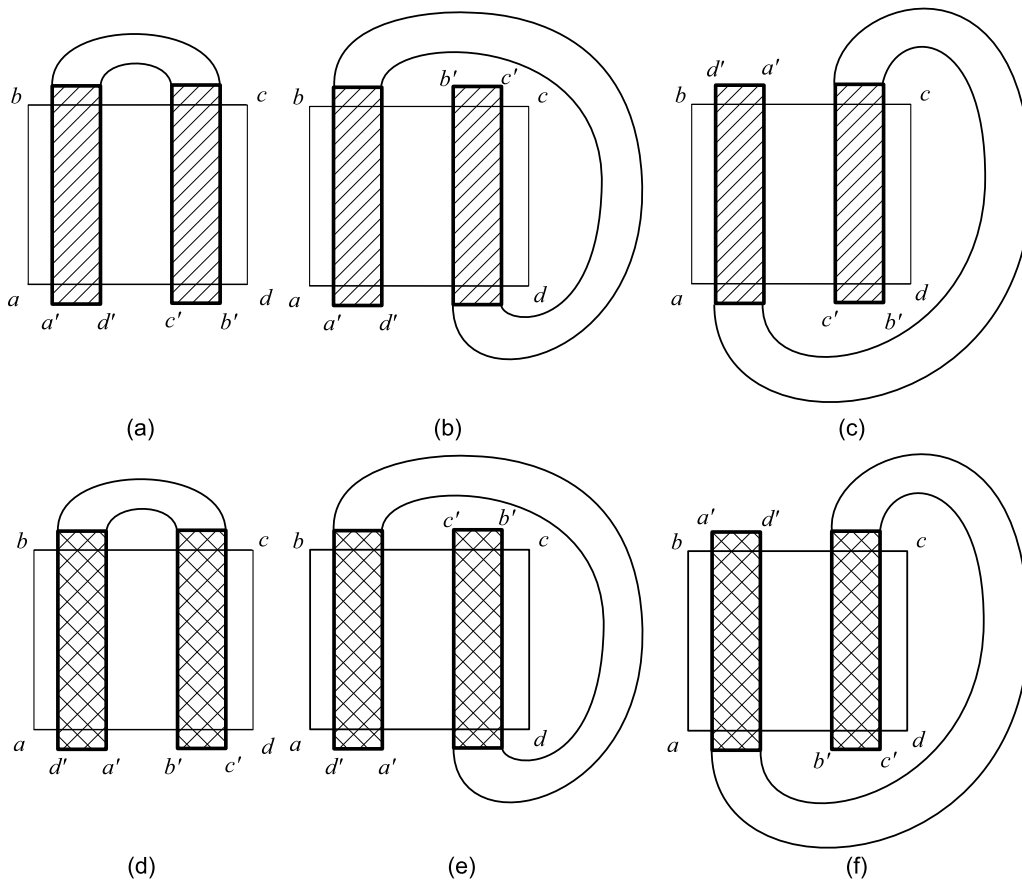


Рис. 2. Типы подков у диффеоморфизмов плоскости: (a)–(c) — в ориентируемом случае, (d)–(f) — в неориентируемом случае.

Шесть из них встречаются у диффеоморфизмов плоскости (см. рис. 2). Первые три случая, (a, b и c), отвечают ориентируемым подковам, т. е.  $T$  — ориентируемый диффеоморфизм, и здесь каждая неподвижная точка имеет мультипликаторы одного и того же знака. В случае (a) точка  $O_1$  имеет положительные мультипликаторы, а точка  $O_2$  — отрицатель-

<sup>1</sup>Хотя линейность здесь, в определенном смысле, не важна. Имеется в виду, что линейные и нелинейные подковы с одинаковой геометрией топологически эквивалентны, но линейных подков таких типов, как, например, на рис. 6 (a,c,d,f) или 11, не бывает.



ные: мы обозначим этот случай как  $\{O_1(+, +), O_2(-, -)\}$ , где в скобках первым указан знак устойчивого мультипликатора ( $< 1$  по модулю) и вторым — неустойчивого мультипликатора ( $> 1$  по модулю). В этих обозначениях подкова (b) отвечает случаю  $\{O_1(+, +), O_2(+, +)\}$ , а подкова (c) — случаю  $\{O_1(-, -), O_2(-, -)\}$ . Случаи (d)–(f) рисунка 2 отвечают неориентируемым подковам различных типов (здесь у обеих неподвижных точек мультипликаторы разных знаков): (d) — типу  $\{O_1(-, +), O_2(+, -)\}$ , (e) — типу  $\{O_1(-, +), O_2(-, +)\}$ , (f) — типу  $\{O_1(+, -), O_2(+, -)\}$ .

Однако можно представить, что отображение подковы  $T$  является «полуориентируемым», т. е. оно имеет разную ориентацию на компонентах связности  $T(q_i) \cap Q$ ,  $i = 1, 2$  (т. е. отображение  $T : q_1 \rightarrow Q$  — ориентируемое, а  $T : q_2 \rightarrow Q$  — неориентируемое, или наоборот). Это возможно даже в случае линейной подковы, когда  $T$  является либо эндоморфизмом плоскости, либо диффеоморфизмом, заданным на неориентируемом многообразии (можно представить, что квадрат  $Q$  лежит на листе Мёбиуса, а  $T(Q)$  — это подкова, которая обходит этот лист). Легко видеть, что в этом случае существуют 4 существенно различные комбинации знаков мультипликаторов двух точек  $O_1$  и  $O_2$ , которые можно сопоставить с четырьмя разными типами полуориентируемых линейных подков, изображенных на рисунке 3. При этом подкова (g) отвечает типу  $\{O_1(+, +), O_2(+, -)\}$ ; подкова (h) — типу  $\{O_1(-, +), O_2(-, -)\}$ ; подкова (i) — типу  $\{O_1(+, +), O_2(-, +)\}$ ; и, наконец, подкова (j) — типу  $\{O_1(+, -), O_2(-, -)\}$ . Соответственно, мы имеем, что отображение  $T$  ориентируемо на  $q_1$  и неориентируемо на  $q_2$  в случаях (g) и (i); и наоборот,  $T$  неориентируемо на  $q_1$  и ориентируемо на  $q_2$  в случаях (h) и (j).

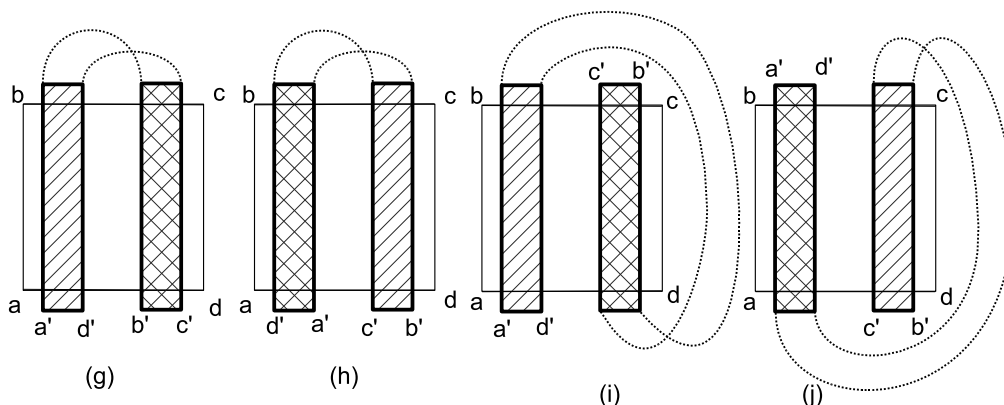


Рис. 3.

