К задаче о двух пульсирующих сферах в жидкости[1]

У. М. Хикс, магистр искусств

1. Под пульсацией подразумевается периодическое изменение объема аналогично тому, как под вибрацией принято понимать периодическое изменение положения. Само название было дано Бьеркнесом, рассмотревшим проблему движения двух изменяющих объем сфер в жидкости в ряде статей, представленных научному сообществу Христиании в 1863, 1871 и 1875 г.[2] Для сил, действующих на сферы со стороны жидкости, Бьеркнес использует приближенные выражения, отбрасывая слагаемые, имеющие степень 5 и выше относительно отношения радиусов к расстоянию между их центрами. В настоящей работе я хотел бы, во-первых, остановиться на изображениях (образах) источника, расположенного в центре одной из сфер, относительно первой и второй сферы, а также указать замечательную связь между соседними образами. Это позволит вычислить силы, действующие на сферы, абсолютно точно. Во-вторых, продемонстрировать, как эта модель позволяет объяснить явление гравитации и, в частности, гравитационное взаимодействие вихревых атомов сэра Уильяма Томсона.

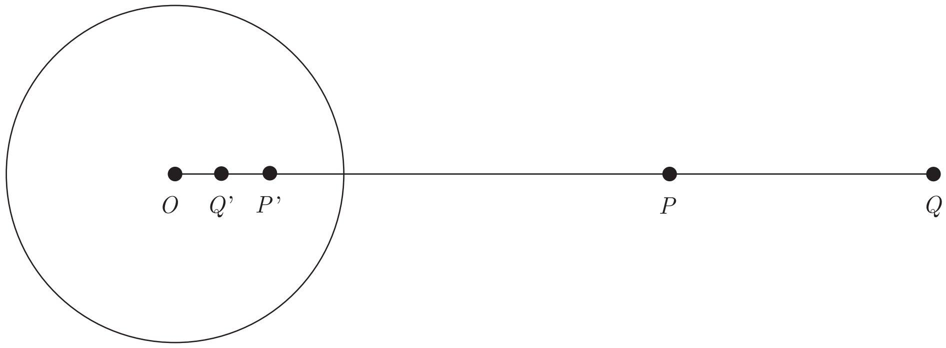
2. Пусть в бесконечном объеме несжимаемой жидкости вне покоящейся сферы имеется источник P. Известно[3], что в этом случае движение жидкости складывается из движения от источника, а также некоторой совокупности стоков и источника внутри сферы. Более точно, изображение источника P состоит из источника $\dfrac{\mu a}{OP}$ в инверсно-симметричной точке и линейного стока (от инверсного образа P до центра сферы O), линейная плотность которого равна $-\frac{\mu}{a}$; здесь μ — интенсивность источника в точке P, а a — радиус сферы. Если в жидкости имеются две сферы A, B, причем сфера A пульсирует, то движение жидкости, создаваемое сферой A, будет таким же, как от источника интенсивности $\mu = -a^2\dfrac{da}{dt}$, расположенного в ее центре. Однако вследствие присутствия сферы B мы должны также учесть и изображение этого источника (источник плюс линейный сток) внутри сферы B, а затем образ этого изображения внутри сферы A, и так далее до бесконечности. Может показаться, что структура этих образов станет чрезвычайно сложной, однако последовательные образы связаны друг с другом замечательным соотношением, позволяющим найти их все явно, что мы и продемонстрируем ниже.

[1]Hicks W. M. On the problem of two pulsating spheres in a fluid: P. 1 // Proc. Camb. Phil. Soc., 1879, vol. III, P. VII. Научная редакция перевода — С. М. Рамоданов.

[2]Краткое изложение его последней статьи имеется в «Repetorium der reinen und angewandten Mathematik», том 1.

[3]*Proceedings, Royal Society*, № 197, 1879.

