

Ответ
А. В. Борисову

В. Ф. Журавлев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Публикуется ответ В. Ф. Журавлева на письмо А. В. Борисова в продолжение дискуссии («НД», 2010, т. 6, № 2, с. 365–369)¹ о применимости различных моделей контактного взаимодействия для описания движения тела по поверхности.²

1. *Считаете ли Вы тогда учебно-методическими и работы С. А. Чаплыгина о качении шара и об исследованиях по динамике неголономных систем?*

Да, считаю. В определении учебно-методический я не нахожу ничего оскорбительного. По мнению Арнольда, которое я разделяю, математика — не наука, а её язык. Поэтому работы Контенсу по динамике корабельной гировертикали — это наука, а работы Чаплыгина по динамике неголономных систем — это совершенствование языка. Вы не найдете ни одной работы по изучению каких-либо технических устройств, в которой бы применялись уравнения Чаплыгина.

Вообще, механика неголономных систем пока что ограничивается главным образом университетскими учебниками.

2. О моделях резинового и мраморного тел.

Слово *модель* здесь неуместно. Под моделью какого-либо физического явления мы понимаем его абстрактный образ, сформулированный на языке математики. Резиновому и мраморному телу не отвечают никакие реальные явления. Вы сами это признаете. Эти названия придуманы для того, чтобы легализовать те постановки задач, которые первоначально по недосмотру ошибочно связывались с моделью сухого трения.

3. *Таким образом, нельзя утверждать, что данные модели являются умозраительными и не имеют отношения к практике.*

Здесь Вы сами себе противоречите, поскольку чуть ниже пишете, что для вышеупомянутых моделей никаких экспериментальных данных нет.

¹<http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/1681/0>

²Редколлегия не подвергала письмо В. Ф. Журавлева рецензированию и не несет ответственности за его содержание. Сохранен авторский формат комментариев.

4. Сравнение наших результатов с «математикоподобной механикой» в данном контексте воспринимается мною даже как комплимент. Действительно, этот термин употреблялся П. В. Харламовым в отношении исследований В. В. Козлова, связанных с новыми моделями механики и применимостью предельных переходов и различных реализаций связей при построении различных моделей в механике.

Во-первых, в оригинале не «математикоподобная механика», а «механикоподобная математика». Очень неудачная оговорка. Во-вторых, то, что для одних комплимент, для других повод для очень грустных размышлений (см. М. Клайн «Математика. Утрата определённости», Арнольд и др.). Речь идет о кризисе в математике, об утрате ею целей. Клайн считает, спасти математику может только твердая ориентация на естественные науки.

5. В той дискуссии истинность соображений В. В. Козлова, в противовес критическим и догматическим соображениям П. В. Харламова, для здравомыслящих людей совершенно очевидна.

Это язык из коммунистического прошлого. Г. Зюганов и сейчас считает, что все здравомыслящие люди разделяют идеалы коммунизма.

6. Как же Вы не считаете ее неголономной? То, что «соотношение $\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$ немедленно интегрируется» — просто элементарное, достаточно часто возникающее заблуждение.

Возможно, кто-то из Ваших знакомых так и заблуждался в случае простых кинематических связей, когда вопрос о неголономности решается теоремой Фробениуса. Но я-то говорю о неудерживающих кинематических связях. Я подозревал, что Вы не понимаете, что это такое, потому и попросил Вас дать им определение. Ваш ответ подтвердил мое подозрение. Об этом я скажу в самом конце.

7. Отмечу только, что используемая Вами методика этих вычислений не нова. Общая технология расчета — и момента, и коэффициента, и силы — есть в книге Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева, а также в книге А. И. Лурье.

Целью моей была не методика, а вычисление интеграла в элементарных функциях. Это казалось невозможным не только Контенсу, но и большинству наших механиков (см., например, книгу Маркеева). Что касается методики, то перенос начала координат в мгновенный центр скоростей не требует ссылок на упомянутых Вами уважаемых ученых, этому учат на втором курсе технических вузов. Вы можете также посмотреть об этом у Я. В. Татарина (метод Явно Важных Точек).

8. В связи (?) мне непонятны причины, побудившие Вас пересмотреть эти эффекты, опираясь на закон Контенсу. Эти известные задачи уже были решены ранее при более простых законах трения, либо при неголономном законе соприкосновения (т. е. при наличии абсолютной шероховатости).

Действительно, известные задачи о шаре, волчке Томсона и кельтском камне решались ранее многими авторами. Однако эти авторы не держались за спасительный прут «моделей» мраморного и резинового тела. Они ошибочно полагали, что имеют дело с обычным сухим трением. Вывод И. Эйлера о том, что добиться движения бильярдного шара по кривой можно, только сообщив ему начальную угловую скорость вокруг оси кия, ошибочен. Угловая скорость должна быть вокруг вертикали. В случае волчка Томсона правильный результат получали, заменив закон сухого трения вязким. Но в исходной постановке вязкого трения нет! И только правильное использование в статье Контенсу особенностей двумерного сухого трения поставило все на свои места. Что касается кельтского камня, то здесь ситуация намного сложнее. Сухое трение как функция скольжения и вращения имеет особенность в нуле. Особенность можно обойти, если одна из компонент много больше другой

(как в случае с тип-топом). В случае же кельтского камня скольжение и верчение периодически проходят через нуль. Любая упрощенная модель трения здесь ведет к ошибкам. М. Паскаль уже отмечала плохое соответствие эксперименту ее теории.

