УДК 532.5

О новом разделении переменных для частного случая волчка Ковалевской

А. В. Цыганов
С.-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Получено 28 января 2010 г.

Мы обсуждаем алгоритм построения совместных полиномиальных бивекторов Пуассона для волчка Ковалевской при нулевом значении интеграла площадей. Эти бивекторы затем используются для построения новых вещественных переменных разделения для данной системы.

Ключевые слова: волчок Ковалевской, разделение переменных, бигамильтонова геометрия, дифференциальная геометрия, алгебраические кривые

A. V. Tsiganov

New variables of separation for particular case of the Kowalewski top

We discuss the polynomial bi-Hamiltonian structures for the Kowalewski top in special case of zero square integral. An explicit procedure to find variables of separation and separation relations is considered in detail.

Keywords: Kowalewski top, separation of variables, bi-Hamiltonian geometry, differential geometry, algebraic curves
MSC 2010: 70H20, 70H06, 37K10

1. Введение

Хорошо известно, что в трехмерном пространстве тяжелое твердое тело с неподвижной точкой представляет интегрируемую динамическую систему лишь в случаях Эйлера (1758), Лагранжа (1788) и Ковалевской (1888) [2, 8, 9].

В своей работе [10] С. В. Ковалевская не только нашла новый случай интегрируемости, но и предложила замечательную замену переменных, которая позволила разделитьпеременные в соответствующем уравнении Гамильтона–Якоби и свести решение уравнений движения к решению задачи об обращении отображения Абеля на якобианегиперэллиптической кривой рода два [1, 2]. Существует множество различных толкованийи объяснений преобразования, предложенного Ковалевской, но до сих пор не ясно, как получать подобныепреобразования для других интегрируемых систем с интегралами движения старших степеней.

В данной работе мы обсуждаем алгоритм построения переменных разделения, в котором не используются ни мистические подстановки, ни добавочная информация, такая как гамильтонова структура уравнений движений на орбитах алгебр Ли, матрицы Лакса, r-матрицы, связи с солитонными уравнениями и т. д. Мы применяем этот метод для *вычисления* новых переменных разделения для волчка Ковалевской при нулевом значении интеграла площадей.

С другой стороны, мы еще раз хотим показать, как метод разделения переменных можно использовать для построения различных переменных разделения, которые лежат на различных алгебраических кривых [26]. Канонические преобразования между различными переменными разделения порождают различные отношения между алгебраическими кривыми, которые, в свою очередь, порождают различные редукции интегралов Абеля, накрытия кривых, изогению якобианов и т. д. Такие отношения между кривыми активно изучаются в алгебраической геометрии, теории чисел, теории управления, современной криптографии и т. д. [1, 3, 12].

2. Биинтегрируемость

Движения твердого тела вокруг закрепленной точки описываются системой уравнений Эйлера–Пуассона

$$\dot{J} = J \times \omega + x \times \rho, \qquad \dot{x} = x \times \omega. \tag{2.1}$$

Здесь ω_i и J_i — компоненты угловой скорости и углового момента относительно подвижной системы координат, жестко связанной с телом и такой, что ее оси проходят через точку закрепления и совпадают с главными осями инерции. Положение тела задается компонентами вектора Пуассона x_i, а $\rho = \mu\, r$ — вес тела, умноженный на вектор, описывающий положение центра масс данного твердого тела.

Уравнения движения являются гамильтоновыми уравнениями на алгебре Ли $e^*(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства, которая естественно является пуассоновым многообразием. В стандартных координатах $z = (x_1, x_2, x_3, J_1, J_2, J_3)$ на алгебре Ли $e^*(3)$ соответствующий бивектор Пуассона равен

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ * & 0 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ * & * & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ * & * & * & 0 & J_3 & -J_2 \\ * & * & * & * & 0 & J_1 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

а его функции Казимира имеют вид

$$P\,dC_{1,2}=0,\quad C_1=|x|^2\equiv\sum_{k=1}^{3}x_k^2,\quad C_2=\langle x,J\rangle\equiv\sum_{k=1}^{3}x_kJ_k. \tag{2.2}$$

Фиксируя значения этих функций Казимира

$$C_1=a^2,\quad C_2=b,$$

мы получим четырехмерные симплектические листы $\mathcal{O}_{ab}$, которые топологически эквивалентны кокасательному расслоению двумерной сферы $T^*\mathcal{S}^2$ радиуса a. Однако хорошо известно, что симплектическая структура $\mathcal{O}_{ab}$ отличается от стандартной симплектической структуры многообразия $T^*\mathcal{S}^2$ добавкой магнитного слагаемого, пропорционального значению второй функции Казимира b.

Всюду далее под фазовым пространством понимается один из этих симплектических листов. Интегралы уравнений движения в случае Ковалевской имеют вид

$$\begin{aligned}&H_1=J_1^2+J_2^2+2J_3^2+c_1x_1^2,\quad c_1\in\mathbb{R},\\&H_2=(J_1^2+J_2^2)^2-2\Big(x_1(J_1^2-J_2^2)+2x_2J_1J_2\Big)c_1+(x_1^2+x_2^2)c_1^2.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Система Ковалевской является интегрируемой системой на фазовом пространстве $\mathcal{O}_{ab}$, так как два независимых интеграла движения $H_{1,2}$ (2.3) находятся в инволюции относительно данной кинематической скобки Ли–Пуассона

$$\{H_1,H_2\}=\langle P\,dH_1,dH_2\rangle=0. \tag{2.4}$$

Если $C_2=0$, то симплектические листы $\mathcal{O}_{a0}$ симплектоморфны $T^*\mathcal{S}^2$. Всюду далее мы рассматриваем только такие листы, и все последующие формулы справедливы при предположении $C_2=0$, т. е. для частного случая волчка Ковалевской.

