

## Нацеливание с помощью внешнего шума

Ю. Л. Болотин<sup>1</sup>, С. В. Слипушенко<sup>2</sup>, А. В. Тур<sup>3</sup>, В. В. Яновский<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Национальный научный центр  
Харьковский физико-технический институт  
61108, Украина, г. Харьков, ул. Академическая, д. 1

<sup>2,4</sup> Институт монокристаллов  
Национальная академия наук Украины  
61001, Украина, г. Харьков, пр. Ленина, д. 60

<sup>3</sup> Center D'étude Spatiale Des Rayonnements, C.N.R.S.-U.P.S.  
9, avenue Colonel-Roche 31028 Toulouse cedex 4

<sup>1</sup> bolotin@kipt.kharkov.ua, <sup>2</sup> slipushenko@gmail.com, <sup>3</sup> anatoly.tur@cers.fr, <sup>4</sup> yanovsky@isc.kharkov.ua

*Получено 25 августа 2010 г.*

Изучено влияние малой стохастической компоненты на свойства хаотических режимов отображения Хенона. Рассмотрены режим сильного хаоса и режим перемежаемости. Выяснены механизмы, под действием которых малый шум существенно влияет на свойства хаотических режимов. Определены условия, при которых шум влияет на времена возврата Пуанкаре. Предложен стохастический сценарий нацеливания для взятия под контроль отображения Хенона. Обсуждается физика и эффективность предложенного метода нацеливания.

Ключевые слова: диссипативные динамические системы, отображение Хенона, методы наведения, возвраты Пуанкаре, внешний шум

**Yu. L. Bolotin, S. V. Slipushenko, A. V. Tur, V. V. Yanovsky**  
**Targeting with external noise**

An influence of a low noise on the properties of the Hénon map chaotic modes is studied. The strong chaos and the intermittency mode are considered. We find the mechanisms of a significant influence of the low noise on the chaotic mode properties. The conditions which have impact on the Poincaré recurrences time are defined. We suggest the targeting stochastic scenario for taking the Hénon map under control. The physics and the efficiency of the proposed targeting method are considered.

Keywords: dissipative dynamical systems, Hénon map, targeting, Poincaré recurrences, external noise

MSC 2010: 37B20

## 1. Введение

Хаотическая динамика — один из наиболее общих способов эволюции нелинейных систем, а хаотические режимы присутствуют в изобилии как в природе, так и в технике [1]. Причины появления детерминированных хаотических режимов имеют исключительно внутренний характер и тесно связаны с нелинейностью физических систем. Как правило, предполагается, что такие системы хорошо изолированы от внешних неконтролируемых воздействий среды. Последнее в действительности весьма трудноосуществимо. Строго говоря, можно утверждать, что абсолютно изолированных систем в реальном мире не существует. Поэтому интересно изучить общие нетривиальные механизмы влияния внешних малых стохастических воздействий на поведение нелинейных систем, находящихся в хаотическом режиме. Кажется естественным, что такое малое воздействие не может приводить к существенным эффектам. Другими словами, воздействие малых шумов должно приводить к эффектам более высокого порядка малости, чем внутренние механизмы хаотизации. Однако для гамильтоновых систем были обнаружены механизмы сильного влияния малых стохастических воздействий на разрушение кантор-торов и паутины Арнольда [2, 3]. Это, в свою очередь, приводит к ускорению диффузии в таких системах (см., например, [4]). Возможность усиливать или подавлять хаос в нелинейных динамических системах имеет и большое практическое значение. Одним из важных практических применений управления хаосом служат методы контроля нелинейных систем. Эти методы контроля основаны на экстремальной чувствительности хаотической динамики к малым возмущениям. Стратегия, позволяющая реализовать эти методы, состоит в следующем. Рассмотрим некоторую совокупность неустойчивых периодических орбит, погруженных в хаотический аттрактор динамической системы. Пусть некоторая системная характеристика оптимизируется при движении по определенной неустойчивой периодической орбите. Предполагая движение в фазовом пространстве эргодичным, дождемся момента времени, когда хаотическая траектория в процессе случайных блужданий приблизится к целевой неустойчивой периодической орбите. Когда это произойдет, используем малое запрограммированное возмущение, чтобы трансформировать хаотическое движение в движение по периодической орбите. Таким образом, во всех схемах контроля такого типа контроль включается только после попадания стабилизируемой хаотической траектории в  $\epsilon$ -окрестность ( $\epsilon \sim \delta$ ,  $\delta$  — максимально допустимое изменение контролирующего параметра) целевой периодической орбиты. Следовательно, эффективность контроля в значительной мере определяется временем попадания в требуемую область. Это время будем называть временем установления контроля. Среднее время  $\langle \tau \rangle$ , требуемое для того, чтобы при эргодическом движении попасть в окрестность некоторой точки на странном аттракторе [5], выражается как

$$\langle \tau \rangle \sim \epsilon^{-D_F},$$

где  $D_F$  — фрактальная размерность аттрактора. Поэтому, если не предпринять специальных усилий, при уменьшении допустимой области изменения контролирующего параметра время установления контроля будет расти по степенному закону. Для преодоления этой проблемы была предложена специальная техника [6], получившая название процедуры «нацеливания». За счет малого программируемого изменения контролирующего параметра удалось перейти от степенного закона времени установления контроля к существенно более медленному — логарифмическому. Если в диссипативных системах использование нацеливания приводит «всего лишь» к уменьшению времени установления контроля, то в гамильтоновых системах нацеливание принципиально необходимо. Дело в том, что в диссипатив-

ных системах среднее время контроля всегда конечно (для конечных областей захвата). Это связано с экспоненциальным убыванием функции распределения  $P(t)$  на больших расстояниях [7]:

$$P(t) \sim e^{-\frac{t}{\langle \tau \rangle}}.$$

В гамильтоновых системах соответствующая функция распределения убывает на больших временах существенно медленнее [8]:

$$P(t) \sim t^{-\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Это приводит к расходимости средних времен установления контроля в гамильтоновых системах. Физической причиной такого поведения является эффект прилипания траекторий к сохраняющимся в фазовом пространстве инвариантным торам — реликтам регулярного движения. Поэтому эффективный контроль в гамильтоновых системах может быть реализован только при существенном сокращении времени установления контроля. Ясно, что внешнее стохастическое воздействие может оказаться полезным для уменьшения времени установления контроля. Эта цель была частично достигнута в работе [9].

В настоящей работе исследовано влияние слабого внешнего стохастического воздействия (шума) на нелинейные диссипативные системы, которые находятся в хаотическом режиме. Показана возможность уменьшения времени нацеливания при использовании такого воздействия, а также выяснены условия, необходимые для этого. Другими словами, предложена стохастическая процедура нацеливания. Изучена эффективность замены традиционной «детерминированной» схемы нацеливания стохастической альтернативой — нацеливанием с помощью шума. Априорными преимуществами выбора стратегии нацеливания шумовым воздействием является легкость его реализации, отсутствие необходимости согласовывать величину воздействия с контролируемым параметром, а также легкость передачи хаотического движения через внутренние связи системы. Последний фактор существенно облегчает процесс стохастического нацеливания выбранной части системы в случае, когда прямое воздействие на нее невозможно или сопряжено со значительными трудностями. Обычно сложные системы содержат значительное число разнообразных внутренних связей, поэтому можно воспользоваться ими для передачи стохастического воздействия от целой системы или от выбранной ее части, на которую внешнее воздействие может быть легко реализовано, к интересующей нас подсистеме. При этом важно, что для организации такой передачи не нужно обладать подробной информацией обо всех внутренних связях системы. Свойство стохастичности воздействия при прохождении связей внутри системы, очевидно, будет сохраняться. Необходимо лишь определить, как изменятся его амплитуда и статистические свойства.