Заметим, что подковы можно классифицировать, используя и другие инварианты. Например, множества *граничных периодических точек*, которые, как известно [3], служат инвариантами топологической сопряженности транзитивных гиперболических множеств (а подкова Смейла — именно такое множество)<sup>2</sup>. Мы будем использовать следующее определение.

<sup>2</sup>Отметим, что задача классификации гиперболических диффеоморфизмов и гиперболических множеств на двумерных многообразиях является одной из наиболее известных в гиперболической теории. При этом, основными инвариантами здесь выступают как раз граничные точки [3] (см. также [5]). Однако, насколько нам известно, для подков Смейла такая задача не рассматривалась (по-видимому, в силу кажущейся тривиальности такой постановки).

**Определение 2.** Пусть  $\Lambda$  — инвариантное замкнутое транзитивное гиперболическое множество двумерного отображения. Седловая периодическая точка  $P \in \Lambda$  называется *s-граничной*, если отрезок  $W_{loc}^s(P)$  ее устойчивого многообразия делит любую достаточно малую окрестность  $V(P)$  точки  $P$  на два открытых диска  $V_1$  и  $V_2$  (т.е.  $V = V_1 \cup V_2 \cup (W_{loc}^s \cap V)$ ), таких, что  $V_1 \cap \Lambda = \emptyset$  и  $V_2 \cap \Lambda \neq \emptyset$ . Аналогично, точку будем называть *u-граничной*, если такое разделение имеет место для  $W_{loc}^u$ . Точку, которая является одновременно *s-граничной* и *u-граничной*, будем называть *(s, u)-граничной*.

Что касается линейных подков (ориентируемых, неориентируемых и полуориентируемых), то их классификация по характеру множества граничных точек была дана, например, в [1, 2]. При этом в некоторых случаях граничными периодическими точками здесь могут служить, помимо  $O_1$  и  $O_2$ , также точки  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два, т.е. такие, что  $T(P_1) = P_2, T(P_2) = P_1$  и  $P_1 \neq P_2$ . Хорошо известно, что такой цикл существует в любой подкове и он единственный.

Следующее утверждение из [1, 2] характеризует граничные периодические точки для всех 10 типов линейных подков.

**Утверждение 1.** Для подков рисунков 2 и 3 множество граничных периодических точек  $\Gamma$  характеризуется следующим образом:

- (a)  $\Gamma = \{O_1\}$ , где  $O_1$  является *(s, u)-граничной* точкой;
- (b)  $\Gamma = \{O_1, O_2\}$ , где точки  $O_1$  и  $O_2$  обе являются *(s, u)-граничными*;
- (c)  $\Gamma = \{P_1, P_2\}$ , где точки  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два являются *(s, u)-граничными*;
- (d)  $\Gamma = \{O_1, O_2\}$ , где  $O_1$  — *s-граничная* и  $O_2$  — *u-граничная* точки;
- (e)  $\Gamma = \{O_1, O_2, P_1, P_2\}$ , где точки  $O_1$  и  $O_2$  являются *s-граничными*, а  $P_1$  и  $P_2$  — *u-граничными*;
- (f)  $\Gamma = \{O_1, O_2, P_1, P_2\}$ , где точки  $O_1$  и  $O_2$  являются *u-граничными*, а  $P_1$  и  $P_2$  — *s-граничными*;
- (g)  $\Gamma = \{O_1, O_2\}$ , где  $O_1$  — *(s, u)-граничная*, а  $O_2$  — *u-граничная* точки;
- (h)  $\Gamma = \{O_1, O_2, P_1, P_2\}$ , где  $O_1$  — *s-граничная* точка, а точки цикла  $(P_1, P_2)$  — *u-граничные*;
- (i)  $\Gamma = \{O_1, O_2\}$ , где  $O_1$  — *(s, u)-граничная*, а  $O_2$  — *s-граничная* точки;
- (j)  $\Gamma = \{O_1, O_2, P_1, P_2\}$ , где точка  $O_1$  — *u-граничная*, а точки  $P_1$  и  $P_2$  — *s-граничные*.

В качестве иллюстрации к этому утверждению представлен рис. 4, который показывает, что именно граничные периодические точки и их соответствующие многообразия формируют основную геометрию подковы  $\Lambda$ .

## 2. Подковы в обобщенных отображениях Эно и их топологические свойства

Подковы Смейла, как гиперболические подмножества, встречаются в любой системе, допускающей грубые (трансверсальные) гомоклинические траектории Пуанкаре. Этот фундаментальный результат восходит к работам Смейла [8] и Шильникова [9], в которых был проведен анализ множества  $N$  траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической орбиты<sup>3</sup>. Однако, как показано в [9], подкову в этом случае следует рассматри-

<sup>3</sup>Заметим также, что в [9] соответствующее утверждение было получено без дополнительного технического предположения о гладкой приводимости системы к линейному виду в окрестности седла (в [8] такая приводимость предполагалась), что, естественно, существенно расширяет область применимости резуль-

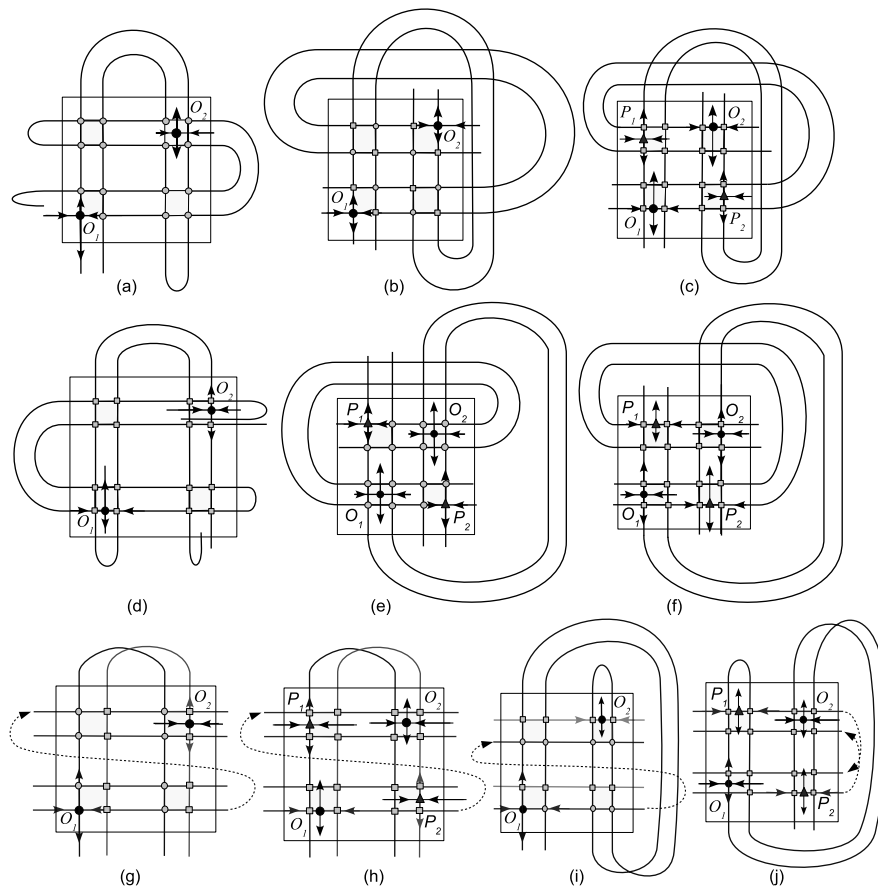


Рис. 4. На рисунке показаны граничные периодические точки и куски их инвариантных многообразий. Жирными точками обозначены неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ , светлыми кружками — гомоклинические точки, квадратами — гетероклинические точки, а черными треугольниками — точки  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два.

