УДК 531.36,531.53

# Нелинейные колебания симпатических маятников

**А. П. Маркеев**
Институт проблем механики РАН
119526, Россия, Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1
markeev@ipmnet.ru

*Получено 23 августа 2010 г.*

Исследуется нелинейная задача о движении двух одинаковых маятников, связанных линейной упругой пружиной, в окрестности их устойчивого вертикального положения равновесия. Рассматривается случай, близкий к резонансу 1 : 1, когда жесткость пружины мала. Решена задача о существовании и орбитальной устойчивости периодических движений маятников, рождающихся из положения равновесия. Отмечено существование движений, асимптотических к одному из периодических движений. Дан анализ условно-периодических движений приближенной системы, учитывающей члены до четвертой степени включительно в нормализованной функции Гамильтона задачи. При помощи КАМ-теории рассмотрен вопрос о сохранении этих движений в полной нелинейной системе, учитывающей члены всех степеней в разложении функции Гамильтона в ряд в достаточно малой окрестности положения равновесия.

Ключевые слова: маятник, нелинейные колебания, резонанс, устойчивость

**A. P. Markeev**

**Nonlinear oscillations of sympathetic pendulums**

Nonlinear problem of motion of two identical pendulums connected by an elastic spring in the neighborhood of their stable vertical equilibrium is investigated. Stiffness of the spring is supposed small, i. e. the case close to resonance 1 : 1 is considered. The problem of existence and orbital stability of periodical motions of the pendulums arising from the equilibrium is solved. It is indicated existence of motions asymptotic to one of the periodical motions. An analysis of quasi-periodical motions of an approximate system is given in which members up to the forth order inclusively in the normalizing Hamiltonian of the problem are taken into account. Using KAM-theory the question is considered of preservation of these motions in the complete nonlinear system in which members of all orders in the series expansion of Hamiltonian in the sufficiently small neighborhood of the equilibrium are taken account.

Keywords: pendulum, nonlinear oscillation, resonance, stability
MSC 2010: 70E55,70H12,70E50

## 1. Введение

Рассмотрим два математических маятника длины $\ell$ и массы $m$. Точки подвеса $O_1$ и $O_2$ маятников находятся на неподвижной горизонтальной прямой, расстояние между ними постоянно и равно $d$. Маятники связаны линейной упругой пружиной. Расстояния точек прикрепления пружины к маятникам от их точек подвеса равны $b$. Пружина невесома, ее жесткость равна $k$, в ненапряженном состоянии длина пружины равна $d$. Будем исследовать движения маятников в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через отрезок $O_1O_2$. Положение маятников зададим углами $\varphi_1$ и $\varphi_2$, которые они составляют с вертикалью (рис. 1).

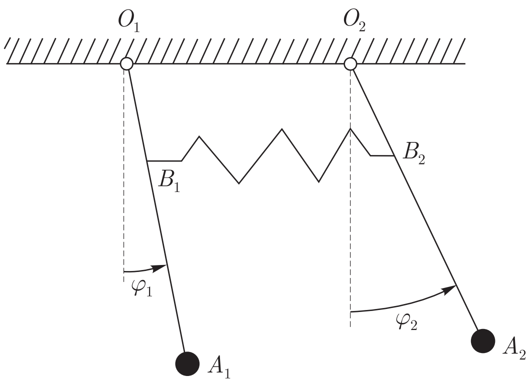


Рис. 1. Симпатические маятники ($O_1A_1 = O_2A_2 = \ell$, $O_1B_1 = O_2B_2 = b$, $O_1O_2 = d$).

Для кинетической и потенциальной энергий маятников имеем следующие выражения:

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\varphi}_1{}^2 + \dot{\varphi}_2{}^2), \tag{1.1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k\big[\sqrt{(cos\varphi_2 - cos\varphi_1)^2b^2 + [(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)b + d]^2} - d\big]^2 - \\ - mg\ell(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2), \tag{1.2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени $t$.

Рассматриваемые маятники называют симпатическими. Характер их малых линейных колебаний в окрестности положения равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ подробно изучен и описан в литературе [1].

Отметим основные свойства малых линейных колебаний маятников. Линеаризация уравнений движения с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{\ell}[\varphi_1 + \beta(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0, \quad \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{\ell}[\varphi_2 + \beta(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0, \tag{1.3}$$

где через $\beta$ обозначен безразмерный параметр, характеризующий величину жесткости пружины,

$$\beta = \frac{kb^2}{mg\ell}. \tag{1.4}$$

Если вместо $t$ ввести безразмерную независимую переменную $\tau$ по формуле

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{\ell}}t, \tag{1.5}$$

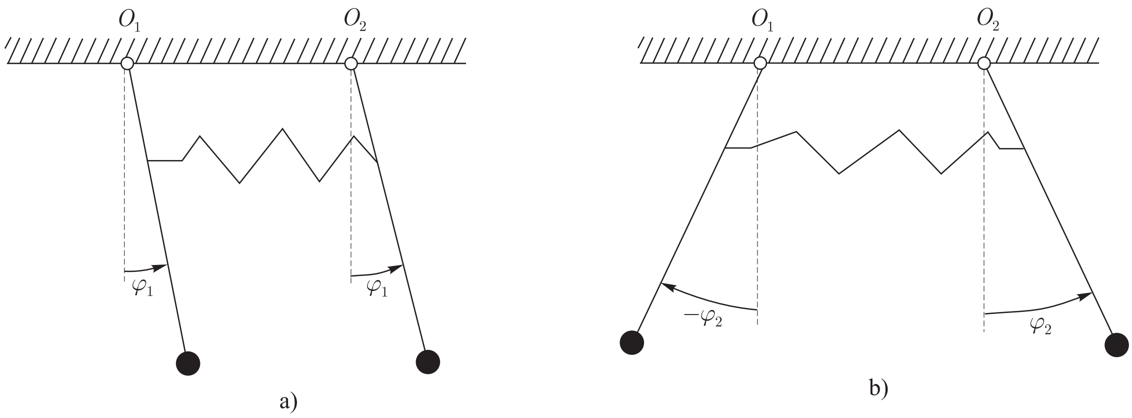


Рис. 2. Нормальные колебания симпатических маятников.

то общее решение системы (1.3) можно записать в виде

$$\varphi_1 = c_1 \sin(\tau + \alpha_1) + c_2 \sin[\sqrt{1+2\beta}\tau + \alpha_2], \tag{1.6}$$

$$\varphi_2 = c_1 \sin(\tau + \alpha_1) - c_2 \sin[\sqrt{1+2\beta}\tau + \alpha_2], \tag{1.7}$$

где $c_1$, $c_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ — произвольные постоянные.

Если одна из величин $c_1$ или $c_2$ равняется нулю, то равенства (1.6) и (1.7) описывают нормальные колебания [2, 3]. Первое нормальное колебание получается, если положить $c_2 = 0$. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2$, т. е. амплитуды колебаний маятников равны и колебания маятников происходят в одном направлении (рис. 2 a), частота колебаний равна $\sqrt{g/\ell}$.

При $c_1 = 0$ получаем второе нормальное колебание. Для него $\varphi_1 = -\varphi_2$, т. е. снова амплитуды колебаний обоих маятников равны, но колебания маятников происходят в противоположных направлениях (рис. 2 b). Частота второго нормального колебания равна $\sqrt{(1+2\beta)g/\ell}$.

В каждом из нормальных колебаний полные механические энергии маятников постоянны и равны.