Известно, что класс интегрируемых систем, допускающих разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби, практически совпадает с классом биинтегрируемых систем. Поэтому на первом этапе мы будем искать для системы Ковалевской второй динамический бивектор Пуассона P', обладающий необходимыми нам дополнительными свойствами [5, 11].

Согласно общему методу, предложенному в работах [22, 23, 24, 27], мы будем искать динамический бивектор Пуассона P' в виде производной Ли от исходного кинематического бивектора P вдоль некоторого пока неизвестного нам векторного поля Лиувилля X

$$P'=\mathcal{L}_X(P)\,. \tag{2.5}$$

Кроме этого, искомый бивектор должен удовлетворять следующим уравнениям:

$$[P',P']\equiv[\mathcal{L}_X(P),\mathcal{L}_X(P)]=0, \tag{2.6}$$

и

$$\{H_1,H_2\}'=\langle P'\,dH_1,dH_2\rangle=0, \tag{2.7}$$

где $[.,.]$ — скобки Схоутена, а $\{.,.\}'$ — скобки Пуассона, задаваемые бивектором P'.

- Уравнение (2.5) гарантирует нам, что динамический бивектор P' совместен с кинематическим бивектором P, т. е. $[P, P'] = 0$ и их любая комбинация также будет бивектором Пуассона. В геометрии такой бивектор P' называется 2-когранницей, связанной с векторным полем Лиувилля X в когомологии Пуассона–Лихнеровича. Совместность бивекторов P и P' будет обеспечивать нулевое кручение Нийенхейса оператора рекурсии на фазовом пространстве, что является необходимым условием для построения переменных разделения.

- Уравнение (2.6) просто означает, что бивектор P' является бивектором Пуассона, т. е. что для соответствующих скобок выполняется тождество Якоби.

- Уравнение (2.7) связывает P' с данной нам интегрируемой системой. Если это уравнение справедливо, то мы получаем биинтегрируемую систему, для которой интегралы движения находятся в биинволюции относительно совместных скобок Пуассона. С геометрической точки зрения это означает, что слоение, определяемое интегралами $H_{1,2}$, будет билагранжевым [5, 11].

Система уравнений (2.6)–(2.7) имеет бесконечно много решений X [21, 24]. Таким образом, для того чтобы конструктивно получить хоть одно решение, мы вынуждены отказаться от инвариантности и искусственно сузить пространство поиска решений. Предположим, что

$$P'\, dC_{1,2} = 0 \tag{2.8}$$

и что компоненты X_j векторного поля Лиувилля $X = \sum X_j\, \partial_j$ являются неоднородными полиномами относительно компонент углового момента J_k

$$X_j = \sum_{m=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} \mathrm{g}_{jkm}^{N}(x_1, x_2, x_3)\, J_1^k\, J_2^{m-k}$$

с неизвестными коэффициентами $\mathrm{g}(x_1, x_2, x_3)$ [22, 23, 27]. В этом месте мы явно используем условие $C_2 = 0$, т. е. что

$$J_3 = -(x_1 J_1 + x_2 J_2)/x_3;$$

это позволяет существенно уменьшить число неизвестных коэффициентов и число уравнений, которым они должны удовлетворять.

Подставляя данный полиномиальный анзац в уравнения (2.6), (2.7)–(2.8) и приравнивая к нулю все коэффициенты при степенях $J_{1,2}$, мы получим сильно переопределенную систему алгебро-дифференциальных уравнений. Решения для таких систем уравнений можно получить, используя современное программное обеспечение и современные стратегии их поиска. Таким образом, нам остается только классифицировать и изучать полученные компьютерными методами решения.

Например, первые полиномиальные решения тривиальны — линейное $P' = P$ и квадратичное $P' = C_2 P$. В кубическом случае $N = 3$, с точностью до канонических преобразований, нами было найдено три независимых решения.

Компоненты первого вещественного векторного поля $X^{(1)}$ имеют вид

$$X_1^{(1)} = -\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\Big(x_1J_1 - x_2J_2\Big)J_3}{2x_1x_3}, \qquad X_2^{(1)} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\Big(x_1J_1 - x_2J_2\Big)J_3}{2x_2x_3}, \qquad X_3^{(1)} = 0,$$

$$X_4^{(1)} = -\sqrt{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{(x_1^2+x_2^2)J_1^3}{6x_2^2x_3^2} - \frac{J_2^2J_3}{2x_1x_3}\right) + \frac{c_1x_3J_3}{4\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \tag{2.9}$$

$$X_5^{(1)} = -\sqrt{x_1^2+x_2^2}\left(\frac{(x_1^2+x_2^2)J_2^3}{6x_1^2x_3^2} - \frac{J_1^2J_3}{2x_2x_3}\right) + \frac{c_1(x_1J_2 - x_2J_1)}{4\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

$$X_6^{(1)} = -\sqrt{x_1^2+x_2^2}\frac{(x_1^2+x_2^2)J_3^3}{6x_1^2x_2^2} + \frac{c_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}J_1}{4x_3}.$$