вать лишь как некоторое нетривиальное подмножество из  $N$ . Заметим также, что подковы Смейла, и даже их счетное множество, могут существовать в системах с гомоклиническими петлями к состоянию равновесия типа седло-фокус [10, 11], в системах с гомоклиническими касаниями [12] и др. Многие нелокальные бифуркации приводят к возникновению подков. В частности, таковыми являются некоторые типы бифуркаций, ведущих от систем Морса–Смейла к системам со сложной динамикой, объединенные общим термином «гомоклинический  $\Omega$ -взрыв», — характерным свойством таких бифуркаций является то, что счетное множество подков Смейла возникает сразу — взрывом — после перехода соответствующей бифуркационной границы. См., в частности, по этому поводу обзоры [13, 14] и имеющуюся там литературу.

Среди конкретных моделей, содержащих подковы Смейла, отображение Эно — одно из самых известных. Однако у него могут существовать подковы только двух типов: ориентируемые и неориентируемые (см. рис. 5). С другой стороны, в [1] было показано, что даже

---

тата, захватывая такие важные области теории динамических систем, как консервативные, обратимые, гамильтоновы системы и т. п.



при малых возмущениях отображения Эно (при которых его якобиан становится непостоянным) могут возникать полуориентируемые подковы, как аналогичные подковам из § 1, так и совершенно новые. Более того, может быть бесконечно много различных типов таких подков (с точки зрения локальной топологической сопряженности). И что весьма интересно, каждая такая подкова может быть реализована как (полуориентируемая) подкова диффеоморфизма двумерного неориентируемого многообразия.

Классическое отображение Эно имеет вид

$$\bar{x} = y, \bar{y} = 1 - bx - ay^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

где  $a$  и  $b$  — параметры ( $b$  — якобиан). Это отображение может быть переписано (при  $a \neq 0$ ) в эквивалентной форме

$$\bar{x} = y, \bar{y} = M - bx - y^2, \tag{2.1}$$

(где  $M = -a$ ) которую обычно называют стандартной формой, и именно в таком виде отображение Эно возникает в гомоклической динамике [12, 15, 16].

Хорошо известно, что при достаточно больших  $M$ , например, при

$$M > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2, \quad b \neq 0, \tag{2.2}$$

(см. [17, 6, 7]), отображение Эно (2.1) обладает гиперболической динамикой, которая в точности описывается подковой Смейла — ориентируемой при  $b > 0$  и неориентируемой при  $b < 0$  (см. рис. 5).

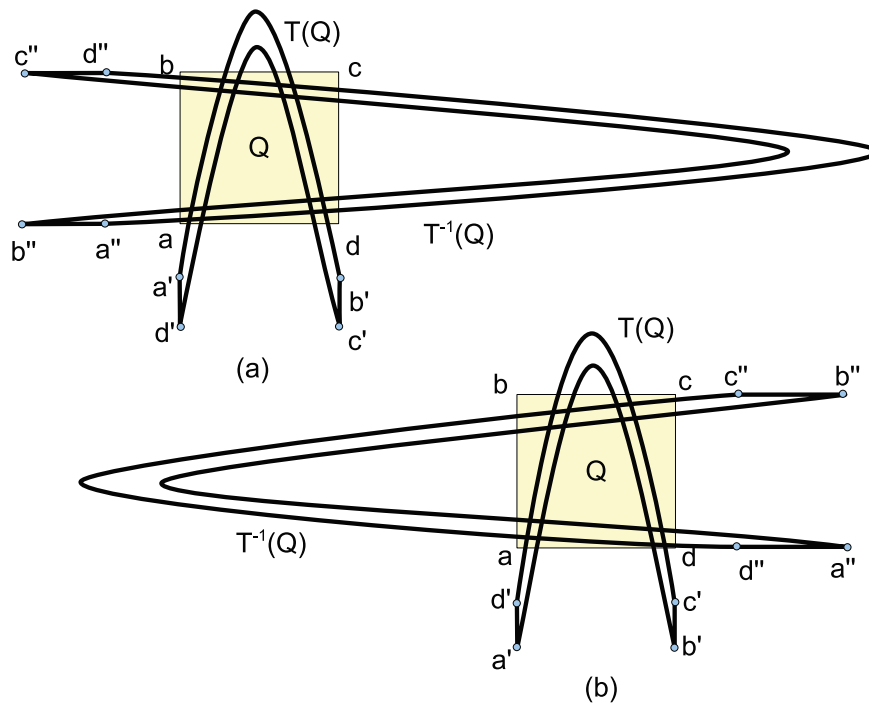


Рис. 5. Геометрия отображения Эно (2.1) в области гиперболичности при достаточно больших  $M$  и малых  $b$ : (а) ориентируемое (при  $b > 0$ ) и (б) неориентируемое (при  $b < 0$ ) отображения подковы.

Когда отображение (2.1) имеет две неподвижные точки, т. е. при  $M > -\frac{(b+1)^2}{4}$ , оно может быть переписано также и в следующей форме:

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1-y) - bx, \quad (2.3)$$

где  $\gamma = b+1 + \sqrt{(b+1)^2 + 4M}$ . Эта форма удобна для исследований, поскольку все неблуждающее множество отображения (2.3) сосредоточено на квадрате  $Q_\beta = [-\beta, 1+\beta] \times [-\beta, 1+\beta]$ , где  $\beta$  не зависит от  $\gamma$  и  $\beta \rightarrow 0$  при  $b \rightarrow 0$  [18]. При этом условие гиперболичности (2.2) будет выглядеть как  $\gamma > (|b|+1)(2+\sqrt{5})$ .

При  $b = 0$  отображение (2.3) вырождается в отображение

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1-y), \quad (2.4)$$

динамика которого одномерна: любая точка из  $\mathbb{R}^2$  после одной итерации ложится на инвариантную кривую  $y = \gamma x(1-x)$  и далее итерируется по ней в силу отображения параболы  $\bar{y} = \gamma y(1-y)$ . Хорошо известно, что неблуждающее множество  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  отображения параболы содержится целиком в интервале  $[0, 1]$ . При  $\gamma > 4$  множество  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  имеет канторовскую структуру, и ограничение отображения на  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  сопряжено с односторонней схемой Бернулли  $\mathcal{B}_{2+}$  из двух символов. В определенном смысле здесь можно говорить о гиперболичности, но только в классе одномерных отображений. Отметим, что, вообще говоря, при вложении (2.4) в какое-либо семейство двумерных отображений гиперболичность может уже не иметь места. Однако в случае семейства (2.3) отображений Эно,  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  превращается в настоящее гиперболическое множество — подкову Смейла, ориентируемую при  $b > 0$  и неориентируемую при  $b < 0$  (см. рис. 5).