## 2. Оценка времени возврата Пуанкаре в системах с сильным перемешиванием

Для определения эффективности воздействия внешнего шума на время нацеливания необходимо установить связь этой величины с некоторой универсальной характеристикой системы. Такой характеристикой может служить время возврата Пуанкаре [10]. Однако непосредственный сбор статистики о возвратах в ходе численного эксперимента является малоэффективным. Причина этого очевидна. Она кроется в больших значениях и плохой

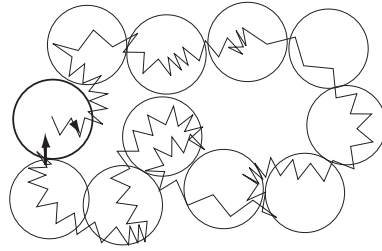


Рис. 1. На рисунке символически показан диффузионный режим возврата в окрестность радиуса  $\epsilon$ . Кроме этого показано покрытие траектории возврата окрестностями радиуса  $\epsilon$ .

сходимости времени возврата Пуанкаре для малых окрестностей; соответственно, получение результата с удовлетворительной точностью требует значительных вычислительных затрат. Поэтому появляется необходимость связать величину времени возврата с другой, более легко измеряемой характеристикой отображения. Наиболее привлекательной такой характеристикой выглядит характерное время ухода из заданной окрестности. Кажется вполне естественным, что эти два времени тесно связаны друг с другом. Однако при наборе статистики в сильно хаотическом режиме, соответствующем странному аттрактору, возникает другая трудность. Оказывается, что траектория покидает окрестность за один временной шаг. Разумеется, при этом размер окрестности должен быть много меньше размера аттрактора. В противном случае эта характеристика теряет связь с временем возврата. Такое быстрое покидание выбранной окрестности создает аналогичные трудности с набором статистики. Теперь редким событием становится более длительное, чем один временной шаг, пребывание траектории в выбранной окрестности.

Обсудим связь времени ухода  $\tau_u$  из окрестности радиуса  $\epsilon$  со временем возврата  $\tau_b$  в эту окрестность. Если предположить, что окрестность находится в области хаотических движений, то уход из этой области осуществляется по диффузионному механизму. При этом может реализоваться два случая. Предположим, что характерный диффузионный скачок  $l \ll \epsilon$ . Тогда время ухода из окрестности  $\epsilon$  определяется диффузионным процессом согласно

$$\epsilon = (D\tau_u)^{D_H} \quad \longleftrightarrow \quad \tau_u = \frac{\epsilon^{\frac{1}{D_H}}}{D}.$$

Здесь предполагается, что диффузия может носить аномальный характер и  $D_H = 1/H$  — фрактальная размерность диффузионного процесса [11]. Этот режим можно назвать диффузионным. Однако величина скачка  $l$  может удовлетворять и другому неравенству  $l \gg \epsilon$ . Этот режим можно назвать баллистическим. В баллистическом режиме  $\tau_u \sim 1$ . Покажем, как связано время возврата в окрестность  $\epsilon$  с временем ухода из окрестности радиуса  $\epsilon$ .

Начнем с диффузионного режима  $l \ll \epsilon$ . Рассмотрим возврат в эту окрестность как показано на рисунке 1. Из этого рисунка можно заметить, что время возврата больше времени ухода на число покрытий траектории окрестностями радиуса  $\epsilon$ :

$$\tau_b = N\tau_u. \quad (2.1)$$

Число покрытий  $N$  можно оценить как

$$N = (L_b/\epsilon)^{D_F},$$

где  $L_b$  — характерный путь возврата, а  $D_F$  — фрактальная размерность траектории. Эти соотношения пока универсальны, но для оценки характерного пути возврата возникает

несколько возможностей. Вычисляя среднюю скорость возврата  $\langle V \rangle$ , можно оценить характерный путь возврата согласно

$$L_b = \langle V \rangle \tau_b.$$

Следует ожидать, что средняя скорость не зависит от выбора  $\epsilon$ , а является внутренней характеристикой хаотических движений. Тогда для времени возврата получим

$$\tau_b = \left( \frac{\langle V \rangle \tau_b}{\epsilon} \right)^{D_F} \tau_u.$$

Откуда следует, что

$$\tau_b = \left( \frac{\epsilon}{\langle V \rangle} \right)^{\frac{D_F}{D_F-1}} \frac{1}{\tau_u^{\frac{1}{D_F-1}}}, \quad \text{если } D_F \neq 1.$$

С учетом зависимости времени ухода  $\tau_u(\epsilon)$  от радиуса окрестности  $\epsilon$ , получим

$$\tau_b \sim \epsilon^{\frac{D_F - D_H}{D_F - 1}}. \tag{2.2}$$

Связь между временами ухода и возврата  $\tau_b \sim \tau_u^{-\frac{D_H + 1 - D_F}{D_H(D_F - 1)}}$  также легко установить. Откуда следует, что только при  $1 < D_F < D_H + 1$  появляется разумное согласование времени возврата с размером окрестности  $\epsilon$ . Такая оценка (2.2) не согласуется с известной зависимостью времени возврата

$$\tau_b \sim \epsilon^{-D_A}$$

от размерности аттрактора  $D_A$ . Причина этого, по-видимому, в различии режимов их реализации. Заметим, что выше негласно предполагалось, что фазовое пространство неограниченно. Разумеется, если область хаотического режима ограничена аттрактором и не занимает все пространство, то нужно учесть характерный масштаб аттрактора  $L$ . Связь между соответствующими временами должна наблюдаться, если характерные размеры  $l \ll \epsilon \ll L$ . Как правило, при развитой хаотичности эти условия нарушаются. Для диссипативных динамических систем, имеющих аттрактор, чаще всего реализуется режим, для которого  $l \sim L$  и, как следствие, условие «диффузности» траектории не соблюдается. В этом случае оценку времени возврата можно осуществить, используя (2.1)

$$\tau_b = N \times 1 = (L/\epsilon)^{D_F} \sim \epsilon^{-D_F}. \tag{2.3}$$

В этой формуле предполагается, что  $L_b \approx L$ , а динамика системы — баллистическая.

Оценкам времени возврата в диссипативных хаотических системах посвящено достаточно много работ [12–16]. В работе [12] получено соотношение

$$\langle \tau_b \rangle = V \epsilon^{-D},$$

где  $D$  — размерность фазового пространства системы. Однако в дальнейшем изложении будем опираться на оценку (2.3). Ниже продемонстрируем еще один способ получения этого соотношения, используя простые соображения теории вероятностей. Действительно, в баллистических режимах механизм возврата устроен очень просто. Из-за сильной хаотичности



динамики координаты каждой следующей точки траектории фактически не зависят от координат предыдущей. Это означает, что, покинув наблюдаемую окрестность, система имеет одинаковые шансы вернуться в нее из любой точки аттрактора. Иными словами, вероятность возврата в исходную окрестность постоянна на каждом шаге отображения. Ее величина  $p$  равна отношению меры аттрактора, попавшей в исследуемую окрестность, и меры всего аттрактора:

$$p = \mu(\epsilon)/\mu(A) \sim \epsilon^{D_F}.$$

Отметим, что, из-за отсутствия корреляций между соседними итерациями, эта величина не зависит от начальных координат рассматриваемой траектории. Фактически, это означает эквивалентность между возвратом в исходную окрестность и попаданием в любую другую заранее выбранную окрестность. Иными словами, понятие времени возврата и времени нацеливания для сильно хаотических режимов тесно связаны друг с другом.