Для второго вещественного векторного поля $X^{(2)}$ имеем

$$X_1^{(2)} = \frac{2(x_1^2+x_2^2)}{x_3}\,J_1J_3, \qquad X_2^{(2)} = -\frac{2x_1(x_1^2+x_2^2)}{x_2x_3}\,J_1J_3, \qquad X_3^{(2)} = 0,$$

$$X_4^{(2)} = \frac{(x_1^2+x_2^2)^2}{3x_2^2x_3^2}\,J_1^3 - \left(J_1 + \frac{x_1x_3}{3x_2^2}J_3\right)J_3^2 + \frac{x_1^2+x_2^2}{x_2x_3}\,J_1J_2J_3 + \frac{c_1x_2J_2}{2},$$

$$X_5^{(2)} = \frac{(x_1^2+x_2^2)^2}{3x_1^2x_3^2}\,J_2^3 - \left(J_2 - \frac{(2x_1^2-x_2^2)x_3}{3x_1^2x_2}\,J_3 - \frac{2(x_1^2+x_2^2)}{x_1x_2}J_1\right)J_3^2 + \tag{2.10}$$

$$+\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_3}\,J_1J_2J_3 - \frac{c_1(2x_1J_2 - x_2J_1)}{2},$$

$$X_6^{(2)} = \frac{2x_1^2+x_2^2}{3x_2^2}\,J_3^3 + \frac{c_1x_2(x_1J_2 - x_2J_1)}{2x_3}.$$

Для третьего решения $X^{(3)}$ компоненты векторного поля являются комплексными функциями исходных вещественных координат

$$X_1^{(3)} = -\frac{\mathrm{i}x_2(x_1+\mathrm{i}x_2)^2}{x_1^2}\,J_2^2 + \frac{2x_2(x_1+\mathrm{i}x_2)}{x_1}\,J_1J_2, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

$$X_2^{(3)} = \frac{\mathrm{i}(x_1+\mathrm{i}x_2)^2}{x_1}J_2^2 - 2(x_1+\mathrm{i}x_2)J_1J_2, \qquad X_3^{(3)} = 0, \tag{2.11}$$

$$X_4^{(3)} = (J_1 - \mathrm{i}J_2)J_2^2 - \frac{1}{3}J_1^3 + \frac{2(2x_1+\mathrm{i}x_2)x_3}{3x_1^2}\,J_3^3 + \frac{4x_2}{3x_1}J_2^3 + \frac{\mathrm{i}x_2(x_1J_1 - x_3J_3)}{x_1^2}J_2^2 + c_1x_3J_3,$$

$$X_5^{(3)} = \frac{2\mathrm{i}}{3}J_1^3 - (J_1 - \mathrm{i}J_2)J_1J_2 - \frac{1}{3}J_2^3 - \frac{2\mathrm{i}x_3}{3x_1}J_3^3 + \frac{x_2^2(2x_1 - \mathrm{i}x_2)}{3x_1^3}J_2^3 - \frac{\mathrm{i}x_2^2x_3}{x1^3}J_2^2J_3 + \mathrm{i}c_1x_3J_3,$$

$$X_6^{(3)} = \frac{2}{3}\frac{(x_1+\mathrm{i}x_2)x_3^2 - 2x_1^3}{x_1^3}\,J_3^3 - (J_1^2 + J_2^2)\,J_3 - c_1(x_1+\mathrm{i}x_2)\,J_3.$$

Полиномиальный анзац четвертого порядка дает нам несколько десятков решений, которые также можно классифицировать и изучать.

Выпишем несколько наиболее простых скобок Пуассона, отвечающих исходному кинематическому бивектору Пуассона и приведенным выше решениям:

$$
\begin{aligned}
&\{x_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}\, x_k,\\
&\{x_i, x_j\}^{(1)} = \varepsilon_{ijk} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, J_3}{x_3}\, x_k,\\
&\{x_i, x_j\}^{(2)} = -\varepsilon_{ijk} \frac{2(x_1^2 + x_2^2)\, J_3}{x_3}\, x_k,\\
&\{x_i, x_j\}^{(3)} = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\, (\mathrm{i}x_3 J_3 - x_1 J_2 + x_2 J_1) x_k.
\end{aligned}
$$

Здесь ε_{ijk} полностью антисимметричный тензор. Остальные скобки довольно громоздки, и поэтому мы их не будем выписывать явно. Для третьего решения эти скобки можно записать очень компактно, используя 2×2-матрицы Лакса [7, 19] и бигамильтонову структуру уравнений отражения.

Замечание 1. Для любой пары совместных бивекторов P и P' существует некоторое множество векторных полей X, таких, что $P' = \mathcal{L}_X(P)$. Для того чтобы ограничить эту свободу и упростить решение систем уравнений, мы заранее предположили, что $X_3 = 0$. Если отказаться от этого ограничения, то возможно переписать определения (2.9), (2.10) и (2.11) в более симметричной и компактной векторной форме.

Легко проверить, что полученные нами бивектора Пуассона $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$ удовлетворяют уравнениям

$$
[P^{(1)}, P^{(2)}] = 0, \quad [P^{(1)}, P^{(3)}] \neq 0, \quad [P^{(2)}, P^{(3)}] \neq 0. \tag{2.12}
$$

То есть $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — совместные друг с другом бивекторы Пуассона, а комплексный бивектор $P^{(3)}$ несовместен с этими вещественными бивекторами.