В работе [1] была исследована гиперболическая динамика ГНМ (1). Отметим, что отображение (1), как и его аналоги, было введено в [19, 20] как нормальная форма отображения первого возвращения вблизи гомоклинического касания. В отличие от стандартного отображения Эно, отображение (1) демонстрирует невырожденные бифуркации периодических траекторий с мультипликаторами  $e^{\pm i\varphi}$  и, таким образом, помогает исследовать соответствующие бифуркации в многочисленных классах систем с негрубыми гомоклиническими и гетероклиническими траекториями. Далее будем обозначать отображение (1) через  $T$ , предполагая, что  $b$  и  $\alpha$  малы, а  $\gamma$  достаточно велико (для существования подков достаточно считать, что  $\gamma > 4$ ).

Заметим, что отображение (1) не является диффеоморфизмом на  $\mathbb{R}^2$ . Его якобиан  $J(T)$  равен  $J = b - \alpha y$  и, следовательно, обращается в нуль на линии  $y = b/\alpha$ . Легко видеть, что образом этой линии относительно  $T$  является единственная точка

$$P^* = \left( \frac{b}{\alpha}, \frac{\gamma b}{\alpha} \left( 1 - \frac{b}{\alpha} \right) \right),$$

которую мы называем *точкой коллапса*<sup>4</sup>. Наличие такой сингулярности оказывает очень сильное влияние на динамику отображения (1) в целом. Это влияние проявляется даже в том случае, когда динамика гиперболична. Однако если линия  $y = b/\alpha$  не пересекает  $Q_\beta$ , гиперболическая динамика вполне обычна и ей отвечают либо ориентируемая (при  $b > 0$ ),

<sup>4</sup>Заметим, что в теории необратимых гладких отображений для таких точек используется также другой термин — «узловая точка» («knot point» [21]).

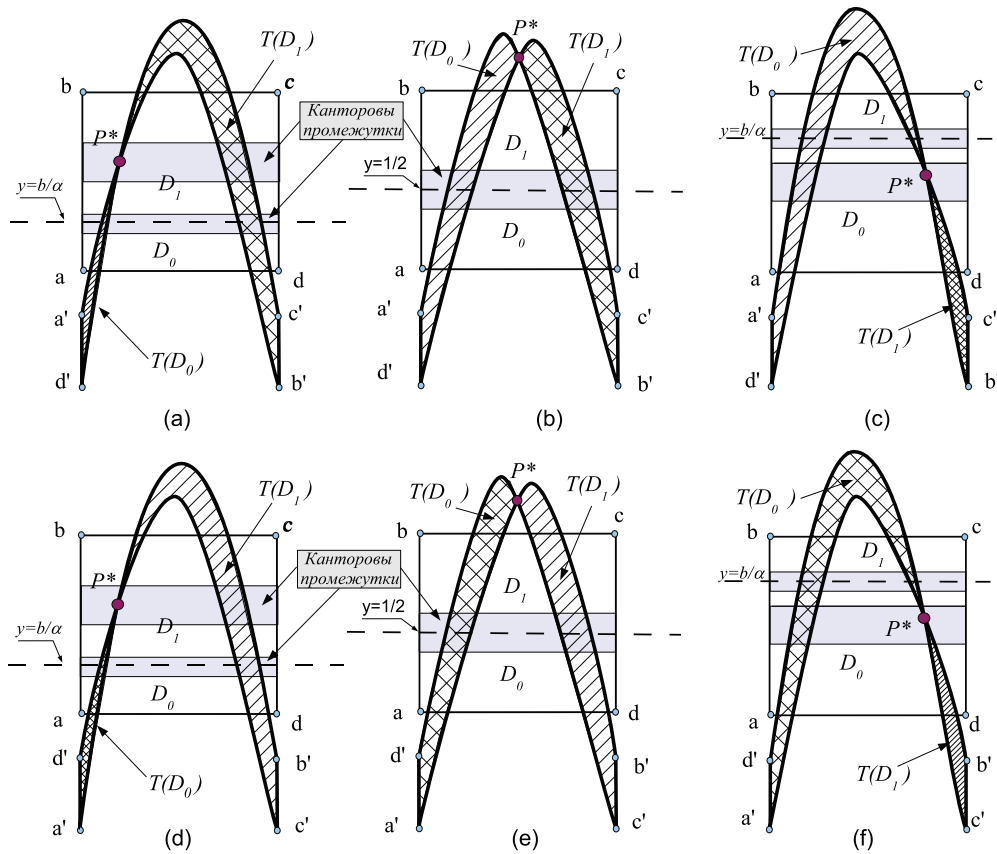


Рис. 6. (a)–(c) — лево-ориентируемые подковы; (d)–(f) — право-ориентируемые подковы.  $D_0$  и  $D_1$  — области на  $Q$ , лежащие, соответственно, ниже и выше линии  $y = b/\alpha$ , на которой якобиан отображения  $T$  равен нулю.

либо неориентируемая (при  $b < 0$ ) подкова. В противном случае возникает новая гиперболическая динамика, связанная с существованием так называемых полуориентируемых подков, некоторые примеры которых показаны на рис. 6.

Следующий результат из [1] описывает области параметров, для которых GHM (1) имеет подковы различных типов.

**Теорема 1.** *Зафиксируем  $\gamma > 4$ . Тогда в любой достаточно малой окрестности  $V$  начала координат плоскости  $(\alpha, b)$  существует конусообразная область  $\hat{D}$  (примыкающая к точке  $(0, 0)$ )*

$$0 < \frac{b}{\alpha} < 1 + \rho(\alpha, b), \tag{2.5}$$

где  $\rho(\alpha, b) \rightarrow 0$  при  $\alpha, b \rightarrow 0$ , такая, что

- 1) при  $(\alpha, b) \in V \setminus \hat{D}$  неблуждающее множество  $\Lambda(T)$  является подковой Смейла — ориентируемой при  $b > 0$  и неориентируемой при  $b < 0$ ;
- 2) область  $\hat{D}$  содержит бесконечно много открытых конусообразных областей, примыкающих к точке  $(0, 0)$ , при значениях параметров из которых  $\Lambda(T)$  является полуориентируемой подковой;
- 3) граница  $b = 0$  области  $\hat{D}$  отвечает первой бифуркации, когда точка  $P^*$  совпадает

с неподвижной точкой  $O_1$  (при этом у точки  $O_1$  появляется нулевой мультипликатор);  
 4) граница  $b = \alpha(1 + \rho(\alpha, b))$  отвечает последней бифуркации, когда точка  $P^*$  становится (в последний раз) гомоклинической к  $O_1$ .