Обычно величина  $p$  мала, поэтому траектории может потребоваться значительное количество шагов для попадания в исходную окрестность. Это количество и определяет время возврата системы. Из теории вероятностей хорошо известна формула, определяющая количество испытаний, необходимых для однократного наблюдения события в случае, когда каждое испытание независимо, а вероятность события в каждом испытании постоянна [17]. Для такой последовательности испытания время ожидания события  $t$  подчиняется биномиальному распределению. В случае  $p \ll 1$  и  $tp > 1$  это распределение переходит в разновидность распределения Пуассона — экспоненциальное распределение [18]

$$w_p(t) = p(1-p)^{t-1} \sim p \exp^{-tp}, \quad (2.4)$$

где  $w_p(t)$  — вероятность возврата в окрестность  $p$  за время  $t$ . Зная распределение времен возврата, можно вычислить среднее значение этой величины:

$$\langle t \rangle = p^{-1} \sim \epsilon^{-D_F}. \quad (2.5)$$

Существует лемма о том, что соотношение  $\langle t \rangle = p^{-1}$  является общим результатом для всех эргодичных систем [19]. Как обсуждалось выше, полученная оценка справедлива и для времени нацеливания системы. Следует отметить также аномально высокое значение дисперсии этой величины. Для распределения Пуассона дисперсия равна среднему значению:

$$\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 = \langle t \rangle.$$

Это объясняет причину медленной сходимости результатов при попытке непосредственного подсчета времен нацеливания в ходе численного моделирования. Напротив, величина  $p$  очень удобна для проведения как теоретических, так и численных оценок, поэтому наличие связи между ней и временем нацеливания является важным фактом.

### 3. Влияние внешнего шума на отображения Хенона в режиме развитого хаоса

Перейдем теперь к обсуждению влияния внешнего шума на хаотические режимы. В качестве естественной модели нами было выбрано отображение Хенона с внешним шумом [20]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2 + \varepsilon g(t), \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (3.1)$$



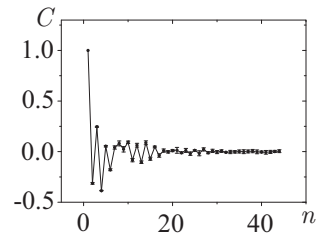


Рис. 2. Быстрое спадание автокорреляционной функции траектории для отображения Хенона в режиме развитого хаоса ( $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ,  $\Lambda \sim 1$ ).

где  $g(t)$  — гауссов  $\delta$ -коррелированный шум с нулевым первым моментом и единичной дисперсией, а  $\varepsilon$  — амплитуда внешнего шумового воздействия. Свойства отображения Хенона хорошо изучены. Это отображение часто используется для демонстрации процессов контроля и нацеливания [1]. Следует отметить, что хаотические режимы, возникающие в отображении Хенона, при разных значениях параметра имеют разную природу. В частности, это стационарный режим, соответствующий развитому хаосу с существенно положительным показателем Ляпунова [20], и перемежаемый режим [21, 22]. В обоих режимах в фазовом пространстве отображения существует квазиаттрактор. Притягивающие множества такого типа наиболее часто реализуются в физических системах. Поэтому метод нацеливания, обсуждаемый на примере отображения Хенона, окажется полезным для широкого класса задач нелинейной физики. Основа этого метода тесно связана с несколькими важными характеристиками физических систем. Это время возвратов Пуанкаре, время ухода из заданной окрестности и вероятность попадания в некоторую окрестность.

Для более полного понимания процессов, происходящих в динамической системе под воздействием внешнего шума, полезно использовать термодинамическую аналогию. Будем характеризовать меру хаотичности средней кинетической энергией или температурой системы. При таком подходе интуитивно понятно, что под воздействием внешнего шума следует ожидать проявления двух эффектов — ускорение диффузии траекторий и увеличение «объема» аттрактора. Первый эффект соответствует увеличению температуры, второй — тепловому «расширению». Как будет показано ниже, степень их влияния на статистику времен возврата сильно зависит от типа динамического режима, реализующегося в системе при текущих значениях параметров.

В этом разделе мы обсудим эффективность процесса нацеливания под воздействием внешнего шума в отображении Хенона в режиме развитого хаоса. Под развитым хаосом мы будем понимать тот диапазон параметров отображения, в котором все траектории притягиваются к квазиаттрактору и показатель Ляпунова существенно положителен  $\Lambda \sim 1$ . Хорошо известно, что в этом режиме автокорреляционная функция спадает экспоненциально быстро (рис. 2). Разумеется, это свидетельствует о сильной хаотичности системы. Выражаясь термодинамическим языком, температура такой системы велика. Если вычислить среднюю скорость вдоль траектории  $\langle V \rangle$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

то окажется, что она приближается к значению  $V_{max} = L/2\Delta t$ , где  $L$  — характерный размер притягивающего множества,  $\Delta t = 1$  — шаг дискретизации. Иными словами, траектория через один-два шага может оказаться в любой точке аттрактора. Естественно, что при такой

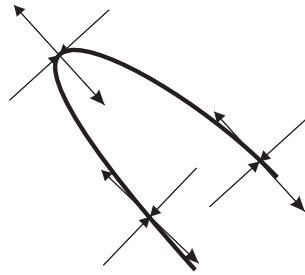


Рис. 3. Показаны устойчивые и неустойчивые направления в некоторых характерных точках аттрактора. Из рисунка следует, что в окрестности точки «складки» чувствительность системы к внешним воздействиям максимальна.

сильной внутренней хаотичности нельзя ожидать значительного увеличения «температуры» и, следовательно, скорости диффузии под действием внешнего шума малой амплитуды. Действительно, этот эффект оказывается настолько мал, что обнаружить его путем численного моделирования не удалось.

Теперь обратимся к эффекту «теплового расширения» аттрактора. Разумеется, влияние внешнего шума на эволюцию динамической системы, обладающей аттрактором, уже изучалось ранее, например в работе [23]. Известно, что величина такого влияния в значительной мере зависит от устройства притягивающего множества. В случае, если притягивающее множество системы является гиперболическим или квазигиперболическим аттрактором, то влияние внешнего шума на притягивающее множество системы незначительно. Это обусловлено простотой устройства аттракторов такого типа [24]. Действительно, каждая точка такого множества является гиперболической и, соответственно, имеет пару устойчивых и пару неустойчивых направлений. Первая пара определяет направления, по которым траектории экспоненциально быстро приближаются к неустойчивой точке, вторая — определяет направления экспоненциально быстрого ухода траекторий. Рисунок 3 демонстрирует направления устойчивых и неустойчивых направлений в некоторых характерных точках аттрактора. Направления экспоненциально быстрого ухода преимущественно совпадают с ветвями аттрактора, это поддерживает сильную хаотичность траекторий в установившемся динамическом режиме. Устойчивые направления, наоборот, направлены перпендикулярно аттрактору, обеспечивая быструю релаксацию системы к притягивающему множеству. Для такого расположения устойчивых и неустойчивых направлений влияние внешнего шума на аттрактор может быть легко оценено. Стохастичность динамики вдоль направления аттрактора изначально высока, поэтому изменения под воздействием малого шума в этом направлении будут малозаметны. Внешний шум оказывает значительное влияние в направлении, перпендикулярном аттрактору. В этом направлении происходит конкуренция эффекта притяжения к стационарному состоянию, величина которого может быть оценена соответствующим отрицательным показателем Ляпунова, и диффузии траекторий под действием внешнего шума амплитуды  $\varepsilon$ . Такая конкуренция может быть описана дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = -\Lambda_1 x + \varepsilon g(t),$$