Что касается неголономной постановки в этих задачах, то она здесь совершенно неуместна.

Таковы причины, побудившие меня пересмотреть известные решения.

И еще один раз обращаю Ваше внимание на то, что нет никакого «закона Контенсу». У Контенсу есть красиво решенная задача, где он обратил внимание специалистов на то, что в точечном контакте с сухим трением надо быть внимательнее.

9. *В то время как в задачах динамики, в отличие от статики, закон распределения давления, а стало быть контактных напряжений, неизвестен <...>*

Это не так. Закон распределения давления, в зависимости от скорости скольжения, вычислялся посредством решения соответствующей контактной задачи И. Г. Горячевой. Еще раньше формулы для закона давления в этом случае были написаны Свендениусом. Учет деформации закона при движении в конкретных задачах был выполнен мною и А. А. Киреенковым.

10. *Следовательно, данное допущение, вообще говоря, ставит под сомнение корректность пропагандируемой Вами теории.*

Моя теория основывается на законе сухого трения Кулона, на интегрировании элементарных сил и моментов по площадке контакта и на упрощении получающегося интеграла с помощью аппроксимаций Паде. Что же из этих составляющих теории вы считаете некорректным? В общей теории нет указанных Вами допущений. Вычисляющийся интеграл записывается для любого закона распределения нормальных напряжений. Деформация этого закона в случае движения легко учитывается. Именно это и сделано в нашей с Климовым работе по шимми.

11. *Идея ревизовать, исходя из данной непробированной модели, классические, общепризнанные результаты Чаплыгина, Рауса, Пенлеве мне не представляется целесообразной. Интереснее было бы, если бы Вы попробовали применить ее в решении принципиально новых, содержательных задач и объяснить эффекты, которые другими моделями нигде не объясняются.*

Именно это и сделано в только что упомянутой работе по шимми. Известны сотни работ, в которых пытались решить эту задачу, но они так ничего и не объяснили как раз в силу неразвитости представлений о сухом трении. На ошибочность неголономного условия Келдыша в этой задаче указывал Н. А. Фуфаев.

12. *В связи с этим я считаю неверным говорить о принципиальных ошибках, якобы имеющихся у Пенлеве.*

Я думаю, всегда надо называть вещи своими именами. Представление Пенлеве о том, что в общем случае точечного контакта существуют три независимые друг от друга компоненты сухого трения — скольжения, верчения и качения — и при этом каждая из них описывается простым одномерным законом Кулона, радикально ошибочно. Не признавать этого — значит предавать науку. Замечу попутно и о широко известных «парадоксах Пенлеве». Ф. Клейн считал, что никаких парадоксов нет, просто у Пенлеве в голове путаница. У меня то же мнение.

13. *То есть две модели — сухого и вязкого трения, линейного по скорости, — пока остаются базовыми в динамике.*

Их никто оттуда и не изгоняет. Просто сухое трение оказалось явлением более трудным, чем это представлялось первоначально. Приходится изучать движения более сложные,

чем прямолинейные, поступательные. И вот здесь надо правильно распорядиться законом Кулона.

14. Вы предлагаете дать определение неголономной неударяющей связи. Частично этот вопрос прояснен в статье А. П. Иванова [6] в задаче об отрыве тела от плоскости в неголономной постановке, где указаны парадоксы (типа парадоксов Пенлеве), возникающие при отрыве тела от плоскости.

Алексей Владимирович, боюсь, вы меня не поняли. Я говорю не о композиции простой неударяющей связи (плоскость с возможностью отрыва) и кинематической связи на плоскости. Я говорю о неударяющей кинематической связи. От плоскости ничего не отрывается. На плоскости есть запрет на скольжение, исчезающий, как только касательная компонента реакции превзойдет силу трения трогания. В этом и состоит ее неударяющий характер. Таким образом, кинематическое условие отсутствия проскальзывания дополняется условием типа неравенство, накладываемым на координаты, скорости и ускорения. В случае такой связи теоремы Фробениуса недостаточно для установления неголономности кинематического условия. Так и в случае катящегося без проскальзывания шара. Почему, скажите, шар не проскальзывает? Потому, что вам угодно рассматривать как бы модель мраморного тела? Так вот: если это понятное всем тело, то шар не проскальзывает, только если нормальная к плоскости компонента угловой скорости равна нулю. Если же эта компонента не равна нулю, то ограничения на проскальзывание нет. Так что на неголономность ничего проверять не нужно.

При всем уважении к А. П. Иванову — он здесь совсем ни при чем.

Я по-прежнему жду от Вас определения *неударяющей неголономной связи*.