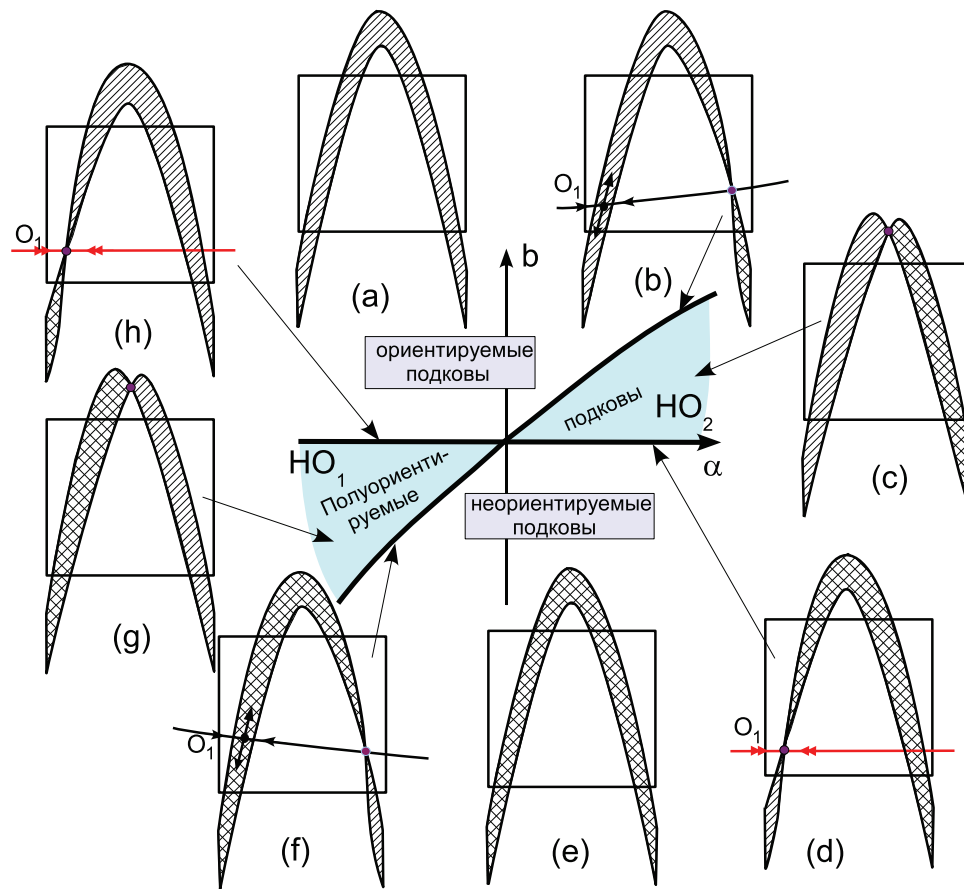


Рис. 7.

На рис. 7 приведена иллюстрация к этой теореме, здесь отмечены также некоторые бифуркационные моменты: в случаях первой бифуркации, при  $b = 0$ , рис. 7(d) и (h), и последней бифуркации,  $b/\alpha = 1 + \rho(\alpha, b)$ , рис. 7(b) и (f).

Следующая лемма представляет собой усиленный вариант утверждения 2) теоремы 1.

**Лемма 1.** Область  $\hat{D}$  содержит счетное множество открытых конусообразных областей  $g_i, i = 1, \dots, \infty$ , границам каждой из которых отвечают ситуации, когда  $P^* \in W^s(O_1)$ . Если  $(\alpha, b) \in \mathcal{G} = \bigcup g_i$ , то неблуждающее множество  $\Lambda(T)$  является полуориентируемой гиперболической подковой. Замкнутое множество  $\mathcal{K} = \hat{D} \setminus \mathcal{G}$  является одномерным конусом над канторовским множеством, и если  $(\alpha, b) \in \mathcal{K}$ , то  $\Lambda(T)$  является сингулярной подковой.

*Доказательство.* В рассматриваемом случае точка  $O_1$  является всегда  $s$ -граничной для множества  $\Lambda(T)$ . Действительно, пусть  $l_s$  — эта та кривая (связная компонента) множества  $W^s(O_1) \cap Q$ , которая содержит точку  $O_1$ . Тогда, по геометрии подковы в случае ГНМ,

все точки на  $Q$ , лежащие ниже  $l_s$ , — блуждающие. Соответственно, процедура построения подковы будет включать конструкцию, связанную с указанием «дырок» — горизонтальных открытых областей на  $Q$ , в которых нет неблуждающих точек. В нашем случае множество инвариантных границ таких «дырок» — это счетное множество  $W^s(O_1) \cap Q$  горизонтальных кривых (отрезков) на  $Q$ . Эти «дырки» можно пронумеровать в соответствии со следующей стандартной процедурой.

Пусть  $\hat{G} \subset T(Q) \cap Q$  — вершина подковы  $T(Q)$ , т.е. та ее часть, которая лежит выше квадрата  $Q$  (рис. 8 а). Обозначим через  $G \subset Q$  полосу на квадрате  $Q$ , которая переходит в  $\hat{G}$ , т.е.  $T(G) = \hat{G}$ . В свою очередь,  $G$  имеет два прообраза  $G_0$  и  $G_1$ , такие, что  $T(G_i) = G, i = 0, 1$ , и  $G_0$  лежит выше  $G$  а  $G_1$  — ниже (рис. 8 а). Далее, определим «полоски»  $G_{00}, G_{01}$ , такие, что  $T(G_{0i}) = G_0$ , и  $G_{10}, G_{11}$ , такие, что  $T(G_{1i}) = G_1$ . При этом опять считаем, что  $G_{j0}$  лежит ниже  $G_{j1}$  (рис. 8 а). Продолжая эту процедуру до бесконечности, получим набор «полосок»  $G_{\beta 0}, G_{\beta 1}$ , таких, что  $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_n], n = 1, 2, \dots, \beta_i \in \{0, 1\}, T(G_{\beta 0}) = T(G_{\beta 1}) = G_\beta$ , и  $G_{\beta 0}$  лежит ниже  $G_{\beta 1}$ . Наконец, разобьем еще «полоски»  $G_\beta$  на две половинки  $G_\beta^l$  и  $G_\beta^r$ , лежащие в  $Q$ , соответственно, слева и справа от прямой  $x = 1/2$ .

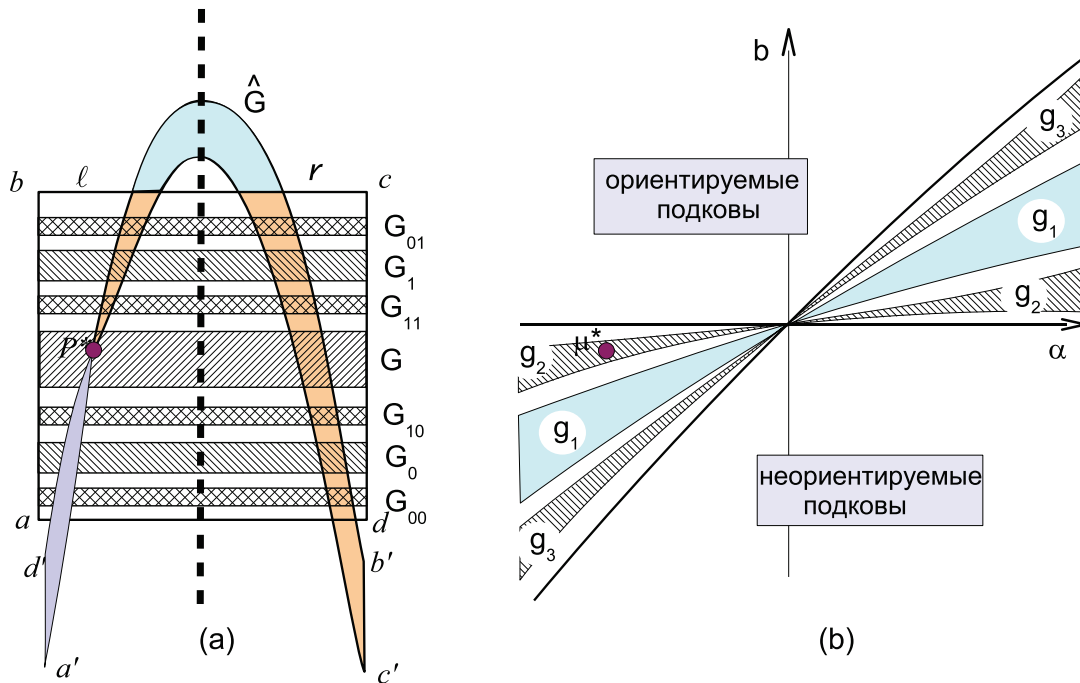


Рис. 8.