где  $\Lambda_1$  — абсолютная величина отрицательного показателя Ляпунова. Теперь, учитывая  $\delta$ -коррелированность внешнего шума с коррелятором  $\langle g(t)g(t') \rangle = \delta(t - t')$  и следуя обычной схеме (см., например, [25]), легко получить уравнение Фоккера–Планка для функции



распределения  $P(x, t)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Lambda x P + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \right).$$

Стационарное решение этого уравнения и определяет степень «размытия» или расширения структуры аттрактора. Точное стационарное решение этого уравнения с учетом условия нормировки имеет вид

$$P(x) = \frac{\sqrt{\Lambda_1}}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \exp \left( -\Lambda_1 \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right). \quad (3.2)$$

Это решение в точности совпадает с гауссовым распределением с дисперсией  $\varepsilon/\sqrt{\Lambda_1}$ . Иными словами, аттрактор под воздействием шума «одевается в шубу» с характерной шириной порядка  $\varepsilon/\sqrt{\Lambda_1}$ . Поэтому при больших значениях  $\Lambda_1$  уширение аттрактора незначительно. Полученная оценка хорошо согласуется с результатами численного моделирования систем, обладающих квазигиперболическими аттракторами, например отображения Лози [24]. Нами было установлено, что при добавлении внешнего шума различной амплитуды в этом отображении не происходит уменьшения времени нацеливания.

Однако полученная оценка (3.2) не запрещает уменьшения времени нацеливания внешним шумом в отображении Хенона, поскольку притягивающее множество этого отображения представляет собой квазиаттрактор. Притягивающее множество такого типа обладают значительно более сложной, чем гиперболический аттрактор, структурой, чувствительной к малым внешним воздействиям. Такая чувствительность обусловлена особенностями устройства гомоклинической структуры неустойчивых точек [24], из которых состоит квазиаттрактор. В отношении отображения Хенона эти особенности гомоклинической структуры проявляются в сложном фрактальном устройстве бассейна притяжения квазиаттрактора. В результате сама форма притягивающего множества становится гиперчувствительной к шуму в окрестностях складок. Результаты численного моделирования показали, что величина расширения аттрактора в окрестности точки складки может на 2–3 порядка превосходить полученную выше оценку (3.2).

Исключительно интересно выяснить механизм такой гипертрофированной чувствительности к шуму. Оказывается, природа этого явления связана с довольно тонкими свойствами квазиаттрактора, а именно — с устройством его бассейна притяжения. На рисунке 4 показан аттрактор Хенона и геометрическая структура его бассейна притяжения при выбранном параметре.

Как видно, в некоторых местах аттрактор очень близко подходит к его границам. Если рассмотреть эволюцию окрестности точки максимального приближения аттрактора к границе бассейна притяжения (обозначенной на рис. 4 цифрой 1), захватывающую также небольшую область точек, не притягивающихся к аттрактору, то становится ясно, что под действием отображения эта окрестность приобретает сильно вытянутую форму. Отображение Хенона является гладким, поэтому связность фазового объема от итерации к итерации не должна нарушаться. Соответственно, точки, изначально не принадлежавшие бассейну притяжения, должны всегда оставаться вне его границ, а большинство точек, лежащих внутри бассейна, экспоненциально быстро притянутся к аттрактору. При этом всегда должен оставаться «перешеек», объединяющий эти два множества. Точки, принадлежащие этому «перешейку», не могут попасть на аттрактор, а точки, находящиеся в его окрестности, притягиваются к аттрактору заметно медленнее. После небольшого числа итераций вне аттрактора остаются только точки, притяжение которых к аттрактору ощутимо замедленно. Из рисунка 4 видно, что направление такого «замедленного притяжения» совпадает

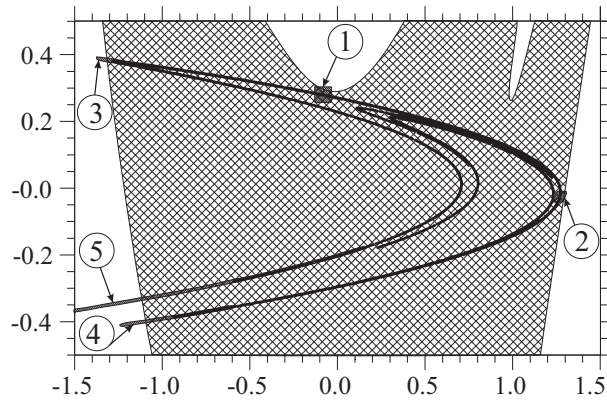


Рис. 4. Аттрактор Хенона показан черным ( $a = 1.4, b = 0.3$ ). Бассейн его притяжения показан штриховкой в клеточку. Цифрой 1 отмечена окрестность максимально близкого приближения аттрактора Хенона к границе своего бассейна притяжения. Последовательность цифр демонстрирует эволюцию этой окрестности под действием отображения.

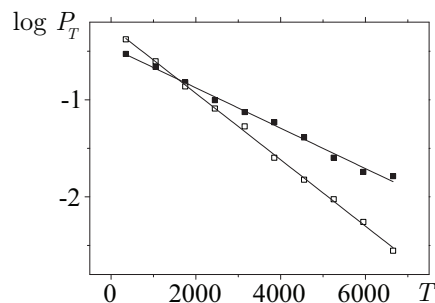


Рис. 5. Функция распределения времен возвратов Пуанкаре в режиме развитого хаоса ( $a = 1.4, b = 0.3$ ) для случая отсутствия шума и случая двукратного уменьшения времени возврата под действием внешнего шума. Исследовалась окрестность радиуса  $3 \cdot 10^{-3}$  точки 2 на рис. 6. Более пологая линия соответствует случаю отсутствия шума, более крутая — амплитуде шума  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Обе зависимости хорошо аппроксимируются экспоненциальным распределением.

с направлением складки. Поэтому аттрактор становится исключительно чувствительным к внешнему шуму в этих направлениях. Отметим также, что число складок аттрактора Хенона бесконечно велико. Их появление объясняется механизмом, который аналогичен механизму формирования подковы Смейла [26]. Под воздействием именно такого механизма формируется структура аттрактора Хенона [27].

Теперь рассмотрим влияния изменений, происходящих с аттрактором Хенона под действием шума, на время нацеливания в выбранную окрестность. Как говорилось выше, траектория отображения Хенона в режиме развитого хаоса за 1–2 итерации может оказаться в любой точке аттрактора. Этот случай соответствует баллистическому типу динамики, свойства времен нацеливания для которого обсуждались в предыдущем разделе. Было показано, что в этом случае время нацеливания порядка времени возврата и определяется величиной удельной меры  $p$  аттрактора в выбранной окрестности (2.5). Результаты численного моделирования отображения Хенона подтверждают справедливость полученных ранее оценок для баллистического режима.