Если же $c_1$ и $c_2$ отличны от нуля, то малые линейные колебания маятников имеют более сложный характер. В частности, будет происходить перекачка энергии от одного маятника к другому. Этот эффект особенно ярко выражен, когда жесткость пружины мала (более точно, когда малым является параметр $\beta$). В предельном случае $\beta = 0$ частоты нормальных колебаний равны, т. е. имеет место резонанс $1:1$; при малых, но отличных от нуля, значениях $\beta$ имеем ситуацию, близкую к резонансу $1:1$. Для иллюстрации рассмотрим колебания, когда в начальный момент $t = 0$ имеем $\varphi_1 = \sigma \neq 0$, а $\dot\varphi_1$ и $\varphi_2$, $\dot\varphi_2$ равняются нулю. Из (1.6) и (1.7) тогда следует, что $c_1 = c_2 = \sigma/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ и

$$\varphi_1 = \sigma \cos \frac{\sqrt{1+2\beta}-1}{2}\tau \cos \frac{\sqrt{1+2\beta}+1}{2}\tau, \tag{1.8}$$

$$\varphi_2 = \sigma \sin \frac{\sqrt{1+2\beta}-1}{2}\tau \sin \frac{\sqrt{1+2\beta}+1}{2}\tau. \tag{1.9}$$

При малых $\beta$ выражения (1.8) и (1.9) содержат множитель, медленно изменяющийся во времени. Колебания маятников имеют характер биений (см. рис. 3, где графики функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ построены для $\sigma = 0.5$, $\beta = 0.1$). С течением времени маятники обмениваются энергией, происходит перекачка энергии от одного маятника к другому. Например,

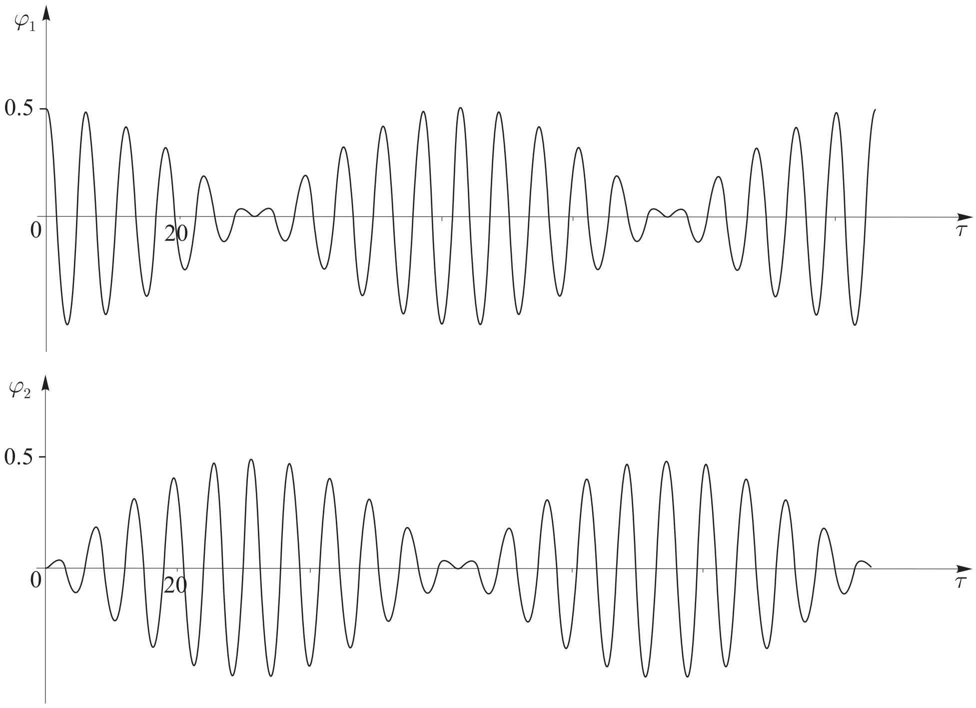


Рис. 3. Биения маятников вблизи резонанса 1 : 1.

когда отклонение первого маятника от вертикали максимально, второй маятник занимает вертикальное положение, и наоборот.

Физически очевидно следующее свойство симметрии изучаемой системы двух маятников: ее нелинейные дифференциальные уравнения движения с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$ не изменяются при замене $\varphi_1, \varphi_2 \to -\varphi_2, -\varphi_1$ (означающей просто перенумерацию маятников).

Отметим также, что уравнения движения допускают частные решения

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + \sin\varphi_1 = 0 \tag{1.10}$$

и

$$\varphi_1 = -\varphi_2, \quad \frac{d^2\varphi_2}{d\tau^2} + \sin\varphi_2 + \beta\sin 2\varphi_2 = 0. \tag{1.11}$$

Колебания, происходящие в окрестности равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и описываемые соотношениями (1.10) и (1.11), будем называть, соответственно, периодическими движениями первого и второго типов. В линейной задаче эти периодические движения переходят в первое и второе нормальные колебания соответственно.

Возникает вопрос о существовании периодических движений, происходящих в окрестности равновесия маятников и отличных от упомянутых периодических движений первого и второго типов. Важны также вопросы об устойчивости периодических движений и о характере движений маятников, не являющихся периодическими. Обсуждению всех этих вопросов посвящена данная статья. В ней рассматривается нелинейная задача о движении маятников в окрестности их положения равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Отклонения от положения равновесия считаются малыми. Предполагается также, что малой является величина параметра $\beta$, т. е. изучается случай, близкий к случаю резонанса 1 : 1.

## 2. Функция Гамильтона и ее преобразование

Импульс $p_{\varphi_i}$, соответствующий углу $\varphi_i$, равен $m\ell^2\dot{\varphi}_i$ $(i = 1, 2)$. Положим $\varphi_i = q_i$, $p_{\varphi_i} = m\ell\sqrt{g\ell}\, p_i$ и в качестве независимой переменной примем величину (1.5). Тогда выражение для функции Гамильтона можно записать в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \cos q_1 - \cos q_2 + \\ + \frac{1}{2}\,\beta\left[\sqrt{(\cos q_2 - \cos q_1)^2 + [(\sin q_2 - \sin q_1) + \gamma]^2} - \gamma\right]^2. \tag{2.1}$$

Здесь $\beta$ — безразмерный параметр (1.4), а $\gamma = d/b$.

Вблизи положения равновесия $q_i = p_i = 0\,(i = 1, 2)$ функция Гамильтона представляется в виде ряда

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{24}(q_1^4 + q_2^4) - \frac{\beta}{6}(q_1 - q_2)(q_1^3 - q_2^3) + O_5. \tag{2.2}$$

Здесь через $O_5$ обозначена совокупность членов ряда, степень которых относительно $q_1$, $q_2$, $p_1$, $p_2$ выше четвертой. Содержащийся в функции (2.1) параметр $\gamma$ входит в разложение (2.2) только в членах, степень которых относительно $q_1$, $q_2$, $p_1$, $p_2$ больше или равна пяти. Для дальнейшего (при получении представления функции Гамильтона в виде (2.6)) важно, что коэффициенты членов пятой степени в разложении (2.2) пропорциональны величине $\beta$.

Далее подвергнем функцию (2.2) нескольким каноническим преобразованиям. Их целью является приведение этой функции к форме, отражающей резонансный характер рассматриваемой задачи и упрощающей анализ движения маятников.