Очевидно, можно считать, что все эти полоски  $G_\beta$  имеют инвариантные границы — верхнюю и нижнюю, которым отвечают соответствующие куски устойчивого многообразия  $W^s(O_1)$ .

Теперь связь между конусообразными областями  $g_i$  из теоремы 1 и областями  $\hat{G}, G$  и  $G_\beta^{l,r}$  устанавливается легко. Тем значениям параметров  $(\alpha, b)$ , при которых  $P^* \in \hat{G}$ , отвечает область  $g_1$ , если  $P^* \in G^l$  и  $P^* \in G^r$  — области  $g_2$  и  $g_3$ , если  $P^* \in G_0^l$  и  $P^* \in G_0^r$  — области  $g_4$  и  $g_5$ , если  $P^* \in G_1^l$  и  $P^* \in G_1^r$  — области  $g_6$  и  $g_7$  и т. д. (см. рис. 8 б). Это завершает доказательство леммы. □



Далее, используя геометрические конструкции леммы 1, мы докажем следующий результат, который другим (неконструктивным) методом был установлен в [1].

**Теорема 2.** *Существует счетное множество локально топологически несопряженных полуориентируемых подков.*

Доказательство немедленно вытекает из следующей леммы.

**Лемма 2.** *Пусть отображения  $T$  и  $T'$  имеют полуориентируемые подковы  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  соответственно, такие, что  $P^* \in G_\beta$  и  $P^{*'} \in G_{\beta'}$ . Если  $\beta \neq \beta'$  или  $\beta = \beta'$ , но  $P^* \in G_\beta^l$ ,  $P^{*'} \in G_\beta^r$  (либо  $P^* \in G_\beta^r$ ,  $P^{*'} \in G_\beta^l$ ), то системы  $T|\Lambda$  и  $T'|\Lambda'$  не являются локально топологически сопряженными.*

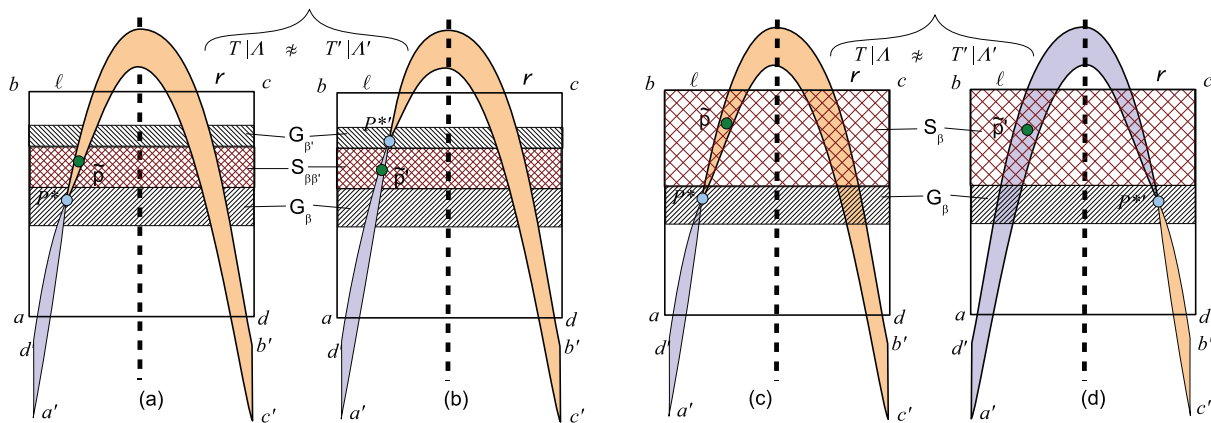


Рис. 9.

*Доказательство.* Пусть  $\beta \neq \beta'$ . Рассмотрим полосу  $S_{\beta\beta'}$ , лежащую между  $G_\beta$  и  $G_{\beta'}$  (см. рис. 9 а–б). Очевидно, она содержит точки периодических траекторий, так как по конструкции подковы любая такая полоса не содержится целиком ни в одном из  $G_\beta$  (наоборот, она содержит счетное множество таких промежутков). Среди этих периодических траекторий существуют и такие (в силу свойств подковы), у которых одна точка (или любое их нечетное число) принадлежит  $S_{\beta\beta'}$ . Пусть это будут точка  $\tilde{p}$  для отображения  $T$  и соответствующая ей точка  $\tilde{p}'$  для отображения  $T'$  — под соответствием здесь понимается то, что периодические траектории  $O(\tilde{p})$  и  $O(\tilde{p}')$  имеют одинаковые кодировки. Но очевидно, что траектории  $O(\tilde{p})$  и  $O(\tilde{p}')$  имеют разный тип ориентируемости. Поскольку кодировки являются инвариантами при топологической сопряженности, то  $T|\Lambda$  и  $T'|\Lambda'$  не могут быть сопряжены (поскольку ориентируемая периодическая орбита не может быть сопряжена неориентируемой).

Если  $P^*$  и  $P^{*'}$  принадлежат  $G_\beta^l$  и  $G_\beta^r$  (или наоборот), то в качестве  $S_{\beta\beta'}$  рассмотрим полосу  $S_\beta$ , лежащую в  $Q$  выше  $G_\beta$  (см. рис. 9 с–д). После этого доказательство аналогично.  $\square$

Вернемся к теореме 1 и рис. 7, где отмечены конусообразные области  $HO_1$  и  $HO_2$ . Те полуориентируемые подковы, которые отвечают области  $HO_1$  параметров  $(\alpha, b)$  будем называть *право-ориентируемыми*, а области  $HO_2$  — *лево-ориентируемыми* (см. также рис. 6). Очевидно, лево- и право-ориентируемые подковы не сопряжены друг другу. Однако две подковы одного типа могут быть сопряжены. Пусть  $HG^*$  — это множество, состоящее из счетно-

го набора непересекающихся открытых областей  $\hat{G}, G^l, G^r$ , а также  $G_\beta^l$  и  $G_\beta^r$  для всевозможных  $\beta$  — конечных отрезков, составленных из символов «0» и «1». Тогда из доказательства леммы 2 вытекает следующая

**Теорема 3.** *Для локальной топологической сопряженности полуориентируемых гиперболических подков  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  одинакового типа, лево- или право-ориентируемых, необходимо и достаточно, чтобы  $P^*$  и  $P^{*'}$  принадлежали одной и той же компоненте связности множества  $HG^*$ .*

Очевидно теперь, что зная положение точки коллапса  $P^*$ , можно получить полную информацию о топологических свойствах соответствующей полуориентируемой подковы  $\Lambda$ . Естественно, это не всегда просто. Мы опишем только один результат такого сорта, который иллюстрирует, однако, весьма нетривиальную динамику даже в случае гиперболических подков.