Мы увидим, что у образа интенсивность линейного стока равна и противоположна интенсивности источника, что вполне естественно, поскольку внутри сферы жидкость не возникает и не исчезает. Предположим теперь, что в жидкости имеется неподвижная сфера A, источник интенсивности (μ) в точке P и линейный сток PQ; причем точки P, Q и центр сферы A лежат на одной прямой, а точка P расположена между точками Q и A. Предположим также, что интенсивность линейного стока равна интенсивности источника; другими словами, линейная плотность стока равна $-\frac{\mu}{PQ}$. Тогда, если P' и Q' — точки, симметричные точкам P и Q относительно сферы, то образ вышеописанной структуры (сток PQ и источник P) будет состоять из (1) источника в точке $P' = \frac{\mu \cdot a}{OP} = \mu'$ и (2) линейного стока $P'Q'$ с постоянной линейной плотностью $-\frac{\mu'}{P'Q'} = -\frac{\mu \cdot a}{OP \cdot P'Q'}$, т. е. сама структура и ее изображение устроены одинаково. Действительно, во-первых, образ источника интенсивности μ в точке P — это источник $\frac{\mu a}{OP}$ в точке P' и линейный сток OP' интенсивности $-\frac{\mu}{a}$. Во-вторых, если рассмотреть произвольный малый элемент линейного стока между P и Q, то его образ состоит из малого линейного стока, расположенного между точками P' и Q', и линейного источника от него до точки O. Следовательно, имеется линейный источник постоянной плотности $Q'O$, порожденный элементарными стоками из отрезка PQ. Однако для всего внешнего линейного стока $PQ = -\mu$. Таким образом, линейная плотность между точками O и Q' равна $\frac{\mu}{a}$, а вот линейная плотность, порожденная источником в точке P, равна $-\frac{mu}{a}$, так что в сумме линейная плотность между O и Q' равна нулю.



Теперь, чтобы найти линейную плотность между P' и Q', рассмотрим элемент dx отрезка PQ на расстоянии x от точки O. Обозначив $\nu = \frac{\mu}{PQ}$, находим

1) $-\nu\, dx \cdot \frac{a}{x} = -\frac{\nu\, \partial y}{y}\, a$ на расстоянии y, где $xy = a^2$,

2) линейный источник от его образа к $O = \frac{\nu \partial x}{a}$.

Пусть ρ — значение линейной плотности на расстоянии y. Тогда

$$\partial\rho = \partial\left(-\frac{\nu a}{y}\right) + \frac{\nu\, \partial x}{a} = \frac{\nu\, \partial y a}{y^2} - \frac{\nu\, \partial y a}{y^2} = 0;$$

следовательно,

$$\rho = \text{const},$$

то есть линейная плотность стока $Q'P'$ постоянна. Ее величину можно сразу определить из соображения, что суммарный поток жидкости через сферу равен нулю, т. е. интенсивность линейного стока между P' и Q' и интенсивность источника в точке P' равны по величине и противоположны по знаку. Следовательно, искомая плотность равна $-\dfrac{1}{P'Q'}\dfrac{a}{OP}\cdot\mu$.

Поскольку $OP\cdot OP' = a^2$, ее также можно представить в виде $\dfrac{OP'}{P'Q'}\cdot\dfrac{\mu}{a}$. Мы будем рассматривать каждый из таких *образов* как единый объект.

3. Переходя к рассмотрению силы, действующей на B в направлении A, обозначим через ϕ потенциал скорости, задаваемый описанной выше цепочкой образов. Если принять плотность жидкости равной единице, давление в любой точке задается формулой

$$p = \mathrm{const} - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}V^2.$$

Сила, действующая на B со стороны A, равна

$$X = \int p\cos\theta\, dS,$$

причем интеграл берется по сфере, а угол θ отсчитывается от прямой BA. Известно, что вклад слагаемого V^2 равен нулю,

$$\therefore X = -2\pi b^2\int_0^\pi \frac{\partial\phi}{\partial t}\cos\theta\sin\theta\, d\theta.$$

Потенциал скорости ϕ представляет собой сумму потенциалов от источников и стоков. Пусть источник (или сток) интенсивности μ_n расположен на расстоянии r от B. Вклад этого источника в выражение для силы X имеет вид

$$2\pi b^2\frac{d}{dt}\int_0^\pi \frac{\mu_n\cos\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\theta}},$$

причем дифференцирование не распространяется на b.

Несложно показать, что это выражение равно

$$\frac{4\pi}{3}b^3\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_n}{r^2}\right), \quad \text{или} \quad \frac{4\pi}{3}\frac{d}{dt}(\mu_n r),$$

в зависимости от того, находится μ_n снаружи сферы B или внутри нее.