*Преобразование совокупности членов четвертой степени.* Сделаем каноническую замену переменных $q_i, p_1 \to u_i, v_i$, такую, чтобы не зависящие от $\beta$ члены до четвертой степени включительно в новых переменных были функциями от комбинаций $u_1^2 + v_1^2$ и $u_2^2 + v_2^2$. Это достигается при помощи следующей [3] замены переменных (в замене выписываем члены не выше третьей степени относительно $u_i, v_i$):

$$q_i = u_i + \frac{5}{192}u_i^3 + \frac{3}{64}u_i v_i^2, \quad p_i = v_i - \frac{5}{64}u_i^2 v_i - \frac{1}{64}v_i^3 \quad (i = 1, 2). \tag{2.3}$$

В переменных $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ функция Гамильтона (2.2) представляется рядом вида

$$H = \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2) - \frac{1}{64}[(u_1^2 + v_1^2)^2 + (u_2^2 + v_2^2)^2] + \frac{\beta}{2}(u_1 - u_2)^2 - \\ - \frac{3\beta}{64}(u_1 - u_2)(3u_1^3 - u_1 v_1^2 + u_2 v_2^2 - 3u_2^3) + O_5, \tag{2.4}$$

где через $O_5$ обозначена совокупность членов пятой и более высоких степеней относительно $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$.

*Введение малого параметра.* Учитывая малость величины $\beta$ и малость рассматриваемой окрестности положения равновесия, положим $\beta = \varepsilon^2\delta$ $(\delta > 0,\ 0 < \varepsilon \ll 1)$ и введем новые канонически сопряженные переменные $U_i, V_i$ по формулам

$$u_i = \varepsilon U_i, \quad v_i = \varepsilon V_i \quad (i = 1, 2). \tag{2.5}$$

Функция Гамильтона, отвечающая новым переменным $U_i$, $V_i$, будет такой:

$$H = \frac{1}{2}(U_1^2 + V_1^2 + U_2^2 + V_2^2) - \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta(U_1 - U_2)^2 - \frac{1}{64}\varepsilon^2[(U_1^2 + V_1^2)^2 + (U_2^2 + V_2^2)^2] + O(\varepsilon^4). \quad (2.6)$$

*Исключение нерезонансных членов порядка $\varepsilon^2$.* Следующий шаг в преобразовании функции Гамильтона состоит в построении близкой к тождественной, канонической, унивалентной замены переменных $U_i, V_i \to x_i, y_i$, которая исключает из разложения (2.6) нерезонансные члены порядка $\varepsilon^2$ (эти члены присутствуют в (2.6) благодаря слагаемому $1/2\,\varepsilon^2\delta(U_1 - U_2)^2$). После исключения нерезонансных членов функция Гамильтона будет зависеть только от комбинаций $x_1^2 + y_1^2$, $x_2^2 + y_2^2$, $x_1x_2 + y_1y_2$.

Замена $U_i, V_i \to x_i, y_i$ была построена при помощи классической теории возмущений [4]. С погрешностью порядка $\varepsilon^4$ она задается равенствами

$$U_1 = x_1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\delta(x_1 - x_2), \quad U_2 = x_2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\delta(x_1 - x_2),$$
$$V_1 = y_1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\delta(y_1 - y_2), \quad V_2 = y_2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\delta(y_1 - y_2). \quad (2.7)$$

В переменных $x_i, y_i$ функция Гамильтона (2.6) принимает вид

$$H = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta)(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta(x_1x_2 + y_1y_2) -$$
$$- \frac{1}{64}\,\varepsilon^2[(x_1^2 + y_1^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)^2] + O(\varepsilon^4). \quad (2.8)$$

*Переход к полярным канонически сопряженным переменным $\psi_i$, $r_i$ и получение циклической координаты в приближенной системе.* Каноническое унивалентное преобразование $x_i, y_i \to \psi_i$, $r_i$, задаваемое формулами

$$x_i = \sqrt{2r_i}\sin\psi_i, \qquad y_i = \sqrt{2r_i}\cos\psi_i \qquad (i = 1, 2), \quad (2.9)$$

преобразует функцию Гамильтона к следующей форме:

$$H = (1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\delta)(r_1 + r_2) - \varepsilon^2\delta\sqrt{r_1r_2}\cos(\psi_1 - \psi_2) - \frac{1}{16}\,\varepsilon^2(r_1^2 + r_2^2) + O(\varepsilon^4). \quad (2.10)$$

Если сделать еще одно каноническое унивалентное преобразование $\psi_1, \psi_2, r_1, r_2 \to \theta, \chi, R_1, R_2$ по формулам

$$\psi_1 = \theta + \chi, \quad \psi_2 = \chi, \quad r_1 = R_1, \quad r_2 = R_2 - R_1, \quad (2.11)$$

то функция Гамильтона запишется в виде

$$H = F_1 + F_2 + O(\varepsilon^4), \quad (2.12)$$

$$F_1 = \frac{\varepsilon^2}{8}R_1(R_2 - R_1) - \varepsilon^2\delta\sqrt{R_1(R_2 - R_1)}\cos\theta, \quad (2.13)$$

$$F_2 = (1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta)R_2 - \frac{\varepsilon^2}{16}R_2^2. \quad (2.14)$$

В приближенной системе, функция Гамильтона которой задается формулой (2.12), когда в ее правой части отброшены величины $O(\varepsilon^4)$, координата $\chi$ является циклической и существует интеграл $R_2 = c > 0$ — const. Изменение же переменных $\theta$, $R_1$ описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$F_1 = \frac{\varepsilon^2}{8}R_1(c - R_1) - \varepsilon^2\delta\sqrt{R_1(c - R_1)}\cos\theta. \quad (2.15)$$

## 3. Анализ системы с функцией Гамильтона (2.15)

Для исследования движений в полной системе с функцией Гамильтона (2.12) надо предварительно подробно изучить приближенную систему. Согласно предыдущему разделу, это приводит к необходимости анализа вспомогательной системы с одной степенью свободы, описываемой каноническими уравнениями с функцией Гамильтона (2.15). Если вместо $R_1$ ввести новый импульс $\rho = R_1/c$ $(0 < \rho < 1)$ и принять за независимую переменную величину $\xi = 1/8\varepsilon^2 c\tau$, то эти уравнения могут быть заданы функцией Гамильтона

$$\Gamma = \rho(1-\rho) - a\sqrt{\rho(1-\rho)}\cos\theta, \tag{3.1}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} = (1-2\rho)\big[1 - \frac{a\cos\theta}{2\sqrt{\rho(1-\rho)}}\big], \tag{3.2}$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = -a\sqrt{\rho(1-\rho)}\sin\theta. \tag{3.3}$$

В (3.1)–(3.3) принято обозначение

$$a = \frac{8\delta}{c} \quad (a > 0). \tag{3.4}$$

Система уравнений (3.2), (3.3) имеет интеграл

$$\Gamma = h = \mathrm{const}. \tag{3.5}$$

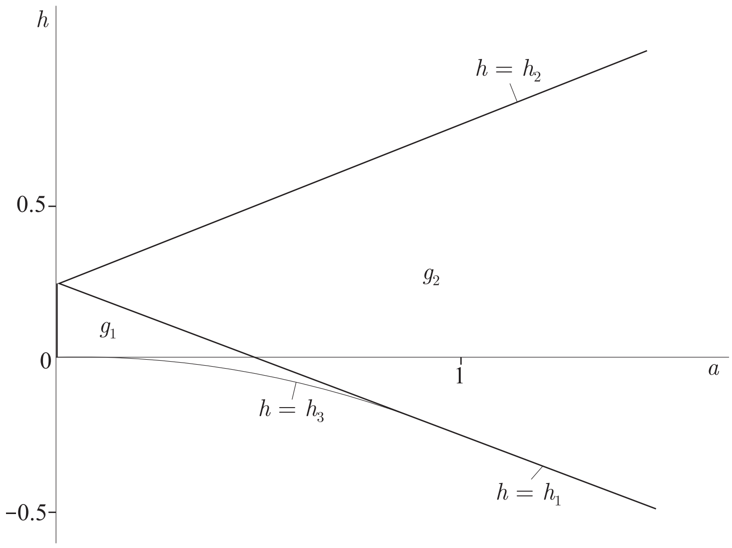


Рис. 4. Области допустимых значений $a$ и $h$ $\big(h_1 = \dfrac{1-2a}{4},\ h_2 = \dfrac{1+2a}{4},\ h_3 = -\dfrac{a^2}{4}\big)$.