**Теорема 4.** *Пусть  $\Lambda$  — право-ориентируемая подкова из теоремы 1.*

- 1) Пусть  $P^* \in G_\beta^l$ , где  $\beta = \overbrace{[0, \dots, 0]}^n$ . Тогда  $u$ -граничной точкой подковы  $\Lambda$  является точка периода  $(n + 3)$  с периодической кодировкой  $\{\overbrace{[0, 0, \dots, 0, 1]}^{n+2}\}$ .
- 2) Если  $P^* \in G^l$ , то  $u$ -граничной является точка периода три с кодировкой  $\{\overbrace{[0, 0, 1]}^3\}$ .
- 3) Если  $P^* \in \hat{G}$ , то  $u$ -граничной является точка периода два.
- 4) Если  $P^* \in G^r$  или  $P^* \in G_\beta^r$ , где  $G_\beta$  лежат ниже  $G$ , то  $u$ -граничной является неподвижная точка  $O_2$ .

*Доказательство.* Утверждение 3) о точке периода два доказано в теореме 2 работы [1].

Докажем сначала утверждение 2). Поскольку точка коллапса  $P^*$  лежит в полосе  $G^l$ , то в нее отображается относительно  $T$  целая прямая  $l_0 \subset G_0$ . По геометрии, все (криволинейные) отрезки в  $Q$ , соединяющие точку на стороне  $[a, d]$  квадрата  $Q$  с точкой на  $l_0$  и лежащие в области  $\hat{q}_0$  на  $Q$ , расположенной ниже  $l_0$ , отображаются в отрезки, которые пересекают  $[a, d]$  и имеют общий конец  $P^*$ . В качестве первых отрезков мы выберем инвариантные, т. е. фактически куски неустойчивых многообразий точек подковы. Поскольку  $\Lambda$  — гиперболическое базисное множество, то у него существует периодическая точка, которая является  $u$ -граничной. Это означает, что есть кусок ее неустойчивого многообразия, соединяющий  $[a, d]$  с  $l_0$ , самый правый на  $\hat{q}_0$  из всех таких инвариантных кусков. Обозначим его как  $\hat{S}_0$ . По геометрии отображения  $T$ , поскольку оно неориентируемо на  $\hat{q}_0$ , образ  $T(\hat{S}_0)$  — это кусок инвариантной кривой, причем самый левый среди букета инвариантных отрезков соединяющих  $P^*$  и  $[a, d]$ . Поскольку  $P^* \in G$ , то  $T(P^*) \in \hat{G}$  и инвариантный отрезок  $T^2(\hat{S}_0)$  пересекает квадрат  $Q$  по вертикали, причем отрезок  $T^2(\hat{S}_0)$  состоит из двух кусков с общей точкой  $P^*$ : нижнего, который является самым правым на  $T_l(Q)$ , и верхнего, который является самым левым на  $T_l(Q)$  и содержит точку  $p_3$ . Образом последнего отрезка относительно  $T$  является самая правая инвариантная кривая на  $T_r(Q)$ , имеющая одну концевую точку  $T(P^*) \in \hat{G}$ , другую,  $T^2(P^*)$ , лежащую ниже стороны  $[a, d]$ . Это означает, что кривая  $T^3(\hat{S}_0)$  содержит  $\hat{S}_0$ . Поскольку при этом отображение  $T$  — растягивающее на  $\hat{S}_0$ , это влечет, что на  $\hat{S}_0$  лежит (единственная) точка периода 3 — точка  $p_1$ . Этой точке предписывается символ «1», так как она находится в  $Q^r$  — правой части  $Q$ . Точки  $p_2 = T(p_1)$  и  $p_3 = T(p_2)$  лежат в  $Q^l$  — левой части  $Q$ , поэтому им предписывается символ «0». Соответственно, цикл  $\{p_1, p_2, p_3\}$  периода 3 имеет периодическую кодировку  $\{[0, 0, 1]\}$ . На рис. 10 а изображена право-ориентируемая подкова, имеющая граничную точку периода 3.

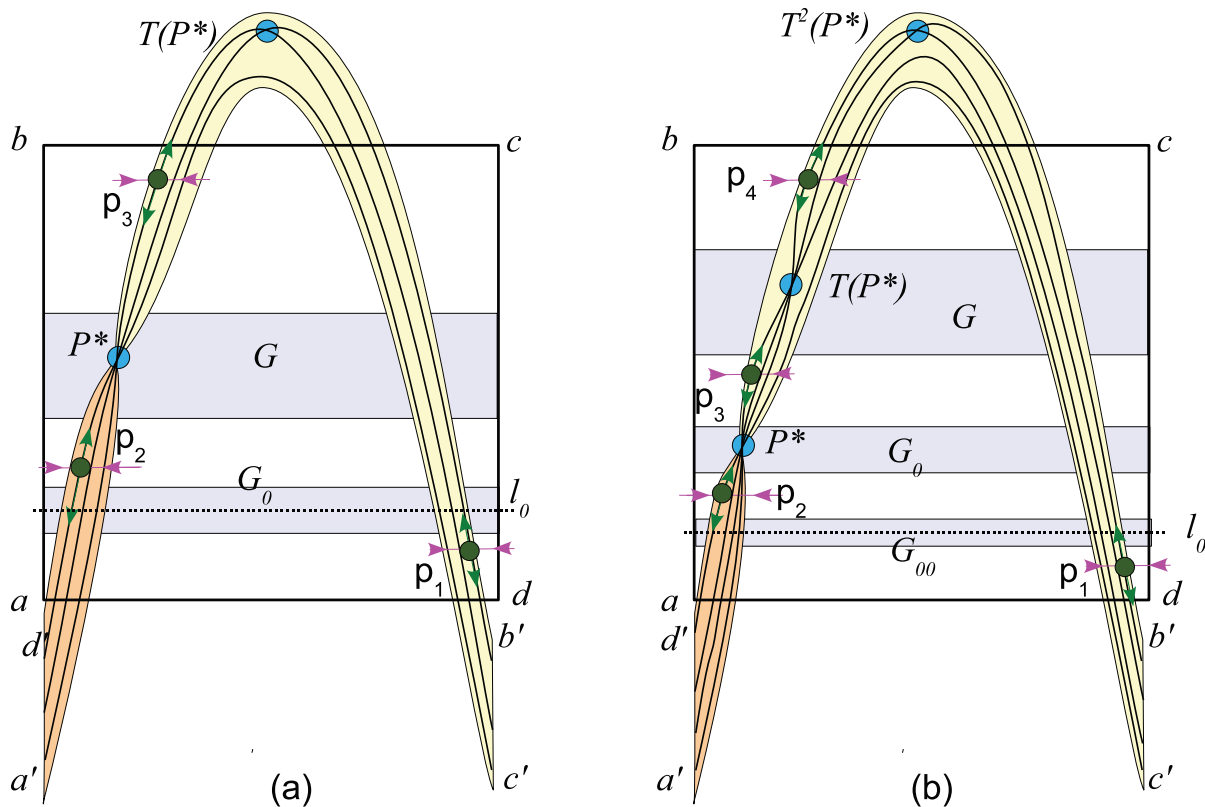


Рис. 10.