Замечание 2. Для системы Ковалевской известны два других *рациональных* решения P' рассматриваемых нами уравнений. Первый из этих рациональных бивекторов приводит к переменным разделения, полученным Ковалевской, и может быть компактно записан с помощью 2×2-матрицы Лакса и бигамильтоновой структуры уравнений отражения [25]. Второй известный рациональный бивектор связан с матрицей Лакса для волчка Ковалевской, построенной Рейманом и Семеновым-Тянь-Шанским, и соответствующей линейной r-матричной алгеброй [20]. В обоих случаях компоненты соответствующих векторных полей Лиувилля X будут логарифмическими функциями от компонент углового момента.

Итак, в данном разделе мы доказали, что рассматриваемый нами частный случай системы Ковалевской является биинтегрируемым относительно пары совместных вещественных кубических бивекторов Пуассона $P^{(1,2)} = \mathcal{L}_{X^{(1,2)}}(P)$ и одного комплексного кубического бивектора $P^{(3)} = \mathcal{L}_{X^{(3)}}(P)$. Данные бивекторы определены при произвольном значении функции Казимира C_2, однако они совместны с исходным кинематическим бивектором P только при $C_2 = 0$. Применение полученных результатов для построения переменных разделения обсуждается в следующем разделе.

3. Построение переменных разделения

По определению переменные разделения $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ являются каноническими переменными

$$
\{q_i, q_k\} = \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik} \tag{3.1}
$$

относительно исходной кинематической скобки Пуассона и удовлетворяют невырожденной системе из n разделенных уравнений

$$\Phi_i(q_i, p_i, H_1, \ldots, H_n) = 0\ , \quad i = 1, \ldots, n\ , \quad \text{где } \det\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial H_j}\right] \neq 0, \tag{3.2}$$

связывающих каждую пару переменных (q_i, p_i) с интегралами движения $H_1, \ldots, H_n$.

В этом случае стационарные уравнения Гамильтона–Якоби

$$H_i = \alpha_i$$

обладают аддитивным полным интегралом

$$W(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где каждое слагаемое W_i зависит только от q_i и может быть найдено в квадратурах.

Система с интегралами движения $(H_1, \ldots, H_n)$ допускает штеккелевское разделение переменных, если разделенные уравнения (3.2) являются аффинными уравнениями относительно каждого из интегралов H_j, т. е. если

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}(q_i, p_i) H_j - U_i(q_i, p_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

где S — невырожденная матрица. При этом функции S_{ij} и U_i зависят только от одной пары (q_i, p_i) сопряженных переменных разделения, т. е.

$$\{S_{ik}, q_j\} = \{S_{ik}, p_j\} = \{S_{ik}, S_{jm}\} = 0, \quad i \neq j, \tag{3.4}$$

и аналогично для всех функций U_i

$$\{U_i, q_j\} = \{U_i, p_j\} = \{U_i, U_j\} = 0, \quad i \neq j. \tag{3.5}$$

В этом случае матрицу S называют матрицей Штеккеля, а функции U_i — потенциалами Штеккеля.

Замечание 3. Естественно, что определение разделения переменных по Штеккелю зависит от выбора интегралов движения H_i. Очевидно, если $(H_1, \ldots, H_n)$ допускают штеккелевское разделение в какой-либо системе координат, то функции от этих интегралов $\widehat{H}_i = \widehat{H}_i(H_1, \ldots, H_n)$, в общем случае, не будут удовлетворять аффинным разделенным уравнениям (3.3) с этими же переменными разделения.

Замечание 4. Метод разделения переменных в классической механике в основном играет вспомогательную, техническую роль при нахождении переменных действие–угол, которые являются по сути переменными разделения специального вида. С развитием квантовой механики роль этого метода, по нашему мнению, существенно возросла, так как для квантовых интегрируемых систем общих методов решения многомерных многоспектральных задач практически не создано. По сути и координатный и функциональный анзацы Бете являются квантовыми вариациями на тему классического метода разделения переменных. Подчеркнем, что роль аффинных разделенных уравнений (3.3) в квантовой механике особенно важна [17, 18].

Итак, на втором шаге мы должны найти переменные разделения (q_i, p_i) и соответствующие им разделенные уравнения Φ_i (3.2), используя построенные нами ранее совместные бивекторы Пуассона. На симплектическом многообразии [5, 11], координаты разделения q_i совпадают с собственными значениями оператора рекурсии $N = \widehat{P}'\widehat{P}^{-1}$, которые и называются переменными Дарбу–Нийенхейса.

В случае многообразия Пуассона общего вида в этих работах предлагается построить проекции $\widehat{P}, \widehat{P}'$ исходных бивекторов Пуассона P и P' на симплектические листы одного из этих бивекторов вдоль векторных полей, удовлетворяющих некоторым специальным условиям. К сожалению, несмотря на то, что доказательство существования таких полей (и, соответственно, проекций) доказать достаточно просто, конструктивного алгоритма их нахождения до сих пор не разработано.