Образ в A, как уже говорилось, представляет собой отрезок (линейный сток), на одном из концов которого находится источник. Обозначим через ρ_n расстояние от этого источника до A и пусть ρ'_n — расстояние до A от другого конца отрезка. Тогда, обозначив расстояние между центрами сфер как c, а ту часть X, которая обусловлена этим образом, как X_n, находим

$$X_n = \frac{2\pi b^3}{3}\frac{d}{dt}\cdot\frac{\mu_n}{(c-\rho_n)^2} - \frac{2\pi b^3}{3}\cdot\frac{d}{dt}\int_{\rho'_n}^{\rho_n}\frac{\mu_n\, dx}{(\rho_n-\rho'_n)(c-x)^2} =$$
$$= \frac{2\pi b^3}{3}\frac{d}{dt}\frac{(\rho_n-\rho'_n)\mu_n}{(c-\rho_n)^2(c-\rho'_n)},$$

тогда часть X, созданная образом ν_n внутри B (где σ_n, σ_n' обозначают расстояния до B), равна

$$X_n' = \frac{2\pi}{3}\frac{d}{dt}(\nu_n\sigma_n) - \frac{2\pi}{3}\frac{d}{dt}\int_{\sigma_n'}^{\sigma_n}\frac{\nu_n x\,dx}{(\sigma_n-\sigma_n')} = \\ = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}\nu_n(\sigma_n-\sigma_n').$$

Однако если ν_n является образом μ_n, то

$$\nu_n = \frac{b}{c-\rho_n}\mu_n, \quad \sigma_n = \frac{b^2}{c-\rho_n}, \quad \sigma_n' = \frac{b^2}{c-\rho_n'},$$

откуда

$$X_n' = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}\frac{b^3(\rho_n-\rho_n')\mu_n}{(c-\rho_n)^2(c-\rho_n')}$$

и

$$X = \pi b^3\sum_0^\infty\left\{\frac{d}{dt}\frac{(\rho_n-\rho_n')\mu_n}{(c-\rho_n)^2(c-\rho_n')} + \frac{(\rho_n-\rho_n')\mu_n}{(c-\rho_n)^2(c-\rho_n')}\frac{1}{b}\frac{db}{dt}\right\}.$$

Теперь нужно определить силу, действующую на сферу A со стороны сферы B. Используя уже полученные результаты, несложно показать, что эта сила равна

$$Y = \frac{2\pi a^3}{3}\sum\frac{d}{dt}\frac{(\sigma_n-\sigma_n')\nu_n}{(c-\sigma_n)^2(c-\sigma_n')} + \frac{\pi}{3}\sum\frac{d}{dt}(\rho_n-\rho_n')\mu_n.$$

Если μ_{n+1} — образ ν_n, то (поскольку вклад μ_0 в выражение для Y равен нулю) получаем

$$Y = \pi a^3\sum_1^\infty\left\{\frac{d}{dt}\frac{(\rho_n-\rho_n')\mu_n}{a^3} + \frac{(\rho_n-\rho_n')\mu_n}{a^3}\cdot\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right\}.$$

С помощью формул, приведенных в уже упомянутой выше (но пока неопубликованной) статье[4], X и Y можно без труда выразить явным образом через радиусы, скорости их изменения и расстояние между сферами.

4. Если для приближенного вычисления сил учитывать лишь три образа в сфере B и три в A, то X и Y несложно определить, не обращаясь к общим формулам.

Обозначив теперь расстояние между центрами сфер через r, имеем

$$\begin{aligned}
&\rho_0 = 0, && \rho_0' = \infty,\\
&\rho_1 = \frac{a^2 r}{r^2-b^2}, && \rho_1' = \frac{a^2}{r},\\
&\rho_2 = \frac{a^2 r(r^2-a^2-b^2)}{(r^2-b^2)^2-a^2r^2}, && \rho_2' = \frac{a^2(r^2-a^2)}{r(r^2-a^2-b^2)},\\
&\mu_1 = \frac{ab}{r^2-b^2}\mu_0, && \mu_2 = \frac{a^2b^2}{(r^2-b^2)^2-a^2r^2}\mu_0,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{и } \mu_0 = a^2\frac{da}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{dm_1}{dt},$$

[4] *Proceedings, Royal Society*, № 197.