На рисунке 5 приведены численные результаты определения функции распределения времен возврата Пуанкаре, которые хорошо совпадают с формулой (2.4). В качестве ко-

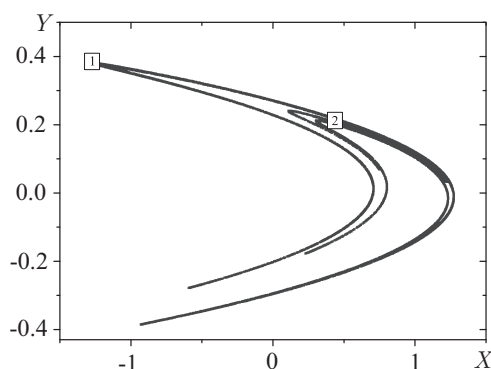


Рис. 6. Расположение исследуемых окрестностей на аттракторе Хенона ( $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ).

личественного критерия воздействия шума используем отношение времен возвратов с шумом  $T_{noise}$  и без шума  $T_0$ . Коэффициент  $\alpha$  будет определять эффективность нацеливания:

$$\alpha = \frac{T_0}{T_{noise}} = \frac{p_{noise}}{p_0}.$$

Величину этого коэффициента можно определить и по вероятностям возвратов. Из этой формулы видно, что метод нацеливания тем эффективнее, чем больше доля аттрактора, попадающая в выбранную окрестность. Второе соотношение гораздо удобнее для численного определения величины эффективности, поскольку дисперсия величины  $p$  существенно меньше дисперсии величины  $T$ . Это позволяет получать гораздо более точные результаты при одинаковой величине выборки. Для оценки эффективности метода нацеливания внешним шумом был проведен ряд численных экспериментов, в каждом из которых изучалось влияние амплитуды внешнего шума на удельную меру аттрактора в окрестностях различных радиусов в некоторых точках аттрактора Хенона. Расположение наиболее характерных исследованных точек приведено на рисунке 6. Результаты расчета величины  $\alpha$  приведены на рисунке 7.

Зависимость  $\alpha$ , показанная на рисунке 7 слева, убеждает, что для окрестностей малого радиуса рассматриваемый метод нацеливания не эффективен ( $\alpha < 1$ ), равно как и для окрестностей большого радиуса ( $\alpha \sim 1$ ). Характерный размер окрестности  $\epsilon_{cr}$ , при котором происходит переход от  $\alpha < 1$  к  $\alpha \sim 1$ , соответствует толщине «шубы», образовавшейся вокруг аттрактора под действием шума. Полученная выше оценка этой величины составляет  $\epsilon_{cr} = \epsilon / \sqrt{\Lambda_1}$ . Происходящий при этом переходе процесс легко понять. Действительно, если исследуемая окрестность настолько мала, что оказывается заключенной внутри хаотической «шубы» аттрактора, то при увеличении амплитуды шума общий объем аттрактора возрастает, а доля аттрактора, попавшая в окрестность, практически не изменяется. В результате нацеливание станет не эффективным ( $\alpha < 1$ ). В противоположном случае, если радиус окрестности существенно больше толщины «шубы», удельная доля аттрактора, находящаяся внутри окрестности, не зависит от амплитуды внешнего шума, что соответствует отсутствию влияния шума на нацеливание  $\alpha = 1$ . На первый взгляд может показаться, что такая картина должна наблюдаться на всем аттракторе, однако это не так, о чем свидетельствует правая часть рисунка 7. Численные эксперименты показали, что на аттракторе существуют окрестности определенного радиуса, для которых используемый метод нацеливания становится эффективным  $\alpha > 1$ . Численное моделирование функции распределения времен возврата для случая уменьшения среднего времени нацеливания (рис. 5) показало, что рас-

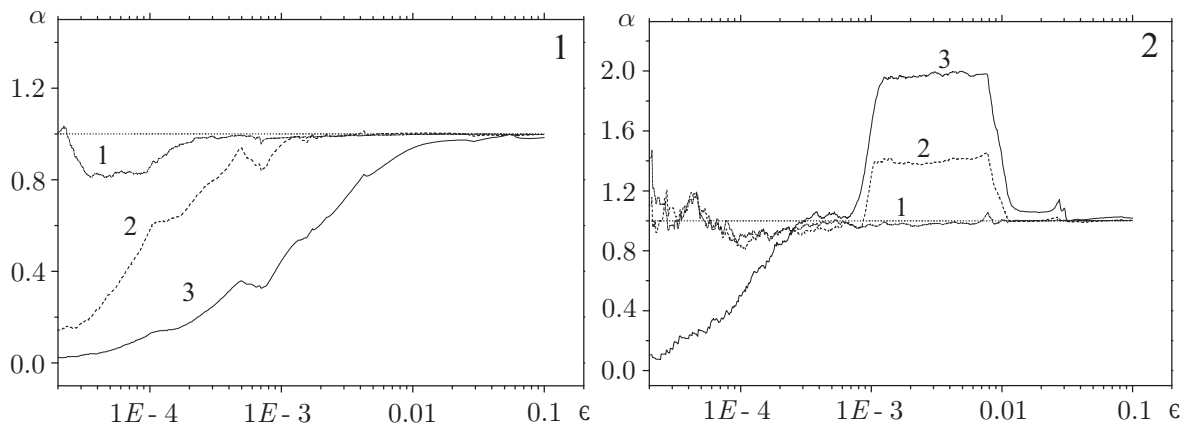


Рис. 7. Изменение времени нацеливания под действием внешнего шума  $\alpha$  для отображения Хенона в режиме развитого хаоса ( $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ ) в зависимости от характерного размера выбранной окрестности  $\epsilon$ . Кривые 1, 2, 3 на каждом из рисунков соответствуют ускорению времени нацеливания под действием шума с амплитудой  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ . Левый рисунок соответствует окрестности на странном квазиаттракторе, обозначенной на рис. 6 цифрой 1, правый рисунок соответствует окрестности, обозначенной цифрой 2.

пределение сохраняет экспоненциальный характер. Отдельно отметим этот факт, поскольку он означает, что вероятность наблюдения очень длинных времен возврата (по сравнению со средним временем возврата) снижается экспоненциальным образом (см. также (2.4)). Действительно, вероятность  $w(T)$  наблюдения времени возврата  $T$  под действием шума изменяется следующим образом:

$$\frac{w_{noise}(T)}{w_p(T)} = \frac{T_0}{T_{noise}} \exp\left(-T \frac{T_0 - T_{noise}}{T_{noise} T_0}\right) = \alpha \exp\left(-(\alpha - 1) \frac{T}{T_0}\right)$$

Поскольку механизм возврата не изменился, то простейшее предположение о природе эф-

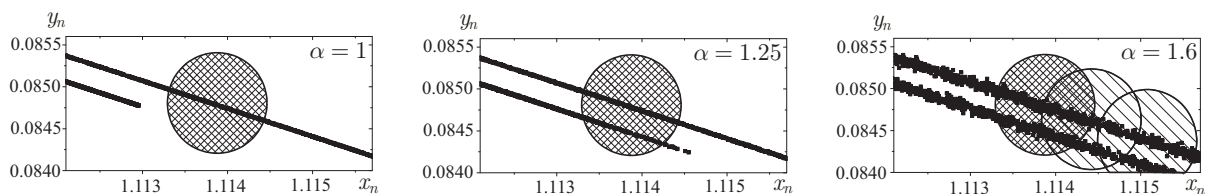


Рис. 8. Иллюстрация механизма ускорения возвратов Пуанкаре под действием шума. Левый рисунок изображает устройство аттрактора Хенона вблизи исследуемой окрестности (заштрихованная область). На среднем рисунке изображен аттрактор отображения Хенона с аддитивным внешним шумом амплитуды  $\epsilon = 10^{-5}$ . Видно, что эффект «удлинения» складки аттрактора под действием внешнего шума значительно сильнее, чем эффект ее «утолщения». С увеличением амплитуды шума до  $\epsilon = 10^{-4}$  процесс вытягивания складок аттрактора усиливается (правый рисунок). Это увеличивает долю точек аттрактора, в окрестностях которых внешний шум эффективен для ускорения процесса нацеливания (линейная штриховка).