Поэтому, согласно [22, 23, 24, 27], мы постараемся избежать вычислений и проекций бивекторов и оператора рекурсии, используя $n \times n$ контрольную матрицу F, которая определяется следующим образом:

$$P'\,\mathbf{dH} = P\big(F\,\mathbf{dH}\big), \quad \text{или} \quad P'\,dH_i = P\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\,dH_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Би-интегрируемость и, соответственно, би-инволютивность интегралов движения относительно пары совместных скобок Пуассона (2.4), (2.7) обеспечивает существование такой матрицы F, а дополнительно накладываемое нами условие (2.8) гарантирует невырожденность этой матрицы F. Собственные значения данной матрицы совпадают с собственными значениями оператора рекурсии, что и позволяет нам найти искомые переменные разделения q_i.

Матрица F также используется и для построения разделенных уравнений, так как для штеккелевских систем нормированные подходящим образом собственные векторы матрицы F образуют матрицу Штеккеля S

$$F = S^{-1}\,\mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)S.$$

По сути, единственной нерешенной проблемой остается нахождение переменных p_i [5, 11] и связанная с ней проблема построения разделенных уравнений ϕ_j (3.2). В следующем параграфе мы покажем, как эта техническая проблема может быть решена с помощью все той же матрицы F.

3.1. Вещественные бивекторы Пуассона

Для первого решения $P^{(1)}$ (2.9) элементы 2×2 контрольной матрицы $F^{(1)}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
F^{(1)}_{11} &= \frac{(2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)(J_1^2 + J_2^2)}{4x_3^2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad F^{(1)}_{12} = -\frac{1}{8\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},\\
F^{(1)}_{21} &= \frac{(2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)(J_1^2 + J_2^2)}{2x_3^2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{c_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\big(x_1(J_1^2 - J_2^2) + 2x_2J_1J_2\big)}{x_3^2} - \frac{c_1^2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2},\\
F^{(1)}_{22} &= -\frac{J_1^2 + J_2^2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.
\end{aligned}$$

Собственные значения $q_{1,2}$ этой матрицы и будут новыми переменными разделения для системы Ковалевской

$$\begin{aligned}
\det(F^{(1)} - \lambda I) &= (\lambda - q_1)(\lambda - q_2) =\\
&= \lambda^2 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(J_1^2 + J_2^2)}{2x_3^2}\lambda - \frac{c_1\Big(2x_1(J_1^2 - J_2^2) + 4x_2J_1J_2 + c_1x_3^2\Big)}{16x_3^2}.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что матрица, составленная из собственных векторов матрицы $F^{(1)}$, в данном случае не будет матрицей Штеккеля, так как условия (3.4) будут нарушены. Это просто означает, что соответствующие переменные разделения и интегралы $H_{1,2}$, связаны друг с другом более общими, не аффинными разделенными уравнениями.

Для второго решения $P^{(2)}$ (2.10), совместного с первым, элементы контрольной матрицы $F^{(2)}$ равны

$$F^{(2)}_{11} = -\frac{J_1^2 + J_2^2 - c_1 x_1}{2} + \frac{(x_1 J_2 - x_2 J_1)^2}{x_3^2}, \quad F^{(2)}_{12} = \frac{1}{4},$$

$$F^{(2)}_{21} = -(J_1^2 + J_2^2)^2 \left(1 + \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{x_3^2}\right) + c_1(x_1^2 + x_2^2)\left(\frac{2\Big(x_1(J_1^2 - J_2^2) + 2x_2 J_1 J_2\Big)}{x_3^2} + c_1\right),$$

$$F^{(2)}_{22} = \frac{J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + c_1 x_1}{2}.$$

Собственные значения $f_{1,2}$ данной матрицы $F^{(2)}$ будут корнями ее характеристического полинома

$$\begin{aligned}\det(F^{(2)} - \lambda I) &= (\lambda - f_1)(\lambda - f_2) = \\ &= \lambda^2 - \left(c_1 x_1 - \frac{(x_2 J_1 - x_1 J_2 - x_3 J_3)(x_2 J_1 - x_1 J_2 + x_3 J_3)}{x_3^2}\right)\lambda - \\ &- \frac{(2(x_2 J_1 - x_1 J_2) J_3 - c_1 x_2 x_3)^2}{4x_3^2}.\end{aligned}$$

Замечание 5. Согласно [5, 11], совместность бивекторов $P^{(1,2)}$ (2.12) друг с другом и с бивектором P означает, что в переменных Дарбу–Нийенхейса q, p проекции этих бивекторов $\widehat{P}^{(1,2)}$ на симплектические листы исходного кинематического бивектора P выглядят следующим образом:

$$\widehat{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 \\ -q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 \\ -f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $f_{1,2}$ функции от q, p такие, что

$$\{q_i, f_j\} = \{p_i, f_j\} = 0, \qquad i \neq j\,.$$

Другими словами, собственное значение f_1 матрицы $F^{(2)}$ будет функцией только от q_1 и p_1, а f_2 — функцией от канонически сопряженных переменных q_2 и p_2.

Мы вычислим функции $f_{1,2}$, а также пока неизвестные нам переменные $p_{1,2}$, используя известные нам скобки Пуассона. Действительно, легко проверить, что рекуррентная цепочка скобок Пуассона

$$\phi_1 = \{f_1(q_1, p_1), q_1\}, \quad \phi_2 = \{\phi_1, q_1\}, \quad \ldots, \quad \phi_i = \{\phi_{i-1}, q_1\} \tag{3.7}$$

обрывается на третьем шаге $\phi_3 = 0$. Это означает, что функция f_1 является полиномом второго порядка относительно неизвестного нам момента p_1, что и позволяет нам найти эту переменную как функцию от исходных физических переменных

$$p_1 = \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{2x_3\Big(4(x_2J_1 - x_1J_2)\,q_1 + c_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}J_2\Big)}{(4\sqrt{x_1^2+x_2^2}(J_1^2+J_2^2)\,q_1 + c_1\Big(x_1(J_1^2-J_2^2)+2x_2J_1J_2\Big)} \tag{3.8}$$

с точностью до канонического преобразования $p_1 \to p_1 + \mathrm{g}(q_1)$ (сдвига).