где m_1 — масса жидкости, вытесняемая в данный момент времени сферой A. Отсюда

$$X = \frac{b^2}{4r^2}\frac{d(M_2)}{dt},$$

$$Y = \frac{a^2}{4r^3}\frac{dN_1}{dt},$$

где

$$M_2 = b\frac{dm_1}{dt}\left[1 + \frac{a^3b^3}{(r^2-a^2)(r^2-a^2-b^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{a^6b^6}{[(r^2-a^2)^2-b^2r^2]\{(r^2-a^2)^2+(r^2-b^2)^2-(r^4-a^2b^2)\}^2}\right],$$
$$N_1 = b^3a\frac{dm_1}{dt}\left[\frac{r^2}{(r^2-b^2)^2} + \frac{a^3b^3r^2}{(r^2-a^2-b^2)\{(r^2-b^2)^2-a^2r^2\}^2}\right].$$

Таким образом, поменяв местами a и b, найдем, что сила, действующая на сферу A со стороны сферы B из-за пульсации последней, равна

$$X' = \frac{a^2}{4r^2}\frac{dM_1}{dt},$$

тогда как сила, действующая на B со стороны A, равна

$$\frac{b^2}{4r^3}\frac{dN_2}{dt},$$

где M_1, N_2 получаются из M_2, N_1 перестановкой a и b. И наконец, при пульсации обеих сфер сила, действующая на сферу A со стороны сферы B, имеет вид

$$F_1 = \frac{a^2}{4r^2}\left\{\frac{dM_1}{dt} + \frac{1}{r}\frac{dN_1}{dt}\right\},$$

а сила, действующая со стороны сферы B на A, равна

$$F_2 = \frac{b^2}{4r^2}\left\{\frac{dM_2}{dt} + \frac{1}{r}\frac{dN_2}{dt}\right\}$$

или, обозначив выражения $\frac{1}{4}\left(M_1 + \frac{N_1}{r}\right)$ и $\frac{1}{4}\left(M_2 + \frac{N_2}{r}\right)$ через μ_1 и μ_2, получаем

$$F_1 = \frac{a^2}{r^2}\frac{d\mu_1}{dt}, \quad F_2 = \frac{b^2}{r^2}\frac{d\mu_2}{dt}.$$

Это выражения для сил справедливы в те моменты времени, когда сферы неподвижны. Чтобы определить *средние значения силы при высокочастотных пульсациях, нужно найти средние значения величин $a^2\frac{d\mu_1}{dt}$ и $b^2\frac{d\mu_2}{dt}$.

Если одна из сфер не пульсирует, например сфера B, то, поскольку b постоянна, среднее значение $b^2\frac{d\mu_2}{dt}$ равно нулю. Кроме того, $M_1 = 0$, а средняя сила, действующая на сферу A, имеет порядок r^{-3}.

5. Рассмотрим более подробно ту часть силы, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния. Имеем

$$\mu_1 = \frac{a}{4}\frac{dm_2}{dt} = \pi a b^2 \frac{db}{dt},$$

$$\mu_2 = \frac{b}{4}\frac{dm_1}{dt} = \pi a^2 b \frac{da}{dt}.$$

Если a, b — это средние значения радиусов, а сферы пульсируют с одним и тем же периодом T, разностью фаз θ и амплитудами α, β соответственно, то средние значения величин $a^2\frac{d\mu_1}{dt}$ и $b^2\frac{d\mu_2}{dt}$ совпадают и равны

$$-\frac{4\pi^3}{T^2} a^2 b^2 \alpha\beta \cos\theta,$$

причем α, β считаем столь малыми, что можем пренебречь их кубами.

Значит,

$$F_1 = F_2 = -\frac{4\pi^3}{T^2} \cdot \frac{a^2 b^2 \alpha\beta}{r^2} \cos\theta,$$

и, следовательно, сферы притягиваются друг к другу, когда их пульсации происходят с небольшой разностью фаз[5], и отталкиваются в противном случае.