Так как $|\cos\theta| \leqslant 1$, а $0 < \rho(1-\rho) \leqslant 1/4$, то величины $a$ и $h$, содержащиеся в соотношении (3.5), не могут быть вполне произвольными. Множество их допустимых значений показано на рис. 4. Оно состоит из внутренних точек областей $g_1$, $g_2$

$$g_1 = \big\{0 < a < 1, -\frac{a^2}{4} < h < \frac{1-2a}{4}\big\},\ g_2 = \big\{a > 0, \frac{1-2a}{4} < h < \frac{1+2a}{4}\big\} \tag{3.6}$$

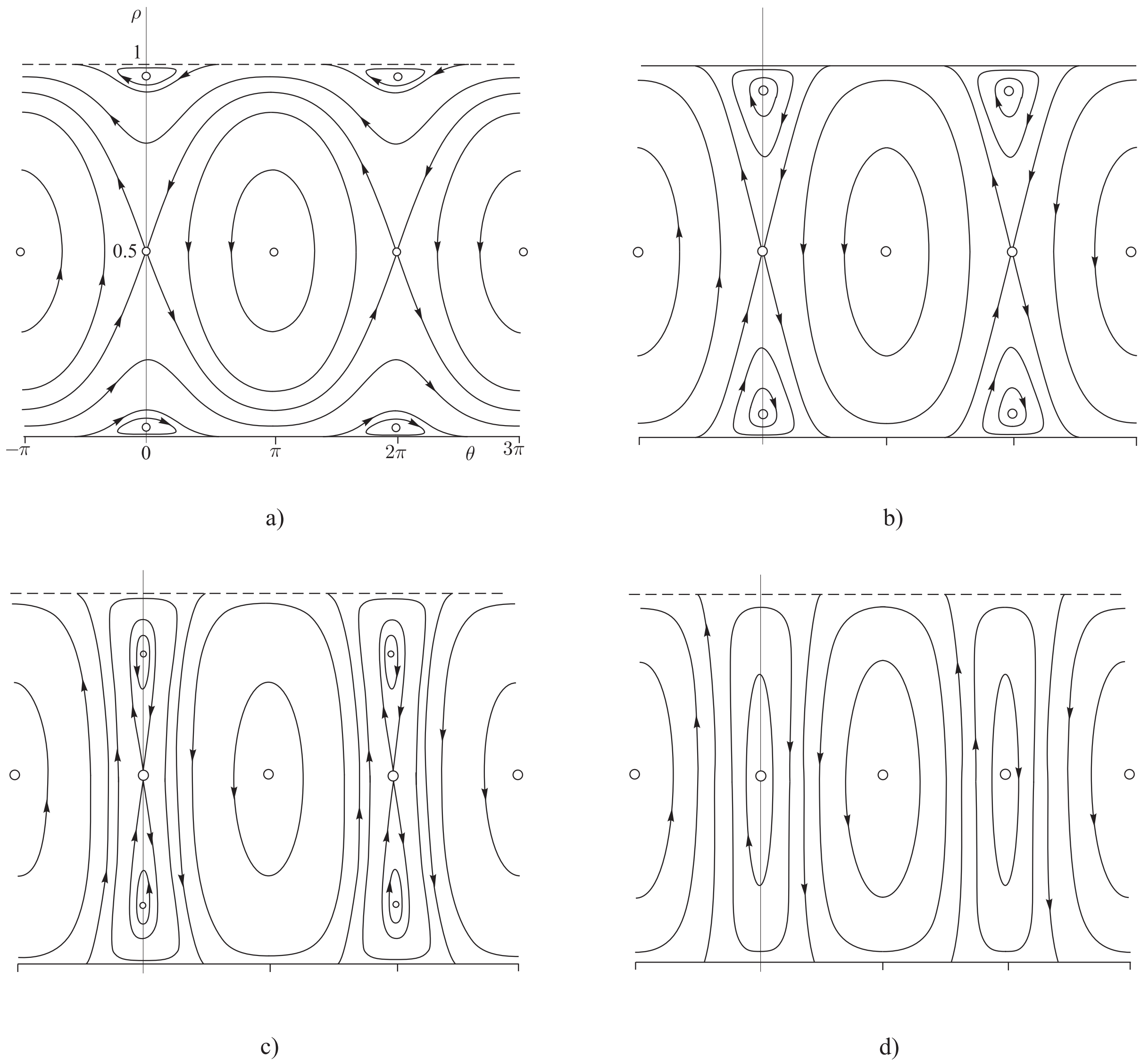


Рис. 5. Фазовые портреты системы (3.2), (3.3): a) $a = \frac{1}{4}$; b) $a = \frac{1}{2}$; c) $a = \frac{3}{4}$; d) $a = \frac{5}{4}$.

и их граничных точек (за исключением отрезка $0 \leqslant h \leqslant 1/4$ оси $a = 0$).

Рассмотрим движения системы, описываемой уравнениями (3.2), (3.3), для всех допустимых значений $a$ и $h$. Фазовые портреты системы показаны на рис. 5 для нескольких значений параметра $a$.

Сначала опишем случаи, когда значения $a$ и $h$ лежат на границах областей (3.6). Можно показать, что в этом случае система либо находится в положении равновесия $\theta = \theta_0 = \mathrm{const}$, $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, либо совершает движения, двоякоасимптотические при $\tau \to \pm\infty$ к одному из положений равновесия.

*Равновесия.* Если $a$ и $h$ лежат на части границы $h = h_1 = (1 - 2a)/4$ области $g_2$, на которой $a > 1$, то система находится в положении равновесия

$$\theta = 0, \quad \rho = 1/2. \tag{3.7}$$

Точка (3.7) является особой точкой типа центр для системы уравнений (3.2), (3.3).

Для значений $a$ и $h$, лежащих на границе $h = h_2 = (1-2a)/4$ области $g_2$, система находится в положении равновесия

$$\theta = \pi, \quad \rho = 1/2. \tag{3.8}$$

Точка (3.8) — особая точка типа центр для уравнений (3.2), (3.3) при всех $a$ и $h$, лежащих на прямой $h = h_2$.

Если $a$ и $h$ принадлежат криволинейной границе $h = h_3 = -a^2/4$ области $g_1$, то система находится в одном из двух положений равновесия

$$\theta = 0, \quad \rho = \cos^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \tag{3.9}$$

или

$$\theta = 0, \quad \rho = \sin^2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big), \tag{3.10}$$

где $\alpha = \arcsin a$. Для системы (3.2), (3.3) точки (3.9) и (3.10) — особые точки типа центр.