Утверждение 1) доказывается с использованием той же самой идеи. Пусть  $P^* \in G_\beta^l$ , где  $\beta = \overbrace{[0, \dots, 0]}^n$ . Рассмотрим отрезок  $l_n \in G_{\beta 0}$ , такой, что  $T(l_n) = P^*$ . В области  $\hat{q}_n$  на  $Q$ , расположенной ниже  $l_n$ , выберем самый правый инвариантный кусок у  $W^u(\Lambda)$ . Обозначим его как  $\hat{S}_n$ . Тогда его образ,  $T(\hat{S}_n)$ , — это отрезок инвариантной кривой, причем самый левый среди букета инвариантных кривых, соединяющих  $P^*$  и  $[a, d]$ . Под действием  $T$  этот отрезок начнет растягиваться, а поскольку  $P^* \in G_\beta^l$ , то, по определению полосы  $G_\beta$ , за  $(n + 1)$  итерацию отображения  $T$  его соответствующий образ  $T^{n+1}(T(\hat{S}_n))$  пересечет  $Q$  по вертикали, а уже следующая итерация накроет  $\hat{S}_n$ . Это означает, что на  $\hat{S}_n$  лежит точка периода  $(n + 3)$ , которая является  $u$ -граничной по построению. На рис. 10 b, на котором изображена право-ориентируемая подкова, имеющая граничную точку периода 4.

4) Рассмотрим самый правый инвариантный отрезок  $\hat{L}_1$  на  $Q_r$  из тех связных кусков  $W^u(\Lambda)$  на  $Q_r$ , которые имеют две концевые точки: одну —  $P^*$ , а другую — на стороне  $[b, c]$ . Тогда отрезок  $T(\hat{L}_1)$  будет иметь два конца: точку  $T(P^*) \in \hat{G}$  и точку, которая лежит на  $[b', c']$  — ниже  $[a, d]$ . При этом очевидно, что кусок отрезка  $T(\hat{L}_1)$  от точки  $T(P^*)$  до точки  $P^*$  будет самым правым отрезком из кусков  $W^u(\Lambda)$  с нижней концевой точкой  $P^*$ . Это означает, что  $T(\hat{L}_1) \supset L_1$  и, в свою очередь, отрезок  $L_1$  содержит неподвижную точку — очевидно, это точка  $O_2$ .  $\square$

Отметим, что полуориентируемые подковы указанных типов могут существовать и в случае диффеоморфизмов на неориентируемых многообразиях.



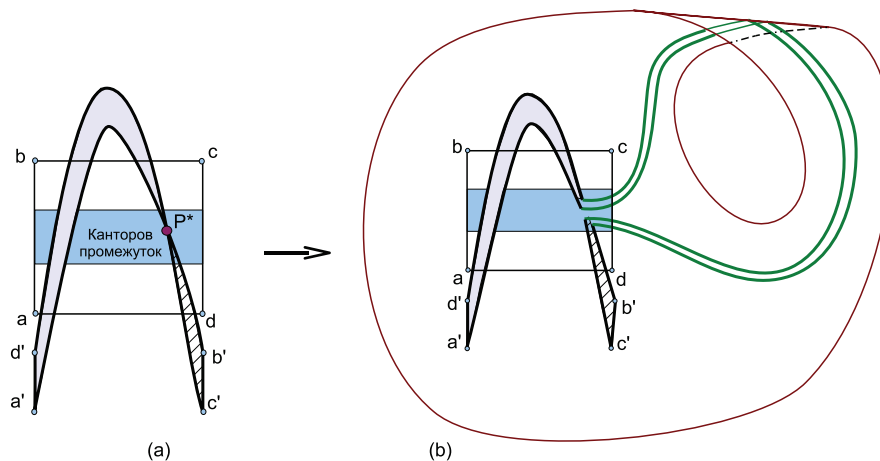


Рис. 11.

Действительно, с каждой полуориентируемой подковой отображения  $T$  можно связать (с помощью «хирургической операции» на блуждающем множестве) одинаковую с ней подкову на многообразии (см. рис. 11, на котором соответствующая конструкция показана для листа Мёбиуса). Очевидно, многие наши результаты, полученные для ГНМ, могут быть перенесены и на этот случай. Однако общая картина, представленная теоремой 1 для случая ГНМ, здесь, конечно, уже не будет иметь места. Вообще говоря, сохранится лишь конечное число областей гиперболичности, и переходы между ними будут соответствовать областям негрубых систем, для которых характерно существование гомоклинических касаний.

В заключение авторы благодарят Ming-Chia Li, Д. Тураева и В. З. Гринеса за полезные обсуждения. Работа поддержана грантами РФФИ No.10-01-00429, No.08-01-00547, No.08-01-00083 и No.09-01-97016-р-поволжье, а также грантом «Global Bifurcations» (Royal Society).

## Список литературы

- [1] Gonchenko S., Li M.-Ch., Malkin M. Generalized Hénon maps and Smale horseshoes of new types // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, vol. 18, no. 10, pp. 3029–3052.
- [2] Гонченко С. В., Гонченко А. С. К вопросу о классификации линейных и нелинейных подков Смейла // *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, № 4, с. 423–443.
- [3] Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах: Ч. 1 // *Тр. ММО*, 1975, т. 32, с. 35–61; Ч. 2: там же, 1977, т. 34, с. 243–252.
- [4] *Динамические системы–9* / Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, В. З. Гринес и др. (ред.). (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 66.) М.: ВИНТИ, 1991. 248 с.
- [5] Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. *Гладкие динамические системы* // *Динамические системы–1* / Д. В. Аносов, В. И. Арнольд (ред.). (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1.) М.: ВИНТИ, 1985. С. 151–242.

- [6] Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear dynamics and turbulence / G. I. Barenblatt, G. Loos, and D. D. Joseph (Eds.) (Interaction Mech. Math. Ser.) Boston, MA: Pitman, 1983. P. 1–34.
- [7] Afraimovich V.S. Strange attractors and quaiattractors // Nonlinear and turbulent processes in physics: Vol. 3 / R. Z. Sagdeev (Ed.). Chur: Harwood Acad. Publ., 1984. P. 1133–1138.
- [8] Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points // Differential and combinatorial topology (A symposium in honor of Marston Morse, 1965) / S. S. Cairns (Ed.). Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1965. P. 63–80.
- [9] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб., 1967, т. 74, вып. 3, с. 378–397.
- [10] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 3, с. 558–561.
- [11] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Матем. сб., 1970, т. 81, вып. 1, с. 92–103.
- [12] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой: Ч. 1 // Матем. сб., 1972, т. 88, вып. 4, с. 475–492; Ч. 2: там же, 1973, т. 90, вып. 1, с. 139–157.
- [13] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Динамические системы–5 / В. И. Арнольд (ред.). (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5.) М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
- [14] Гомоклинические касания: Сб. ст. / С. В. Гонченко, Л. П. Шильников (ред.). М.–Ижевск: РХД, 2007. 524 с.
- [15] Tedeshini-Lalli L., Yorke J. A. How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? // Comm. Math. Phys., 1986, vol. 106, no. 4, pp. 635–657.
- [16] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. РАН, 1993, т. 330, № 2, с. 144–147.
- [17] Devaney R., Nitecki Z. Shift automorphisms in the Hénon mapping // Comm. Math. Phys., 1979, vol. 67, no. 2, pp. 137–146.
- [18] Li M.-Ch., Malkin M. Bounded nonwandering sets for polynomial mappings // J. Dyn. Control Syst., 2004, vol. 10, no. 3, pp. 377–389.
- [19] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S. On Andronov–Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies: Preprint (WIAS, No. 556). Berlin: WIAS, 2000. 27 p.
- [20] Гонченко С. В., Гонченко В. С. О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // Труды МИАН, 2004, т. 244, с. 87–114.
- [21] Bischi G.-I., Gardini L., Mira Ch. Plane maps with denominator: P. 1: Some generic properties // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1999, vol. 9, no. 1, pp. 119–153.