Аналогичные вычисления позволяют найти вторую неизвестную переменную

$$p_2 = \frac{2x_3\Big(4(x_2J_1 - x_1J_2)\,q_2 + c_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}J_2\Big)}{(4\sqrt{x_1^2+x_2^2}(J_1^2+J_2^2)\,q_2 + c_1\Big(x_1(J_1^2-J_2^2)+2x_2J_1J_2\Big)}. \tag{3.9}$$

Если кратко суммировать все наши вычисления, то мы получили каноническое относительно исходных скобок преобразование, которое переводит исходные физические переменные (x, J) в переменные разделения (q, p), используя только бивекторы $P^{(1,2)}$ и соответствующие им контрольные матрицы $F^{(1,2)}$.

Подчеркнем, что при этом мы не использовали никаких загадочных подстановок, никаких матриц Лакса, r-матриц, связей с солитонными уравнениями, а также никаких других дополнительных сведений.

Далее, мы легко проверим, что элементы матрицы собственных векторов S для контрольной матрицы $F^{(1)}$ зависят и от переменных разделения (q_i, p_i), и от интегралов движения

$$S_{i1} = -2H_1 - \left(4q_i^2 - \frac{c_1^2}{4}\right)p_i^2, \quad S_{1,2} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Это позволяет нам назвать S *обобщенной матрицей Штеккеля.* Для того чтобы разделенные уравнения (3.3) по-прежнему имели привычный штеккелевкий вид

$$S_{i1}H_1 + H_2 - \left(H_1^2 - \frac{(c_1^2-16q_i)^2p_i^4}{64} - a^2(c_1^2 - 16q_i^2)\right) = 0, \quad i = 1, 2,$$

мы допустим существование *обобщенного потенциала Штеккеля*

$$U_i = H_1^2 - \frac{(c_1^2-16q_i)^2p_i^4}{64} - a^2(c_1^2 - 16q_i^2),$$

который зависит и от переменных разделения, и от интегралов (констант) движения.

Итак, мы доказали следующее предложение.

Утверждение 1. *Новые переменные разделения (q_i, p_i) для волчка Ковалевской при $(x, J) = 0$ лежат на двух копиях гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ рода 3, которая задается уравнением*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}:\quad \Phi(q,p) = \left(\frac{(c_1^2-16q^2)p^2}{8} - H_1 - \sqrt{H_2}\right)\left(\frac{(c_1^2-16q^2)p^2}{8} - H_1 + \sqrt{H_2}\right) - \\ - a^2(c_1^2 - 16q^2) = 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

В силу этого можно сказать, что уравнения движения линеаризуются на страте якобиана данной кривой.

Согласно стандартному формализму, разработанному Якоби, для нахождения решений в виде функций от времени $q_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, где $\alpha_i = H_i$, необходимо решить задачу об обращении в уравнениях Абеля–Якоби

$$t + \beta_1 = \int^{q_1} \Omega_1 + \int^{q_2} \Omega_1, \quad \beta_2 = \int^{q_1} \Omega_2 + \int^{q_2} \Omega_2,$$

где стандартный базис голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой можно определить следующим образом:

$$\Omega_1 = \frac{\partial \Phi(q,p)/\,\partial H_1}{\partial \Phi(q,p)/\,\partial p}\, dq \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \frac{\partial \Phi(q,p)/\,\partial H_2}{\partial \Phi(q,p)/\,\partial p}\, dq\,.$$

Эту задачу обращения Якоби в уравнениях Абеля можно решать либо аналитически, либо численно. Для численных вычислений можно использовать, например, подход Ришело [16], а обсуждение современных аналитических методов для кривых третьего рода можно найти в работах [13, 14].

Согласно Якоби, третья часть метода разделения переменных состоит в построении новых интегрируемых систем, используя построенные ранее переменные разделения и другие, измененные разделенные уравнения [6]. В нашем случае, используя новые переменные разделения (q, p) и следующую модификацию построенной выше алгебраической кривой (3.10)

$$\Phi^{(d)}(p, q) = \Phi(p, q) - 8d_1 q - 16 d_2 q^2 = 0, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R},$$

можно получить деформацию (возмущение) исходной системы с функцией Гамильтона

$$H_1^{(d)} = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + c_1 x_1^2 + \frac{d_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{d_2}{x_3^2}\,(J_1^2 + J_2^2). \tag{3.11}$$

Естественно, в этом месте основная проблема состоит в том, что нам, конечно же, хочется получить интересные с физической точки зрения деформации исходной системы. Здесь для физиков интересен только случай с $d_2 = 0$, так как только в этом случае выражение для кинетической энергии не зависит от положения тела [28].