Замечание 1. В концевой точке $a = 1$, $h = -1/4$ криволинейной границы $h = h_3$ области $g_1$ равновесия (3.9) и (3.10) сливаются одно с другим и с равновесием (3.7). Точка $\theta = 0$, $\rho = 1/2$ в этом случае будет сложной особой точкой системы уравнений (3.2), (3.3). Здесь характеристическое уравнение линеаризованных в окрестности равновесия уравнений (3.2), (3.3) имеет двойной нулевой корень с непростыми элементарными делителями. Однако в нелинейной системе равновесие будет устойчивым, так как в его малой окрестности функция $\Gamma + 1/4$, где $\Gamma$ — функция Гамильтона (3.1), является определенно-положительной. Равновесие $\theta = 0, \rho = 1/2$ при $a = 1$ и $h = -1/4$ в дальнейшем не изучается.

Осталось рассмотреть значения $a$ и $h$, принадлежащие общей прямолинейной границе $h = h_1 = (1-2a)/4, 0 < a < 1$ областей $g_1$ и $g_2$. В этом случае существует равновесие (3.7). Оно неустойчиво, так как точка (3.7) для системы (3.2), (3.3) является особой точкой типа седло.

*Двоякоасимптотические движения.* При $h = h_1 = (1-2a)/4, 0 < a < 1$ система может не только находиться в равновесии (3.7), но и совершать движения, двоякоасимптотические при $\tau \to \pm\infty$ к этому равновесию.

Если $0 < a < 1/2$, то двоякоасимтотические траектории охватывают множество траекторий системы (3.2), (3.3) в окрестности устойчивого положения равновесия (3.8) (см. рис 5 a). Приняв в качестве начального значения при $\tau = 0$ максимальное значение $\rho(\tau)$ на такой двоякоасимтотической траектории, получим

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a(1-a)}}{ch\Big[\dfrac{\varepsilon^2 c\sqrt{a(1-a)}}{8}\tau\Big]}. \tag{3.11}$$

Если же $1/2 < a < 1$, то двоякоасимптотические траектории охватывают множество траекторий в окрестности устойчивых положений равновесия (3.9) и (3.10) (см. рис 5 c). Если за начальное значение $\rho(0)$ принять минимальное значение $\rho(\tau)$ на двоякоасимтотической траектории ($\rho(0) < 1/2$), то

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a(1-a)}}{ch\Big[\dfrac{\varepsilon^2 c\sqrt{a(1-a)}}{8}\tau\Big]}. \tag{3.12}$$

При известном $\rho(\tau)$ функция $\theta(\tau)$ определяется из интеграла (3.5).

*Колебания.* Для значений $a$ и $h$, лежащих внутри областей (3.6), движение имеет колебательный характер. На рис. 5 этим движениям соответствуют траектории, окружающие устойчивые равновесия (3.7)–(3.10). Выпишем решения системы (3.2), (3.3), соответствующие колебаниям. Интеграл (3.5) позволяет ограничиться нахождением только функции $\rho(\tau)$.

Исключив при помощи интеграла (3.5) величину $\theta$ из уравнения (3.3), приходим к уравнению

$$\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2 = F(\rho; a, h), \tag{3.13}$$

где

$$F(\rho;\, a, h) = a^2\rho(1-\rho) - [\rho(1-\rho) - h]^2. \tag{3.14}$$

Реальным движениям отвечают значения $\rho$, для которых $F(\rho;\, a, h) \geq 0$.

Для корней $\rho_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ уравнения $F(\rho; a, h) = 0$ имеем следующие выражения:

$$\rho_1 = \frac{1-\sqrt{1-\mu^2}}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{1-\sqrt{1-\nu^2}}{2}, \qquad \rho_3 = \frac{1+\sqrt{1-\nu^2}}{2},$$
$$\rho_4 = \frac{1+\sqrt{1-\mu^2}}{2}, \qquad \mu = \sqrt{a^2+4h} - a, \qquad \nu = \sqrt{a^2+4h} + a. \tag{3.15}$$

Сама функция $F(\rho;\, a, h)$ может быть записана в виде

$$F(\rho;\, a, h) = (\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)(\rho_3 - \rho)(\rho_4 - \rho).$$

Для значений $a$ и $h$, лежащих в области $g_1$, имеем $|\mu| < \nu < 1$. Здесь все корни $\rho_i$ вещественны, причем $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1/2 < \rho_3 < \rho_4 < 1$. Возможны два случая колебаний: когда $\rho_1 \leqslant \rho(\tau) \leqslant \rho_2$ и когда $\rho_3 \leqslant \rho(\tau) \leqslant \rho_4$. В этих случаях имеем, соответственно,

$$\rho(\tau) = \frac{\rho_1 + k(1-\rho_1)sn^2u}{1 + ksn^2u} \tag{3.16}$$

и

$$\rho(\tau) = \frac{\rho_4 + k(1-\rho_4)sn^2u}{1 + ksn^2u}. \tag{3.17}$$

В обоих случаях

$$u = \frac{\varepsilon^2 c}{16}(1-\rho_1-\rho_2)(\tau+\tau_0), \quad k = \frac{\rho_2-\rho_1}{1-\rho_1-\rho_2}, \tag{3.18}$$

где $\tau_0$ — произвольная постоянная. В (3.16)–(3.17) и ниже используются стандартные обозначения теории эллиптических функций и интегралов [5, 6].

Частота колебаний в обоих случаях одна и та же и вычисляется по формуле

$$\omega_1 = \varepsilon^2 c\, \frac{\pi(1-\rho_1-\rho_2)}{16K(k)}. \tag{3.19}$$

Для значений $a$ и $h$, из области $g_2$ выполняются неравенства $\nu > 1$, $-1 < \mu < 1$. Здесь корни $\rho_2$ и $\rho_3$ комплексно-сопряженные, а $\rho_1$ и $\rho_4$ вещественные, причем $0 < \rho_1 < \rho_4 < 1$. При колебаниях функция $\rho(\tau)$ удовлетворяет неравенству $\rho_1 \leqslant \rho(\tau) \leqslant \rho_4$, причем

$$\rho(\tau) = \frac{1-(1-2\rho_1)cnu}{2}, \tag{3.20}$$

где

$$u = \frac{\varepsilon^2 c}{16}\sqrt{\nu^2 - \mu^2}(\tau + \tau_0)\,, \quad k = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}}. \tag{3.21}$$

Частота колебаний (как и в области $g_1$, примем для нее обозначение $\omega_1$) задается равенством

$$\omega_1 = \varepsilon^2 c \frac{\pi\sqrt{\nu^2-\mu^2}}{32K(k)}. \tag{3.22}$$

## 4. Полная система. Семейства периодических движений и их устойчивость

Положениям равновесия (3.7)–(3.10) системы (3.2), (3.3) в приближенной системе с функцией Гамильтона $F_1 + F_2$ соответствуют решения, для которых

$$R_1 = c\rho_0, \quad R_2 = c, \quad \theta = \theta_0, \quad d\chi/d\tau = \Omega, \tag{4.1}$$

$$\Omega = \frac{\partial\,(F_1+F_2)}{\partial\,R_2} = 1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\delta\Big(1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{1-\rho_0}}\cos\theta_0\Big) - \frac{1}{8}\varepsilon^2 c(1-\rho_0). \tag{4.2}$$

Далее, следуя статьям [7, 8], можно при помощи изоэнергетической редукции перейти к уравнениям Уиттекера и методом Пуанкаре показать, что решениям (4.1), (4.2) приближенной системы в полной системе с функцией Гамильтона (2.12) соответствуют семейства периодических движений. Существенным параметром этих семейств является параметр $c$, при $c = 0$ все семейства вырождаются в положение равновесия маятников $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Для всех периодических движений их период по $\tau$ стремится к $2\pi$, когда $\varepsilon \to 0$. Четырем положениям равновесия (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10) отвечают четыре семейства периодических движений. Назовем их семействами первого, второго, третьего и четвертого типов соответственно.

