УДК 517

Об отсутствии дополнительного мероморфного первого интеграла в задаче Римана о движении однородного жидкого эллипсоида

С. Л. Зиглин
Институт радиотехники и электроники РАН
115563, Россия, Москва, Борисовский проезд, д. 20

Получено 28 декабря 2009 г.

Доказывается отсутствие дополнительного мероморфного первого интеграла в задаче Римана о движении однородного жидкого эллипсоида с нулевыми кинетическим и вихревым моментами в случае нулевой самогравитации.

Ключевые слова: задача Римана, жидкий эллипсоид, первый мероморфный интеграл

S. L. Ziglin

On the absence of an additional meromorphic first integral in the Riemann problem on the motion of a liquid ellipsoid

We prove the absence of an additional meromorphic first integral in the Riemann problem on the motion of a homogeneous liquid ellipsoid with zero angular and vortex momenta in the case of zero self-gravitation.

Keywords: Riemann problem, liquid ellipsoid, meromorphic first integral
MSC 2010: 70Hxx

Рассмотрим задачу Римана [1] о движении однородного жидкого несжимаемого эллипсоида с нулевыми кинетическим и вихревым моментами в случае нулевой самогравитации. Эта задача описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы [2], и для ее полного интегрирования недостает одного дополнительного, т. е. функционально независимого от гамильтониана, первого интеграла. В [2] дано компьютерное доказательство отсутствия у этой системы дополнительного вещественно-аналитического первого интеграла при ненулевой самогравитации. Вместе с тем отмечено, что при нулевой самогравитации почти все траектории системы неограниченны, что мешает постановке надлежащего численного эксперимента. Таким образом, остается открытым вопрос о существовании у системы в этом случае дополнительного первого интеграла. В настоящей работе доказывается отсутствие в этом случае мероморфного первого интеграла. Перейдем к точному изложению.

Движение однородного жидкого эллипсоида с нулевыми кинетическим и вихревым моментами без учета самогравитации описывается каноническими гамильтоновыми уравнениями с гамильтонианом

$$H = 2R\left(P_X^2 + \frac{Y^4}{Y^4 + 16c^2R}P_Y^2\right). \tag{1}$$

Здесь $R = f(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}$, X — разность квадратов двух из трех полуосей эллипсоида, Y — их удвоенное произведение, P_X, P_Y — сопряженные им импульсы, c — произведение полуосей эллипсоида. (Ср. [2], где гамильтониан приведен в полярных координатах.)

Рассмотрим систему с гамильтонианом H в комплексифицированном фазовом пространстве $M = \big\{(X, Y, P_X, P_Y) \in \mathbb{C}^4 \mid |X| < |Y|\big\}$. Фиксируя ветвь функции f, такую, что $f(0, 1) = 1$, получаем, что H является однозначной аналитической функцией в M.

Теорема. *При $c \neq 0$ система с гамильтонианом H не имеет в фазовом пространстве M дополнительного (т. е. функционально независимого от H) мероморфного первого интеграла.*

Доказательство. Система с гамильтонианом H имеет однопараметрическое семейство неравновесных фазовых кривых Γ_h,

$$\Gamma_h = \left\{(X, Y, P_X, P_Y) \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, X = P_X = 0,\ \frac{2Y^4P_Y^2}{Y^3 + 16c^2} = h\right\}, \quad h \neq 0.$$

Приведенная система в вариациях вдоль Γ_h [3], т. е. ограничение системы в нормальных вариациях на поверхность уровня ее первого интеграла dH, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X} = 4YP_X, \\ \dot{P}_X = -\dfrac{2XY^5P_Y^2}{(Y^3 + 16c^2)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь для сокращения записи через X, P_X обозначены dX, dP_X.

Согласно предложению п. 1.2 из [3], если система с гамильтонианом H имеет дополнительный мероморфный первый интеграл, то группа монодромии системы (2), т. е. образ антипредставления фундаментальной группы фазовой кривой Γ_h в группу линейных преобразований двумерной комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами X, P_X под действием системы (2), имеет непостоянную рациональную инвариантную функцию.

Вводя новую независимую переменную $z = -Y^3/(16c^2)$ и обозначая $\frac{d}{dz} = {}'$, перепишем (2) в виде

$$\begin{cases} X' = \dfrac{4\sqrt{2}c\sqrt{1-z}P_X}{3\sqrt{h}z}, \\ P_X' = -\dfrac{\sqrt{2h}X}{48cz\sqrt{1-z}}, \end{cases}$$

или

$$X'' + a(z)X' + b(z)X = 0, \tag{3}$$
$$a(z) = \frac{2-z}{2z(1-z)}, \quad b(z) = \frac{1}{18z^2}.$$

Уравнение (3) имеет 3 регулярных особых точки $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$. Так как фазовая кривая Γ_h является конечнолистным (шестилистным) накрытием комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с выколотыми точками 0, 1, то образ ее фундаментальной группы при естественном мономорфизме в фундаментальную группу комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с указанными выколотыми точками является подгруппой конечного индекса последней, а группа монодромии системы (2) —подгруппой конечного индекса группы монодромии уравнения (3), и, согласно лемме из [4], они одновременно имеют или не имеют инвариантную рациональную функцию.

Покажем, что группа монодромии уравнения (3) не имеет инвариантной рациональной функции (ср. [5]; см. также [6]), чем и будет доказана теорема.