3.2. Комплексный бивектор Пуассона

Для комплексного бивектора $P^{(3)}$ (2.11) контрольная матрица имеет вид

$$F^{(3)} = \begin{pmatrix} 2(J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2) + c_1(x_1 + \mathrm{i}x_2) & -\dfrac{1}{2} \\ 2(J_1^2 + J_2^2)^2 - 2c_1(x_1 - \mathrm{i}x_2)(J_1 + \mathrm{i}J_2)^2 & 0 \end{pmatrix},$$

а переменные разделения $\lambda_{1,2}$ являются корнями соответствующего характеристического полинома

$$\det(F - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - F_{11}^{(3)}\lambda + \frac{F_{21}^{(3)}}{2}. \tag{3.12}$$

Как и ранее, мы можем построить сопряженные данным переменным моменты $\mu_{1,2}$, используя совместный с бивектором $P^{(3)}$ бивектор четвертого порядка по J_k. Однако эти же переменные можно получить и другим способом.

Легко проверить, что в этом случае матрица S, составленная из нормированных подходящим образом собственных векторов матрицы $F^{(3)}$, является обыкновенной матрицей Штеккеля

$$S_{i1} = -2\lambda_i, \quad S_{i,2} = 1, \quad i = 1, 2,$$

то есть потенциалы Штеккеля

$$U_{1,2} = -(S_{i1}H_1 + H_2)$$

будут функциями только от (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) соответственно.

Далее мы действуем точно так же, как и ранее. Для того чтобы найти эти функции $U_{1,2}$ от пока неизвестных нам моментов $\mu_{1,2}$ и известных координат $\lambda_{1,2}$, мы воспользуемся скобками Пуассона. Действительно, цепочка скобок Пуассона

$$\phi_1 = \{\lambda_1, U_1\}, \quad \phi_2 = \{\lambda_1, \phi_1\}, \ldots, \quad \phi_i = \{\lambda_1, \phi_{i-1}\} \tag{3.13}$$

является квазипериодической

$$\phi_3 = 16\lambda_1\phi_1.$$

То есть потенциал Штеккеля U_1 является тригонометрической функцией от μ_1, и поэтому мы можем определить искомую переменную

$$\mu_1 = \varphi(\lambda_1)\ln\Big(\sqrt{16\lambda_1}\,\phi_1 + \phi_2\Big) \tag{3.14}$$

с точностью до канонических преобразований вида $\mu_1 \to \mu_1 + \mathrm{g}(\lambda_1)$. Здесь функция $\varphi(\lambda_1)$ определяется с помощью соотношения $\{\lambda_1, \mu_1\} = 1$.

Построенные нами комплексные переменные разделения (λ_i, μ_i) лежат на гиперэллиптической кривой третьего рода, которая определяется разделенными уравнениями вида

$$\widetilde{\mathcal{C}}: \quad \widetilde{\Phi}(\lambda, \mu) = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\mu} + \frac{a^4c_1^4}{16}\,\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\mu} + \lambda^2 - 2H_1\lambda + H_2 = 0. \tag{3.15}$$

Итак, уравнения движения линеаризуются на страте якобиана гиперэллиптической кривой рода три [13, 14].

Основная разница в найденных нами переменных разделения в том, что переменные $\lambda_{1,2}$ являются комплексными функциями от исходных физических переменных (x, J), тогда как переменные $q_{1,2}$ являются вещественными функциями.

Другое отличие в форме разделенных уравнений: для комплексных переменных мы получили аффинные уравнения, а для вещественных переменных — уравнения более сложные. Поэтому, например, аффинные уравнения (3.15) позволяют построить и изучить квантовый аналог волчка Ковалевской [7, 18]. Для вещественных переменных разделения вопрос о квантовании остается открытым.

Замечание 6. Переменные разделения для волчка Ковалевской можно найти в виде полюсов функции Бейкера–Ахиезера с подходящей нормировкой [17]. В работах [7, 19] такие переменные разделения $u_{1,2}$ были построены для гиростата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина

$$\widehat{H}_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + \rho J_3 + c_1x_1 + c_2(x_1^2 - x_2^2) + c_3x_1x_2 + \frac{c_4}{x_3^2} \tag{3.16}$$

с использованием известной 2×2-матрицы Лакса, соответствующей функции Бейкера–Ахиезера и алгебры уравнения отражения.

Легко проверить, что комплексные переменные $\lambda_{1,2}$ (3.12) связаны с полюсами функции Бейкера–Ахиезера $u_{1,2}$ точечным преобразованием

$$\lambda_{1,2} = u_{1,2}^2, \tag{3.17}$$

которое порождает двойное накрытие кривой $\widetilde{\mathcal{C}}$ [12]. Из работы [19] можно извлечь явное выражение для сопряженных импульсов (3.14).

4. Заключение

Стартуя с известных интегралов движения для волчка Ковалевской, мы построили три кубических бивектора Пуассона, которые совместны с каноническим бивектором Пуассона на кокасательном расслоении $T^*\mathcal{S}^2$ двумерной сферы.