Из (4.1), (4.2) и цепочки замен переменных (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11) можно получить выражения для периодических движений в исходных переменных $\varphi_1, \varphi_2$.

*Семейство периодических движений первого типа.* Для него

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varepsilon\sqrt{c}\sin\chi + \varepsilon^3 c\sqrt{c}\Big(\frac{1}{192}\sin 3\chi + \frac{1}{32}\sin\chi\Big) + O(\varepsilon^4), \tag{4.3}$$

$$\chi = \Omega_2(\tau + \tau_0), \quad \Omega_2 = 1 - \frac{1}{16}\,\varepsilon^2 c + O(\varepsilon^4). \tag{4.4}$$

*Семейство периодических движений второго типа.* Здесь

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = -\varepsilon\sqrt{c}\sin\chi + \varepsilon^3 c\sqrt{c}\Big[\frac{1}{32}(2a-1)\sin\chi - \frac{1}{192}\sin 3\chi\Big] + O(\varepsilon^4), \tag{4.5}$$

$$\chi = \Omega_2(\tau + \tau_0), \quad \Omega_2 = 1 + \frac{1}{16}\,\varepsilon^2 c(2a-1) + O(\varepsilon^4). \tag{4.6}$$

Функции $\varphi_1$,$\varphi_2$ из (4.3) и (4.5) удовлетворяют соотношениям (1.10) и (1.11) и могли бы быть получены из них непосредственно без использования преобразований § 2.

*Семейства периодических движений третьего и четвертого типов.* Для решений третьего типа порождающим является равновесие (3.9). Для этого семейства

$$\varphi_1 = \varepsilon\sqrt{2c}\cos\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sin\chi + \\ + \varepsilon^3\,\frac{c\sqrt{2c}}{192}\cos\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\Big[6(2-a)\sin\chi + (1+\sqrt{1-a^2})\sin 3\chi\Big] + O(\varepsilon^4), \tag{4.7}$$

$$\varphi_2 = \varepsilon\sqrt{2c}\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\sin\chi + \\ + \varepsilon^3\,\frac{c\sqrt{2c}}{192}\sin\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\Big[6(2-a)\sin\chi + (1-\sqrt{1-a^2})\sin 3\chi\Big] + O(\varepsilon^4), \tag{4.8}$$

$$\chi = \Omega_2(\tau+\tau_0), \quad \Omega_2 = 1 + \frac{1}{16}\,\varepsilon^2 c(a-2) + O(\varepsilon^4). \tag{4.9}$$

Для решений четвертого типа порождающим является равновесие (3.10). Для этих решений $\varphi_1$ и $\varphi_2$ равняются взятым со знаком минус левым частям равенств (4.8) и (4.7) соответственно. Это согласуется с отмеченным в первом параграфе свойством симметрии уравнений движения маятников.

Траектории периодических движений первого и второго типов в плоскости $\varphi_1, \varphi_2$ лежат на прямых $\varphi_2 = \varphi_1$ и $\varphi_2 = -\varphi_1$. Периодические движения третьего и четвертого типов не имеют такого простого геометрического представления. Однако если в выражениях $\varphi_1$ и $\varphi_2$ пренебречь величинами выше первой степени $\varepsilon$, то для периодических движений третьего и четвертого типов имеем, соответственно, $\varphi_2 = tg(\alpha/2)\varphi_1$ и $\varphi_2 = ctg(\alpha/2)\varphi_1$.

*Устойчивость периодических движений.* Исследуем орбитальную устойчивость найденных периодических движений. С этой целью сделаем в функции Гамильтона (2.12) преобразование $\theta, \chi, R_1, R_2 \to \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, позволяющее свести задачу об орбитальной устойчивости периодических движений к задаче об устойчивости по части переменных автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Это преобразование получим в результате двух последовательных канонических унивалентных преобразований. При первом преобразовании переменные $\chi$ и $R_2$ не изменяются, а вместо $\theta$ и $R_1$ вводятся переменные $Q_1$ и $P_1$ по формулам

$$Q_1 = \sqrt{2R_1}\sin\theta, \quad P_1 = \sqrt{2R_1}\cos\theta.$$

Переменные $Q_1$, $P_1$, $R_2$ для каждого из периодических движений могут быть представлены в виде

$$Q_1 = Q_1{}^* = \sqrt{2c\rho_0}\sin\theta_0 + \varepsilon f_1(\chi,\varepsilon), \quad P_1 = P_1{}^* = \sqrt{2c\rho_0}\cos\theta_0 + \varepsilon f_2(\chi,\varepsilon), \\ R_2 = R_2{}^* = c + \varepsilon f_3(\chi,\varepsilon), \tag{4.10}$$

где функции $f_i$ $(i = 1,2,3)$ являются аналитическими относительно $\varepsilon$ и $2\pi$-периодическими по $\chi$.

Второе преобразование $Q_1, \chi, P_1, R_2 \to \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ возьмем таким:

$$Q_1 = Q_1{}^* + \xi_1,\ \chi = \xi_2,\ P_1 = P_1{}^* + \eta_1,\ R_2 = R_2{}^* + \xi_1\frac{\partial P_1{}^*}{\partial\chi} - \eta_1\frac{\partial Q_1{}^*}{\partial\chi} + \eta_2. \tag{4.11}$$

В переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ периодические движения записываются в виде равенств

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \xi_2 = \Omega_2(\tau+\tau_0),$$

а функция Гамильтона (2.12) представима в виде сходящегося ряда по степеням $\xi_1, \eta_1, \eta_2$. Если отбросить не зависящие от $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_1$, $\eta_2$ аддитивные члены, то этот ряд запишется в следующем виде:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \tag{4.12}$$

где $H_k$ — формы степени $k$ относительно $\xi_1, \eta_1, \sqrt{|\eta_2|}$. Коэффициенты этих форм — $2\pi$-периодические по $\xi_2$ функции, представимые рядами по степеням $\varepsilon$, причем их зависимость от $\xi_2$ начинается с членов, степень которых по $\varepsilon$ не ниже четвертой. Многоточием в (4.12) обозначена совокупность членов пятой и более высоких степеней относительно $\xi_1, \eta_1, \sqrt{|\eta_2|}$.

Задача об устойчивости рассматриваемых периодических движений маятников эквивалентна задаче об устойчивости системы с функцией Гамильтона (4.12) по отношению к переменным $\xi_1$, $\eta_1$, $\eta_2$. Она может быть решена при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [9, 10] и при помощи теоремы Арнольда–Мозера об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [11, 12]. Соответствующий конструктивный алгоритм исследования предложен в статье [13].