Например, для двух одинаковых сфер радиуса 6 дюймов, погруженных в обычную воду, с расстоянием между центрами 2 фута и амплитудами пульсации $\frac{1}{10}$ дюйма с периодом $\frac{1}{10}$ секунды, сила, с которой они действуют друг на друга, составляет примерно 42 унции.

6. Таким образом, установлено, что две пульсирующие сферы в жидкости действуют друг на друга с силой, которая (с точностью до слагаемых более высокого порядка малости) обратно пропорциональна квадрату расстояния между их центрами. Подобным свойством обладают не только сферы, но и пульсирующие тела произвольной формы. Это вытекает непосредственно из замечания, которое сделал Стокс в своей статье «О некоторых случаях движения жидкости» (*«On some cases of Fluid Motion»*), где он утверждает, что если тело, погруженное в жидкость, изменяет свой объем, то в потенциале скорости появляется слагаемое вида $\frac{A}{r}$. Следовательно, данный эффект можно применить для объяснения тяготения: достаточно предположить, что атомы пульсируют с постоянным периодом, при этом их фазы отличаются друг от друга не более, чем на 90°. Было бы, конечно, интересно изучить свойства системы, состоящей атомов, пульсирующих со всевозможными разностями фаз; в частности, одно из любопытных свойств подобной системы заключается в следующем: даже если два из трех атомов притягивают третий, это совсем не значит, что они притягивают и друг друга. В рамках такой теории, объясняющей гравитацию, было бы возможно существование таких систем небесных тел, которые вели бы себя в соответствии с общепринятыми законами гравитации, но при этом никак друг с другом бы не взаимодействовали, а возможно, даже и отталкивали друг друга.

Ранее уже отмечалось, что хотя вихревая теория атома, выдвигаемая Томсоном, и может объяснить больше свойств атома по сравнению с другими теориями, она все же не дает сколько-нибудь удовлетворительного объяснения тяготению. Вследствие этого сам сэр Уильям Томсон реанимировал корпускулярную теорию Лесажа; однако замечание о том, что

[5]Не более $\pi/2$. — Прим. ред.

небесные тела могли бы быть раскалены до белого каления в процессе непрерывной бомбардировки подобными корпускулами, судя по всему, выглядит не очень правдоподобным.

Вышеупомянутая теория смогла бы объяснить тяготение вихревых атомов, если бы нам удалось показать, каким образом вихревые атомы в несжимаемой жидкости могут изменять свой объем и совершать постоянные периодические пульсации. Однако нечто подобное, тем не менее, осуществимо, и я это продемонстрирую на основе следующих соображений. Рассмотрим прямолинейный вихрь в бесконечном объеме жидкости или даже просто циклическое движение вокруг бесконечной прямой. Скорость жидкости вблизи этой прямой будет очень большой, вследствие чего вокруг нее создастся вакуум, в форме тонкого цилиндра радиуса $\sqrt{\left(\dfrac{\mu^2\rho}{2\Pi}\right)}$, где $2\pi\mu$ — *циркуляция*, Π — давление жидкости, а ρ — ее плотность. Это справедливо и для вихря любой формы, так что вдоль его оси также *возможен* вакуум. Теперь предположим, что в жидкости имеется вихревое кольцо, и предположим, что удалось добиться пульсации этого вакуума (к примеру, резким увеличением давления Π), тогда эти пульсации с постоянным периодом будут происходить и дальше, причем период будет зависеть от интенсивности вихря и давления и, скорее всего, будет одним и тем же для колец различной формы. Тогда два таких пульсирующих кольца, при условии, что соответствующие фазы отличаются не очень сильно, будут притягивать друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Для прямолинейного вихря можно показать, что периодическая пульсации невозможна (вернее, ее период будет бесконечно большим); однако совсем иначе дела обстоят с вихревым кольцом конечного размера в трехмерном пространстве. Рассмотрим жидкий цилиндр бесконечной длины, на который не действует никакие внешние силы за исключением силы гидродинамического давления Π, одинакового во всех точках поверхности цилиндра. Предположим, что внутри цилиндра жидкость совершает циклическое и при этом безвихревое движение. Оказывается, если радиус этого цилиндра равен a, то радиус пустого пространства вдоль его оси составит