фекта ускорения заключается в том, что в исследуемую окрестность попадает значительное число точек, принадлежащих тем ветвям аттрактора, которые до включения внешнего воздействия находятся далеко от рассматриваемой окрестности. Это должно приводить к увеличению удельной доли аттрактора, содержащегося в окрестности, и, как следствие,

к ускорению процесса нацеливания. Действительно, проанализировав взаимное расположение аттрактора и окрестности, при тех значениях параметров, при которых наблюдается уменьшение времени нацеливания (рис. 8), мы наблюдаем попадание в исследуемую окрестность дополнительных точек аттрактора. Более того, мы можем связать этот эффект с «гиперчувствительностью» аттрактора к внешнему шуму в окрестности складки, которая обсуждалась нами выше. Под воздействием внешнего шума складка вытягивается и некоторая часть ее точек попадает в наблюдаемую окрестность, увеличивая удельную долю аттрактора, что, в свою очередь, ускоряет процесс нацеливания ( $\alpha > 1$ ). Зависимость эффективности процесса нацеливания в зависимости от амплитуды внешнего шума в этом случае представлена на рисунке 9. Из рисунка видно, что эффективность нацеливания начинает возрастать лишь после преодоления амплитудой некоторого внешнего порога, а затем быстро достигает максимума. При этом рост эффективности имеет степенной характер с показателем  $\gamma = 0.31 \pm 0.02$ .

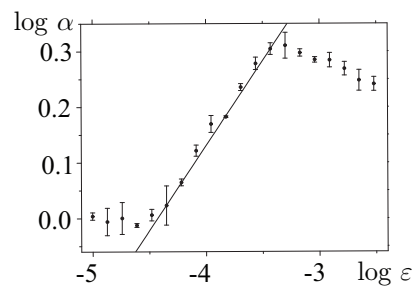


Рис. 9. Зависимость эффективности нацеливания от амплитуды внешнего шума в режиме развитого хаоса для случая, представленного на рис. 7.2. Радиус исследуемой окрестности  $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$ . Участок роста эффективности нацеливания хорошо аппроксимируется степенной зависимостью с показателем  $\gamma = 0.31 \pm 0.02$ .

Поскольку эффект удлинения складок значителен, а число складок аттрактора огромно, то даже при малой амплитуде внешнего воздействия рассматриваемый сценарий ускорения возвратов Пуанкаре будет наблюдаться в значительной доле окрестностей аттрактора Хенона. Естественно, что диапазон масштабов, на котором будет наблюдаться эффект уменьшения времени возврата, равно как и сама величина такого уменьшения, может сильно варьироваться в зависимости от расположения целевой окрестности на аттракторе.

#### 4. Влияние внешнего шума в режиме перемежаемости

Как уже говорилось ранее, отображение Хенона кроме режима развитого хаоса, может также находиться в режиме перемежаемости [21, 22]. Такой режим характеризуется близким к нулю старшим показателем Ляпунова и значительной долей регулярной динамики. Области ламинарного движения малоинтересны с точки зрения контроля из-за малой плотности неустойчивых циклов в этих областях. Поэтому мы будем рассматривать влияние внешнего шума на время нацеливания в окрестности, лежащей в области с высокой хаотичностью. Динамика отображения в этой области имеет баллистический характер, поэтому можно предполагать, что связь между удельной долей аттрактора, содержащегося в исследуемой окрестности, и временем нацеливания сохранится. Соответственно, время нацеливания будет равно среднему времени нацеливания в хаотической области  $\langle T_{ch} \rangle$ , де-

ленному на удельную долю хаоса в общей динамике системы:

$$\langle T \rangle = \langle T_{ch} \rangle \frac{\langle \tau_{ch} \rangle + \langle \tau_{lam} \rangle}{\langle \tau_{ch} \rangle} = \langle T_{ch} \rangle \left( 1 + \frac{\langle \tau_{lam} \rangle}{\langle \tau_{ch} \rangle} \right),$$

где  $\langle \tau_{ch} \rangle$  и  $\langle \tau_{lam} \rangle$  — усредненные длительности хаотических и ламинарных фаз соответственно. Влияние внешнего шума на  $\langle T_{ch} \rangle$  мы обсудили в предыдущем разделе. Рассмотрим теперь, как изменяется под действием шума отношение  $\langle \tau_{lam} \rangle / \langle \tau_{ch} \rangle$ . Стохастичность динамики в течение хаотических фаз велика, поэтому естественно, что величина  $\langle \tau_{ch} \rangle$  слабо чувствительна к малому внешнему шуму. Напротив,  $\langle \tau_{lam} \rangle$  может сильно зависеть от амплитуды внешнего воздействия. Для проведения оценки величины такого влияния удобно рассмотреть модель процесса формирования ламинарной фазы. Из литературы известно, что наблюдаемая в отображении Хенона перемежаемость относится к I роду [21, 22]. Соответственно, динамика на протяжении ламинарной фазы будет определяться следующим отображением:

$$x_{n+1} = x_n + a + bx^2 + \varepsilon g(t),$$

где  $g(t)$  — внешнее стохастическое воздействие. Нас будет интересовать вероятность перехода траектории из точки  $x = -x_0$  в область  $x > x_0$  за время  $\tau$ . Мы будем рассматривать случай развитой перемежаемости I рода, в котором функция распределения длительности ламинарных фаз сильно локализована [28] в окрестности значения  $\tau_{max} = \pi / (2\sqrt{ab})$ . Иными словами, время движения через ламинарный «коридор» практически не зависит от начальной координаты ламинарной фазы. Этот факт является следствием того, что при больших значениях  $x$  скорость  $\dot{x} \sim x^2$ , а потому очень велика. В результате движение «вне границ коридора» длится значительно меньше медленной ламинарной стадии. Естественно, такое относительное постоянство длительности ламинарных фаз наблюдается лишь в случае отсутствия внешнего шума. Чтобы проанализировать процесс, происходящий при включении малого стохастического воздействия, необходимо провести процедуру усреднения. Для этого перейдем от отображения к непрерывно меняющейся переменной  $x$ , учитывая малую величину ее изменения на каждом шаге итерации:

$$\dot{x} = a + bx^2 + \varepsilon g(t).$$

Процедура усреднения уравнений такого вида хорошо описана в литературе [25]. Поэтому довольно просто можно получить уравнение Фоккера–Планка для функции распределения плотности траекторий  $P(x, t)$  вида

$$\dot{P} = \frac{\partial}{\partial x} (a + bx^2) P + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P. \quad (4.1)$$