Рассмотрим семейство периодических движений (4.3), (4.4) первого типа. Для него (см. (3.7)) $\theta_0 = 0$, $\rho_0 = 1/2$. Если не выписывать члены четвертой и более высоких степеней относительно $\varepsilon$, то для форм $H_2$, $H_3$, $H_4$ будем иметь следующие выражения:

$$H_2 = \varepsilon^2 c\Big(\frac{a}{32}\xi_1^2 + \frac{a-1}{8}\eta_1^2\Big) + \Big(1 - \frac{\varepsilon^2 c}{16}\Big)\eta_2, \tag{4.13}$$

$$H_3 = \varepsilon^2\sqrt{c}\,\Big(\frac{a-2}{16}\xi_1^2\eta_1 + \frac{a-1}{8}\eta_1^3\Big) - \varepsilon^2\sqrt{c}\,\frac{a-1}{8}\,\eta_1\eta_2, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} H_4 = \varepsilon^2\Big(\frac{a-4}{128}\xi_1^4 + \frac{3a-2}{32}\xi_1^2\eta_1^2 + \frac{5a-1}{32}\eta_1^4\Big) - \\ - \varepsilon^2\Big(\frac{a-2}{32}\xi_1^2 + \frac{3a-1}{16}\eta_1^2\Big)\eta_2 + \varepsilon^2\,\frac{a-2}{32}\eta_2^2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Сначала изучим первое (линейное) приближение. Как всегда в автономной гамильтоновой системе, два характеристических показателя равны нулю. Решение вопроса об орбитальной устойчивости зависит от оставшейся пары характеристических показателей.

Линейное приближение описывается системой уравнений с функцией Гамильтона $H_2$. Упомянутая пара характеристических показателей — это корни характеристического уравнения системы для $\xi_1, \eta_1$. Это уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \varepsilon^4 c^2\,\frac{a(a-1)}{64}\big(1 + O(\varepsilon^2)\big) = 0. \tag{4.16}$$

Если $0 < a < 1$, то при малых $\varepsilon$ корни уравнения (4.16) вещественны: $\lambda = \pm æ$, где

$$æ = \varepsilon^2 c\,\frac{\sqrt{a(1-a)}}{8} + O(\varepsilon^4). \tag{4.17}$$

Поэтому, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, периодические движения маятников первого типа неустойчивы, если $0 < a < 1$ и $\varepsilon$ — достаточно малая величина.

Если же $a > 1$, то характеристические показатели чисто мнимые: $\lambda = \pm i\Omega_1$, где

$$\Omega_1 = \varepsilon^2 c\,\frac{\sqrt{a(a-1)}}{8} + O(\varepsilon^4). \tag{4.18}$$

В этом случае рассматриваемые периодические движения орбитально устойчивы в первом приближении. Но, в отличие от случая $0 < a < 1$, здесь для строгого решения вопроса об устойчивости рассмотрения первого приближения недостаточно и необходим анализ нелинейных уравнений возмущенного движения.

По алгоритму статьи [13] можно построить каноническое преобразование $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow$ $\rightarrow \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$, приводящее функцию Гамильтона (4.12)–(4.15) к нормальной форме

$$H = \Omega_1\nu_1 + \Omega_2\nu_2 + c_{20}\nu_1^2 + c_{11}\nu_1\nu_2 + c_{02}\nu_2^2 + ..., \tag{4.19}$$

где $\Omega_1$ и $\Omega_2$ определены равенствами (4.18) и (4.4), а

$$c_{20} = \frac{\varepsilon^2(4a-1)}{64(a-1)} + O(\varepsilon^4), \quad c_{11} = -\frac{\varepsilon^2}{16}\sqrt{\frac{a}{a-1}} + O(\varepsilon^4), \quad c_{02} = -\frac{\varepsilon^2}{32} + O(\varepsilon^4). \tag{4.20}$$

Многоточием в (4.19) обозначены члены выше второй степени относительно $\nu_1, \nu_2$.

Пусть

$$\Delta = c_{20}\Omega_2^2 - c_{11}\Omega_1\Omega_2 + c_{02}\Omega_1^2. \tag{4.21}$$

Из (4.4), (4.18) и (4.20) получаем, что для рассматриваемых периодических движений

$$\Delta = \frac{\varepsilon^2(4a-1)}{64(a-1)} + O(\varepsilon^4). \tag{4.22}$$

При $a > 1$ и при достаточно малых значениях $\varepsilon$ величина $\Delta$ отлична от нуля. Отсюда, на основании теоремы Арнольда–Мозера, следует орбитальная устойчивость периодических движений маятников первого типа.

Кратко опишем результаты исследования орбитальной устойчивости периодических движений маятников из семейств второго, третьего и четвертого типов. Оказалось, что в первом приближении все они орбитально устойчивы. Для периодических движений (4.5), (4.6) второго типа величина $\Omega_2$ определена в (4.6), а

$$c_{20} = \frac{\varepsilon^2(4a+1)}{64(a+1)} + O(\varepsilon^4), \quad c_{11} = -\frac{\varepsilon^2}{16}\sqrt{\frac{a}{a+1}} + O(\varepsilon^4), \quad c_{02} = -\frac{\varepsilon^2}{32} + O(\varepsilon^4),$$
$$\Omega_1 = -\varepsilon^2 c\,\frac{\sqrt{a(a+1)}}{8} + O(\varepsilon^4), \quad \Delta = \frac{\varepsilon^2(4a+1)}{64(a+1)} + O(\varepsilon^4).$$

Для движений третьего и четвертого типов $\Omega_2$ задана в (4.9), а

$$c_{20} = \frac{\varepsilon^2(a^2+2)}{16(a^2-1)} + O(\varepsilon^4), \quad c_{11} = \frac{\varepsilon^2}{8\sqrt{1-a^2}} + O(\varepsilon^4), \quad c_{02} = -\frac{\varepsilon^2}{16} + O(\varepsilon^4),$$
$$\Omega_1 = \varepsilon^2 c\,\frac{\sqrt{1-a^2}}{8} + O(\varepsilon^4), \quad \Delta = \frac{\varepsilon^2(a^2+2)}{16(a^2-1)} + O(\varepsilon^4).$$

При достаточно малых $\varepsilon$ величина $\Delta$ для периодических движений второго, третьего и четвертого типов отлична от нуля. Следовательно, согласно тереме Арнольда–Мозера, эти периодические движения маятников орбитально устойчивы.

*Об асимптотических движениях.* В § 3 при анализе системы (3.2), (3.3) показано существование двоякоасимптотических траекторий, стремящихся при $\tau \rightarrow \pm\infty$ к неустойчивому (при $0 < a < 1$) положению равновесия (3.7) системы (3.2), (3.3). Выше показано, что в полной системе, описываемой функцией Гамильтона (2.12), этому неустойчивому равновесию соответствуют орбитально неустойчивые периодические движения (4.3), (4.4) первого типа.

На основании известных [9] результатов теории асимптотических решений дифференциальных уравнений можно утверждать, что в достаточно малой окрестности неустойчивой периодической траектории первого типа существуют два асимптотических к ней (при $\tau \to +\infty$ или $\tau \to -\infty$) однопараметрических семейства траекторий. Решения, отвечающие этим траекториям, могут быть представлены сходящимися рядами по степеням величин red $c^{'}e^{-æ\tau}$ или $c^{''}e^{æ\tau}$, где æ задается равенством (4.17), а $c^{'}$ и $c^{''}$ — произвольные постоянные, являющиеся параметрами упомянутых семейств асимтотических траекторий.