Затем, в рамках бигамильтоновой геометрии, мы вычислили новые вещественные переменные разделения (q,p) для волчка Ковалевской при нулевом значении интеграла площадей и воспроизвели известные комплексные переменные разделения (λ,μ) для этой системы. Эти две системы переменных разделения на симплектических листах алгебры $e^*(3)$ связаны друг с другом каноническим преобразованием

$$\lambda_{1,2}=\lambda_{1,2}(q_1,q_2,p_1,p_2),\quad \mu_{1,2}=\mu_{1,2}(q_1,q_2,p_1,p_2),$$

которое можно переписать в виде квазиточечного преобразования [15]

$$\lambda_{1,2}=\lambda_{1,2}(q_1,q_2,H_1,H_2),$$

которое связывает страты якобианов двух гиперэллиптических кривых рода три. Мы предполагаем, что это отношение между кривыми и их якобианами не является рациональным накрытием и не является изогенией в смысле Ришело [16]. Аналогичные преобразования связывают эти кривые с кривой Ковалевской рода два, на которой лежат ее знаменитые переменные разделения. Дальнейшее обсуждение взаимосвязей между различными переменными разделения и соответствующими алгебраическими кривыми выходит за рамки данной статьи (см. обсуждение этого вопроса в работах [1, 3, 12]).

Мы считаем, что рассмотренный в данной работе пример нахождения переменных разделения с помощью интегралов движения и некоторых предположений о форме вспомогательного бивектора Пуассона подтверждает возможность применения данного алгоритма к другим интегрируемым системам с интегралами движения старших степеней (например, для гиростата Ковалевской и других интегрируемых обобщений волчка Ковалевской [28]).

Список литературы

[1] Audin M. Spinning tops: A course on integrable systems. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 51.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 150 p.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 608 с.

[3] Computational aspects of algebraic curves / T. Shaska (Ed.). (Lecture Notes Series on Computing, vol. 13.) Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2005. 350 p.

[4] Дубровин Б. А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 80 с.

[5] Falqui G., Pedroni M. Separation of variables for bi-Hamiltonian systems // Math. Phys. Anal. Geom., 2003, vol. 6, pp. 139–179.

[6] Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Reimer, 1866. 290 p.

[7] Kuznetsov V. B., Tsiganov A. V. A special case of Neumann's system and the Kowalewski–Chaplygin–Goryachev top // J. Phys. A., 1989, vol. 22, L73–L79.

[8] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980. 231 с. (См. также 2-е изд., дополненное: М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 248 с.)

[9] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 429 с.

[10] Kowalevski S. Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math., 1889, vol. 12, pp. 177–232.

[11] Magri F. Eight lectures on integrable systems // Integrability of nonlinear systems / Y. Kosmann-Schwarzbach et al. (Eds.). (Lecture Notes in Phys., vol. 495.) Berlin: Springer, 1997. P. 256–296.

[12] Markushevich D. Kowalevski top and genus-2 curves // J. Phys. A, 2001, vol. 34, no. 11, pp. 2125–2135.

[13] Matsutani S., Previato E. Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C^{rs} curve $y^r = f(x)$ // J. Math. Soc. Japan, 2008, vol. 60, no. 4, pp. 1009–1044.

[14] Nakayashiki A. On hyperelliptic abelian functions of genus 3. arXiv: 0809.3303v1 (2008).

[15] Rauch-Wojciechowski S., Tsiganov A. V. Quasi-point separation of variables for Hénon–Heiles system and system with quartic potential // J. Phys. A, 1996, vol. 29, no. 23, pp. 7769–7778.

[16] Richelot F. Essai sur uneméthode générale pour déterminer la valeur des intégrales ultra-elliptiques, fondée sur des transformations remarquables de ces transcendantes // C. R. Acad. Sci., Paris, 1836, vol. 2, pp. 622–627.

[17] Sklyanin E. K. Separation of variables — new trends // Progr. Theoret. Phys. Suppl., 1995, vol. 118, pp. 35–60.

[18] Smirnov F. A. Dual Baxter equations and quantization of the affine Jacobian // J. Phys. A, 2000, vol. 33, pp. 3385–3405.

[19] Tsiganov A. V. On the Kowalevski – Goryachev – Chaplygin gyrostat // J. Phys. A, 2002, vol. 35, no. 26, L309–L318.

[20] Цыганов А. В. Согласованные скобки Ли – Пуассона на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(4)$ // ТМФ, 2007, т. 151, № 1, с. 26–43 [Tsiganov A. V. Compatible Lie – Poisson brackets on Lie algebras $e(3)$ and $so(4)$ // Theoret. and Math. Phys., 2007, vol. 151, no. 1, pp. 459-–473].

[21] Tsiganov A. V. On the two different bi-Hamiltonian structures for the Toda lattice // J. Phys. A, 2007, vol. 40, pp. 6395–6406.

[22] Tsiganov A. V. Separation of variables for a pair of integrable systems on $so^*(4)$ // Dokl. Math., 2007, vol. 76, no. 3, pp. 839–842.

[23] Tsiganov A. V. On bi-Hamiltonian structure of some integrable systems on $so^*(4)$ // J. Nonlinear Math. Phys., 2008, vol. 15, no. 2, pp. 171–185.

[24] Tsiganov A. V. On bi-Hamiltonian geometry of the Lagrange top // J. Phys. A, 2008, vol. 41, 315212 (12 p).

[25] Tsiganov A. V. The Poisson bracket compatible with the classical reflection equation algebra // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 3, pp. 191–203.

[26] Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system. Записки научн. семинаров ПОМИ, 2010, т. 374, с. 250–267.

[27] Vershilov A. V., Tsiganov A. V. On bi-Hamiltonian geometry of some integrable systems on the sphere with cubic integral of motion // J. Phys. A, 2009, vol. 42, 105203 (12 p).

[28] Yehia H. M., Elmandouh A. A. New integrable systems with a quartic integral and new generalizations of Kovalevskaya's and Goriatchev's cases // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 1, pp. 56–69.