Непосредственное решение  $P(x, t)$  этого уравнения является довольно сложной задачей. Точное решение и анализ полученных результатов во всевозможных предельных случаях можно найти, например, в работе [29]. Избегая громоздких вычислений, ограничимся простыми оценками функции  $P(x, t)$ . Оценим величины производных по времени и координате следующим образом:

$$\dot{P} \sim \frac{P}{T}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} \sim \frac{P}{X}.$$

Величина  $\tilde{T}$  соответствует характерному временному масштабу процесса, иными словами — порядка средней длительности ламинарной фазы. Величина  $\tilde{X}$  определяет масштаб происходящего процесса по оси координат. Проанализируем степень важности вкладов различных частей уравнения (4.1). Слагаемое  $\dot{P}$  определяет характер временной эволюции, а потому остается важным при любом значении параметров. Слагаемое  $\frac{\partial}{\partial x}bx^2P$  велико в начале и конце ламинарной фазы, поэтому его также следует учитывать всегда. Соответственно, важным является соотношение слагаемых  $\frac{aP}{L}$  и  $\frac{\varepsilon^2P}{L^2}$ . Если первая величина больше второй, то это означает, что шум настолько мал, что слабо влияет на динамику системы на протяжении всей ламинарной стадии. Соответственно, величина  $\tilde{T}$  не будет зависеть от амплитуды шума  $\varepsilon$ . Оставшиеся три слагаемых должны быть одного порядка:

$$\frac{P}{\tilde{T}} \sim \frac{a}{(\tilde{L})^2}P \sim \frac{1}{\tilde{L}}b\tilde{L}^2P.$$

Выразим из этих соотношений  $\tilde{L} = \sqrt{a/b}$  и найдем критическое значение параметра  $\varepsilon_{cr}$ , при котором внешний шум начинает влиять на динамику системы:

$$\varepsilon_{cr} = \sqrt{a\tilde{L}} = a^{3/4}b^{1/4}.$$

Ситуация  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  является наиболее интересной для нас. В этом случае величинами одного порядка будут слагаемые, связанные с временной эволюцией, нелинейностью и внешним шумом:

$$\frac{P}{\tilde{T}} \sim \frac{1}{\tilde{L}}b\tilde{L}^2P \sim \varepsilon^2 \frac{1}{(\tilde{L})^2}P.$$

Из этих соотношений легко получить зависимость характерного масштаба времени  $\tilde{T}$ , определяющего длительность ламинарной фазы, от параметра  $\varepsilon$ :

$$\tilde{T} \sim \varepsilon^{-\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, на графике  $\langle \tau_{lam} \rangle (\varepsilon)$  в определенном диапазоне амплитуды внешнего шума  $\varepsilon$  будет наблюдаться степенная зависимость с показателем  $2/3$ , что согласуется с результатом, полученным в работе [29]. Запишем величину  $\alpha$  эффективности метода нацеливания, с учетом всего выше изложенного:

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\langle T \rangle_{no\ noise}}{\langle T \rangle_{noise}} = \frac{\langle T \rangle_{ch\ no\ noise}}{\langle T \rangle_{ch\ noise}} \frac{1 + \frac{\langle \tau_{max} \rangle}{\langle \tau_{ch} \rangle}}{1 + \frac{\langle \tau_{lam} \rangle (\varepsilon)}{\langle \tau_{ch} \rangle}}. \quad (4.2)$$

Зависимость  $\langle T \rangle_{ch\ no\ noise} / \langle T \rangle_{ch\ noise}$ , обсуждавшаяся в предыдущем разделе, в случае отсутствия специфических особенностей устройства аттрактора в исследуемой окрестности, равна 1 при амплитуде внешнего воздействия  $\varepsilon < \varepsilon\sqrt{\Lambda_1}$ . Для амплитуд шума  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$  величина  $\langle \tau_{lam} \rangle$  также не будет зависеть от величины внешнего воздействия; как следствие, эффективность процесса нацеливания в этом случае равна 1. С дальнейшим ростом  $\varepsilon$  степенная зависимость  $\langle \tau_{lam} \rangle (\varepsilon)$  в случае развитой перемежаемости ( $\langle \tau_{lam} \rangle (\varepsilon) \gg \langle \tau_{ch} \rangle$ ) обеспечит степенной рост  $\alpha$  эффективности процесса нацеливания. Отметим также, что величина этого роста имеет верхнюю границу:

$$\alpha_{max} = \frac{\langle \tau_{ch} \rangle + \langle \tau_{max} \rangle}{\langle \tau_{ch} \rangle}.$$

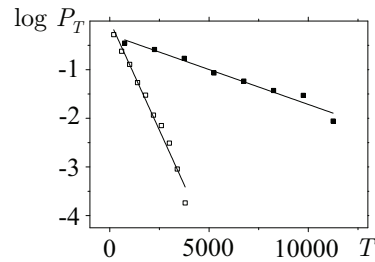


Рис. 10. Влияние внешнего шума на функцию распределения времен возвратов Пуанкаре в окрестность  $(-0.537963, 0.3431121)$ , расположенную вдали от областей ламинарного движения, радиуса  $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$  в режиме перемежаемости ( $a = 1.22661$ ,  $b = 0.3$ ). Более пологая линия соответствует случаю отсутствия шума, более крутая — амплитуде шума  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Достижение этого предела означает полное разрушение ламинарных фаз в результате внешнего воздействия. Из этого выражения следует, что максимальное значение эффективности нацеливания пропорционально удельной доле ламинарных стадий в невозмущенной динамике. Эта величина (как показано в [27]) связана с показателем Ляпунова. Соответственно, максимальную эффективность наведения можно оценить как отношение показателя Ляпунова для хаотических фаз к общему показателю Ляпунова для невозмущенной эволюции системы:

$$\alpha_{max} = \frac{\Lambda_{ch}}{\Lambda}.$$

Таким образом, метод нацеливания внешним шумом для перемежаемых режимов будет тем эффективнее, чем ниже показатель Ляпунова невозмущенной исследуемой системы.

Процесс ускорения нацеливания, в случае перемежаемого поведения системы, можно сравнить с эффектом «нагрева» в рамках термодинамической аналогии, обсуждавшейся нами ранее. В некотором смысле, внешний шум приводит к «плавлению» областей регулярного движения, что приводит к ускорению процессов переноса. При дальнейшем увеличении амплитуды внешнего шума  $\epsilon$  превысит порог  $\epsilon\sqrt{\Lambda_1}$ , после преодоления которого эффект «распрения аттрактора» вызовет уменьшение величины  $\langle T \rangle_{ch\ no\ noise} / \langle T \rangle_{ch\ noise}$ . В целом это приведет к спаданию эффективности нацеливания при больших амплитудах внешнего шума.

Обратимся теперь к результатам численного моделирования воздействия внешнего шума на отображение Хенона в режиме перемежаемости. Моделирование проводилось по методу, описанному в предыдущей главе. Для определения среднего времени возврата Пуанкаре  $\langle T \rangle$  рассчитывалась удельная мера аттрактора в окрестности  $p$ . Эти величины связаны соотношением (2.5). Чтобы продемонстрировать тот факт, что статистические свойства времен возврата не изменились с переходом системы в режим перемежаемости, путем численного моделирования была построена зависимость функции распределения времен возврата Пуанкаре от амплитуды внешнего шума (рис. 10). Если сравнить этот рисунок с рисунком 5, видно, что функции распределения времен возврата остались экспоненциальными, их характер зависимости от амплитуды шума не изменился, а величина этой зависимости значительно возросла.