## 5. Полная система. Условно-периодические движения

Пусть значения $a$ и $h$ лежат внутри одной из областей $g_1$ или $g_2$. Тогда в приближенной системе движение имеет колебательный характер. При исследовании колебаний в полной системе удобно использовать переменные действие–угол приближенной системы.

Введем переменные действие $I_1$ и $I_2$. Так как в приближенной системе координата $\chi$ циклическая, то $I_2 = R_2$. Величина же $I_1$ задается формулой

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\oint R_1\, d\theta = \frac{I_2}{2\pi}\oint \rho(\theta, h; a)\, d\theta \quad \big(a = \frac{8\delta}{I_2}\big), \tag{5.1}$$

где функция $\rho(\theta, h; a)$ определяется из соотношения (3.5). Интеграл в (5.1) вычисляется по полному циклу изменения переменных $\rho$ и $\theta$, в котором $\rho$ определяется равенствами (3.16), (3.17) в области $g_1$ и равенством (3.20) в области $g_2$. Соответствующие $I_1$ и $I_2$ угловые переменные обозначаем через $w_1$ и $w_2$.

Соотношение (5.1) можно разрешить относительно $h$. В результате получим

$$h = \Phi\big(\frac{I_1}{I_2}, \frac{8\delta}{I_2}\big). \tag{5.2}$$

В переменных $I_i, w_i\, (i = 1, 2)$ функция Гамильтона $F_1 + F_2$ приближенной системы не зависит от угловых переменных и записывается в следующей форме:

$$H^* = H^{(0)}(I_2) + \varepsilon^2 H^{(2)}(I_1, I_2), \tag{5.3}$$

где

$$H^{(0)}(I_2) = I_2, \quad H^{(2)}(I_1, I_2) = \frac{1}{2}\,\delta I_2 - \frac{1}{16}I_2^2 + \frac{1}{8}I_2^2\Phi\big(\frac{I_1}{I_2}, \frac{8\delta}{I_2}\big). \tag{5.4}$$

Частота $\omega_1$ колебаний, определяемая (при $c = I_2$) формулой (3.19) в области $g_1$ и формулой (3.22) в области $g_2$, удовлетворяет равенству

$$\omega_1 = \frac{\partial H^*}{\partial I_1} = \frac{1}{8}\,\varepsilon^2 I_2 \Phi', \tag{5.5}$$

где $\Phi'$ — производная функции $\Phi$ по переменной $I_1/I_2$. Вторая частота $\omega_2$ определяется формулой

$$\omega_2 = \frac{\partial H^*}{\partial I_2} = 1 + O(\varepsilon^2). \tag{5.6}$$

Если начальные условия таковы, что отношение $\omega_1 : \omega_2$ не является рациональным числом, то движение в приближенной системе будет условно-периодическим с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$.

Теперь рассмотрим полную систему с функцией Гамильтона (2.12). В переменных $I_i, w_i\,(i = 1, 2)$ она записывается в виде

$$H = H^{(0)}(I_2) + \varepsilon^2 H^{(2)}(I_1, I_2) + \varepsilon^4 H^{(4)}(I_1, I_2, w_1, w_2; \varepsilon), \tag{5.7}$$

где $H^{(0)}$, $H^{(2)}$ — функции из (5.4), а функция $H^{(4)}$ является аналитической по всем своим переменным и $2\pi$-периодична по $w_1$, $w_2$.

В рассматриваемой задаче имеет место случай собственного вырождения [11], так как при $\varepsilon = 0$ функция Гамильтона (5.7) зависит только от одной переменной действие $I_2$. При этом выполняются неравенства

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial I_2} \neq 0, \qquad \frac{\partial H^{(2)}}{\partial I_1} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 H^{(2)}}{\partial I_1^2} \neq 0 \tag{5.8}$$

В силу (5.5), (5.6) и (3.19), (3.22) первые два из неравенств (5.8), очевидно, выполняются. Проверим выполнение третьего неравенства. Вычисления, опирающиеся на соотношения (3.19), (3.22) и (5.5), показывают, что в области $g_1$

$$\frac{\partial^2 H^{(2)}}{\partial I_1^2} = -\frac{\pi^2(1+4h)\,d_1}{8\sqrt{(1-\nu^2)(1-\mu^2)}K^3(k)}, \tag{5.9}$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{(1-4h)^2 - 4a^2} + (1-4h)}{4(1+4h)}K(k) + a\frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)\sqrt{a^2+4h}},$$

а в области $g_2$

$$\frac{\partial^2 H^{(2)}}{\partial I_1^2} = \frac{\pi^2 a\, d_2}{16(\nu^2-1)(1-\mu^2)K^3(k)}, \tag{5.10}$$

$$d_2 = (\nu-\mu)(\nu\mu+1)E(k) - \mu(\nu^2-1)K(k).$$

Далее воспользуемся тем, что эллиптические интегралы удовлетворяют неравенству

$$K(k) > E(k) > (1-k^2)K(k).$$

Принимая во внимание, что в области $g_1$ значения величины $h$ лежат в интервале $(-1/4, 1/4)$, получаем, что в этой области $d_1 > 0$, а $\partial^2 H^{(2)}/\partial I_1^2 < 0$.

В области $g_2$ рассмотрим два случая: $\mu \geq 0$ и $\mu < 0$. В первом случае

$$d_2 > [(\nu-\mu)(\nu\mu+1)(1-k^2) - \mu(\nu^2-1)]K(k) = \frac{(\nu^2-1)(1-\mu^2)}{\nu+\mu}K(k) > 0,$$

а во втором

$$d_2 > [(\nu-\mu)(\nu\mu+1) - \mu(\nu^2-1)]E(k) = \nu(1-\mu^2)K(k) > 0.$$

В обоих случаях $\partial^2 H^{(2)}/\partial I_1^2 > 0$.

Таким образом, в областях $g_1$ и $g_2$ все три неравенства (5.8) выполнены. Следовательно [11, 14], движение в полной системе с функцией Гамильтона (2.12) для большинства начальных условий будет условно-периодическим с частотами $\omega_1$ и $\omega_2$. Только доля $O(exp(-a_1\varepsilon^{-2}))$, где $a_1 = const > 0$, фазового пространства не заполнена условно-периодическими траекториями. При этом для всех начальных условий величины $I_i(\tau)\,(i = 1, 2)$ при всех $\tau$ близки к их начальным значениям:

$$|I_i(\tau) - I_i(0)| < a_2\varepsilon^2 \quad (a_2 = \text{const}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-01-00363) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ — 3797.2010.1).

## Список литературы

[1] Зоммерфельд А. Механика. М.: Иностр. лит-ра, 1947. 392 с.

[2] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.

[3] Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.

[4] Джакалья Г. Е. О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.

[5] Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.–Л.: АН СССР, 1941. 235 с.

[6] Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integral for engineers and physicists. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer, 1954. 355 p.

[7] Маркеев А. П. О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // ПММ, 1998, т. 62, вып. 3, с. 372–382.

[8] Маркеев А. П. Об устойчивости и нелинейных колебаниях гамильтоновой системы в одном резонансном случае // Изв. РАН. МТТ, 1998, № 4, с. 38–49.

[9] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 5 тт.: Т. 2 / А. М. Ляпунов. М.–Л.: АН СССР, 1956. С. 7–263.

[10] Малкин И. Г. Теория устойчивости гамильтоновых систем. М.: Наука, 1966. 530 с.

[11] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91–192.

[12] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168 с.

[13] Маркеев А. П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ, 2002, т. 66, вып. 6, с. 929–938.

[14] Нейштадт А. И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1016–1025.