$$b = \frac{\mu}{\sqrt{\left(\dfrac{2\Pi}{\rho} + \dfrac{\mu^2}{a^2}\right)}},$$

а период малых колебаний будет равен

$$2\pi\frac{a^2b^2}{\mu}\sqrt{\left(\frac{\log a - \log b}{a^4 - b^4}\right)}.$$

Если положить $a = \infty$, то радиус пустотелого цилиндра будет равен $\sqrt{\dfrac{\mu^2\rho}{2\Pi}}$, а период колебаний будет бесконечно большим. Дело в том, что в данном случае для изменения диаметра области вакуума на конечную величину требуется бесконечный импульс, поскольку энергия жидкости внутри цилиндра радиуса r определяется величиной $\log r$, которая растет неограниченно с ростом r. Однако когда речь идет о теле конечного размера в трехмерном пространстве, то, например, энергия внутри сферы радиуса r зависит от $\frac{1}{r}$, а потому является конечной при больших r.

В жидкости, где вихревых атомов очень много, на пульсации любого из них будет в некоторой степени влиять присутствие других атомов. Однако это влияние будет очень незначительным, если давление жидкости и завихренность велики. В этом случае, скорее всего, они будут взаимодействовать таким образом, чтобы препятствовать изменению периода пульсаций.

Следует отметить, что если в несжимаемой жидкости имеется несколько отдельных вихрей, то, в некотором смысле, вести себя жидкость может так, как если б она была как раз сжимаемой. Это объясняется, как следует из вышесказанного, некоторой эластичностью вихрей. В такой жидкости давление не распространяется мгновенно, и поэтому может создаться впечатление, что сила взаимодействия между пульсирующими телами уже не будет обратно пропорциональна квадрату расстояния. Хотя величина силы для тех же значений r может и уменьшиться[6], но, тем не менее, если только жидкость действительно не является сжимаемой, сила по-прежнему будет обратно пропорциональна квадрату расстояния. Это следует из того, что несжимаемая жидкость представляет собой предельный случай сжимаемой жидкости, для которой сжимаемость стремится к нулю. И, пожалуй, самой интересной особенностью поведения такой жидкости является то, что теперь гравитационное взаимодействие распространяется не мгновенно. Следует ясно понимать, что мы не хотим сказать, будто в каждом вихревом атоме *должен* существовать вакуум; мы лишь отмечаем, что циклическое безвихревое движение, порожденное конкретным вихрем, может быть настолько большим, что в итоге вакуум возникнет. Рассмотрим в качестве примера вихревое кольцо, предположив, что жидкость совершает циклическое движение сквозь него. Предположим, что давление на его границе постепенно уменьшается; тогда в определенный момент времени давление жидкости на вихрь будет уже недостаточным, чтобы сохранить жидкость сплошной, в результате чего возникнет вакуум. Например, в случае с цилиндром, рассмотренным выше, мы предположили, что внутри имеется циклическое движение жидкости, но нет вихря (то есть завихренность равна нулю). Следовательно, вакуум вокруг оси образуется всегда, при любом конечном значении давления на границе.

Чтобы получить некоторое представление о количественных характеристиках рассматриваемых величин, я проделал следующие вычисления. Рассмотрим две пульсирующие сферы, размер которых равен размеру атома водорода, а жидкость имеет плотность эфира, примерно равной, согласно оценкам сэра У. Томсона, $9,36 \times 10^{-19}$. Предположим, что амплитуда пульсации равна $n\times$радиус сфер. Чтобы сила взаимодействия между сферами была такой же, как между двумя атомами водорода, должно выполняться

$$\frac{n}{T} = 7\,300.$$

Если предположить, что амплитуда составляет $\frac{1}{50}$ радиуса, то число пульсаций в секунду должно быть примерно равно

$$3{,}65 \times 10^4.$$

Частота колебаний эфира, соответствующей крайней красной части спектра, равна $4{,}7 \times 10^{14}$.

Следует отметить, что если принять отношение амплитуды к размеру сферы постоянным, то для того чтобы притяжение между двумя сферами было пропорционально их массам, период пульсации этих сфер должен быть одинаковым — это необходимое условие того, что они вообще притягиваются.

[6]Из-за присутствия вихрей. — Прим. ред.