Имеем:

$$a(z) = \frac{a_0}{z} + O(1), \quad b(z) = \frac{b_0}{z^2}, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{18},$$

следовательно [7], собственные значения $\lambda_{1,2}$ преобразования T_0 под действием уравнения (3) при обходе точки $z = 0$ равны $\exp 2\pi i r_{1,2}$, где $r_{1,2}$ — корни определяющего уравнения

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0,$$

т. е. $\lambda_{1,2} = \exp\left(\pm 2\pi/(3\sqrt{2})\right)$.

Аналогично, собственные значения преобразования T_1 под действием уравнения (3) при обходе точки $z = 1$ равны 1 и -1, а собственные значения преобразования T_∞ при обходе точки $z = \infty$ равны $\exp \pi i \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\right)$.

Так как определители преобразований T_0, T_1, T_∞ являются корнями из единицы, то, согласно теореме 1 из [4], для существования рациональной инвариантной функции группы монодромии G уравнения (3) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) все преобразования группы G имеют общий собственный вектор, а их собственные значения являются корнями из единицы;

2) существует пара прямых, не проходящих через $0 \in \mathbb{C}^2$, объединение которых инвариантно относительно G;

3) группа G конечна.

Так как собственные значения преобразования T_0 не являются корнями из единицы, то случаи 1), 3) невозможны.

Предположим, что имеет место случай 2). Так как квадраты преобразований T_0, T_∞ не являются скалярами, то эти преобразования не могут переставлять между собой прямых, о которых говорится в условии 2); следовательно, они, а значит, и преобразование $T_1 = (T_0 T_\infty)^{-1}$, их сохраняют.

Отсюда следует, что из пары собственных значений каждого из преобразований T_0, T_1, T_∞ можно выбрать одно так, что произведение полученных трех собственных значений равно 1. Но это невозможно, так как собственные значения преобразования T_0 по модулю не равны единице, а преобразований T_1, T_∞ — равны. Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы остается верным и при ненулевом кинетическом моменте эллипсоида, что выражается в добавлении к гамильтониану члена

$$H_1 = \frac{K}{\sqrt{X^2 + Y^2} + Y},$$

где K — квадрат кинетического момента [8]. Имеет место

Утверждение. При $c \neq 0$ система с гамильтонианом $H' = H + H_1$ не имеет в фазовом пространстве M дополнительного мероморфного первого интеграла.

Доказательство. Система с гамильтонианом H' (будем называть ее возмущенной) так же, как и система с гамильтонианом H, имеет инвариантное двумерное многообразие

$$N^2 = \{(X,\, Y,\, P_X,\, P_Y) \in M / X = P_X = 0\}.$$

Пусть $x \in \Gamma_h$, $h \neq 0$; $\Pi^1 \subset N^2$ — одномерная площадка, трансверсальная фазовой кривой Γ_h в точке x. Для любой петли на фазовой кривой Γ_h с отмеченной точкой x при достаточно малых K определено соответствующее отображение последования $(\Pi^1 \to \Pi^1)$ под действием системы, которое, ввиду сохраненного гамильтониана, является тождественным. Отсюда следует, что для каждого преобразования группы монодромии приведенной системы в вариациях (2) при достаточно малых K найдется близкое преобразование возмущенной приведенной системы в вариациях

$$\begin{cases} \dot{X} = 4Y P_X, \\ \dot{P}_X = \left(-\dfrac{2Y^5 P_Y^2}{(Y^3 + 16c^2)^2} + \dfrac{K}{4Y^3} \right) X \end{cases} \tag{4}$$

вдоль возмущенной фазовой кривой

$$\Gamma' = \{\omega \in N^2 | H'(\omega) = H'(x)\}$$

с той же отмеченной точкой x.

Так как группа $\bar{G}$ является подгруппой конечного индекса группы монодромии G уравнения (3), то для каждого преобразования $T \in G$ найдется натуральное k, такое, что $T^k \in \bar{G}$. В частности, существует натуральное k, такое, что $\bar{T} = T_0^k \in \bar{G}$. Так как собственные значения преобразования T_0 по модулю не равны единице, то собственные значения преобразования $\bar{T}$ также по модулю не равны единице.

Так как группа монодромии $\bar{G}$ системы (2) не имеет рациональной инвариантной функции, то, согласно [3], в ней найдется преобразование S, не сохраняющее объединение собственных прямых преобразования $\bar{T}$. При достаточно малых k возмущенное преобразование $\bar{T}$ также имеет собственные значения, по модулю не равные единице, и возмущенное преобразование S не сохраняет объединение его собственных направлений.

Отсюда следует [3], что при достаточно малых K группа монодромии возмущенной приведенной системы в вариациях (4) не имеет рациональной инвариантной функции, а сама возмущенная система — дополнительного мероморфного первого интеграла.

Для окончания доказательства остается заметить, что случай произвольных K сводится к случаю малых K линейной заменой импульсов и времени. $\blacksquare$

Автор благодарен А. В. Борисову за предложенную задачу.

Список литературы

[1] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen Über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoides // Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 4, с. 363–406.

[3] Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике: 1 // Функцион. анализ и его прил., 1982, т. 16, № 3, с. 30–41.

[4] Зиглин С. Л. О первых интегралах группы комплексных линейных преобразований и натуральных механических систем с однородным потенциалом // Матем. заметки, 2001, т. 70, вып. 6, с. 839–844.

[5] Churchill R. C. Two generator subgroups of SL(2, **C**) and the hypergeometric, Riemann, and Lamé equations. Differential algebra and differential equations // J. Symbolic Comput., 1999, vol. 28, nos. 4–5, pp. 521–545.

[6] Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., and Yoshida M. From Gauss to Painlevé: A modern theory of special functions. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1991. 347 p.

[7] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

[8] Борисов А. В., личное сообщение.