Основные результаты численного моделирования приведены на рисунке 11. График слева демонстрирует, насколько эффективен рассматриваемый способ нацеливания (в зависимости от радиуса окрестности) для нескольких случаев, отличающихся амплитудой внешнего стохастического воздействия  $\epsilon$ . Из рисунка видно, что чем больше амплитуда



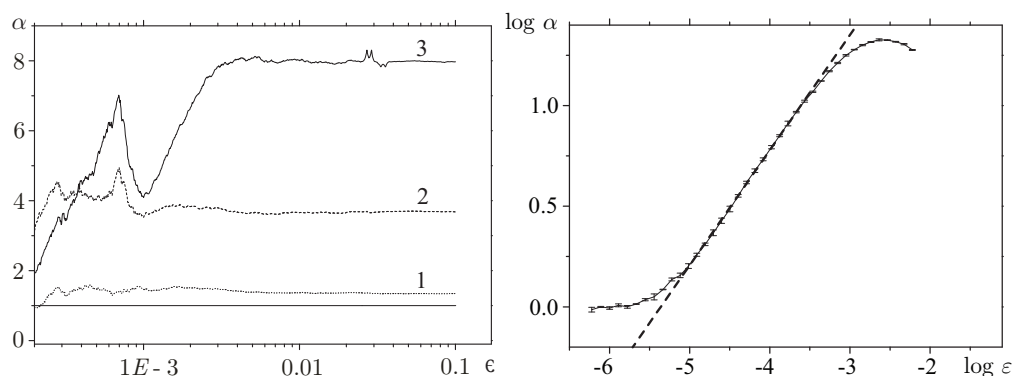


Рис. 11. Эффективность ускорения процесса стохастического нацеливания в зависимости от амплитуды внешнего шума и размера целевой окрестности для отображения Хенона в режиме перемежаемости ( $a = 1.22661, b = 0.3$ ). Слева представлена зависимость эффективности нацеливания  $\alpha$  в окрестность точки  $(-0.537963, 0.3431121)$  от ее радиуса  $\epsilon$  для различных амплитуд внешнего шума  $\epsilon$ . Графики 1, 2, 3 соответствуют различным амплитудам внешнего шума  $\epsilon = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-3}, \epsilon = 10^{-2}$ , соответственно. Справа представлена зависимость  $\alpha$  для окрестности радиуса  $\epsilon = 3 \cdot 10^{-3}$  от амплитуды внешнего шума  $\epsilon$  в двойном логарифмическом масштабе. Пунктирная прямая указывает на степенную зависимость  $\alpha(\epsilon)$  в определенном диапазоне величины  $\epsilon$ .

внешнего шума, тем больше максимальная эффективность нацеливания. Эта величина достигает максимума при определенном значении радиуса  $\epsilon_{cr}$  исследуемой окрестности и далее остается неизменной. Исходя из проделанных ранее теоретических оценок, пороговое значение  $\epsilon_{cr}$  составляет  $\epsilon/\sqrt{\Lambda_1}$ . Для случая, приведенного на рисунке 11, величина  $\sqrt{\Lambda_1} \sim 1$ , поэтому можно сказать, что оценка  $\epsilon_{cr}$  хорошо плохо согласуется с результатами численного моделирования. Поскольку для  $\epsilon < \epsilon_{cr}$  величина эффективности не будет зависеть от  $\epsilon$ , рассмотрим зависимость  $\alpha(\epsilon)$  при фиксированном радиусе окрестности  $\epsilon = 10^{-3}$ . Эта зависимость представлена на рисунке 11 слева. Согласно предсказаниям теории, шум с амплитудой ниже определенной величины не оказывает влияния на скорость нацеливания. При дальнейшем увеличении  $\epsilon$  наблюдается степенной рост  $\alpha$  с показателем степени  $\gamma = 0.57 \pm 0.01$ , что неплохо согласуется с теоретической оценкой  $\gamma = 2/3$ . Еще одна гипотеза связана с зависимостью старшего показателя Ляпунова и максимального значения эффективности нацеливания. Так например, для случая, изображенного на рисунке 11, отношение старших показателей Ляпунова для случаев  $\epsilon = 0$  и  $\epsilon = 0.002$  (максимум функции  $\alpha(\epsilon)$ ) равно  $\Lambda_{noise}/\Lambda_{no\ noise} \sim 22.4$ , что хорошо совпадает с максимальной эффективностью процесса нацеливания  $\alpha_{max} \sim 21.5$ . Все это указывает на достоверность построенной модели и правильность проведенных оценок.

## Список литературы

- [1] Bolotin Yu. L., Tur A. V., Yanovsky V. V. Chaos: Concepts, control and constructive use. Berlin: Springer, 2009. 198 p.
- [2] Aubry S. The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model // Solitons and condensed matter physics: Proc. Sympos. Nonlinear (Soliton) Structure and Dynamics in Condensed Matter, Oxford, 1978) / A. R. Bishop and T. Schneider (Eds.). (Springer Ser. Solid-State Sci., vol. 8.) Berlin–New York: Springer, 1978. P. 264–277.
- [3] Mather J. N. Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus // Topology, 1982, vol. 21, pp. 457–467.

- [4] Kandrup H. E. Phase space transport in noisy Hamiltonian systems // *Ann. New York Acad. Sci.*, 1998, vol. 867, pp. 320–333.
- [5] Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, pp. 1196–1199.
- [6] Shinbrot T., Grebogi C., Yorke J. Using chaos to direct trajectories to targets // *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 65, pp. 3215–3218.
- [7] Grebogi C., Ott E., Yorke J. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 57, pp. 1284–1287.
- [8] Karney C. Long-time correlations in the stochastic regimes // *Phys. D*, 1983, vol. 8, pp. 360–380.
- [9] Schroer C., Ott E. Targeting in Hamiltonian systems that have mixed regular/chaotic phase space // *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 512–519.
- [10] Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // *Acta Math.*, 1890, vol. 13, pp. 1–270.
- [11] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
- [12] Анищенко В. С., Нейман А. Б. Период возврата Пуанкаре в режиме динамического хаоса // *ЖТФ*, 1989, т. 59, № 8, с. 117–118.
- [13] Boshernitzan M. Quantitative recurrence results // *Invent. Math.*, 1993, vol. 113, no. 3, pp. 617–631.
- [14] Saussol B., Troubetzkoy S., Vaienti S. Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents // *J. Stat. Phys.*, 2002, vol. 106, pp. 623–634.
- [15] Kim C., Kim D. H. On the law of logarithm of the recurrence time // *Discrete Contin. Dyn. Sys.*, 2004, vol. 10, no. 3, pp. 581–587.
- [16] Haydn N., Luevano J., Mantica G., Vaienti S. Multifractal properties of return time statistics // *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, 224502, 4 p.
- [17] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Т. 1. М.: Мир, 1984. 511 с.
- [18] Zaslavsky G. M., Edelman M., Niyazov B. A. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of Hamiltonian chaotic dynamics // *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 159–181.
- [19] Кас М. Probability and related topics in physical sciences. New York: Interscience, 1959. 266 p.
- [20] Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.*, 1976, vol. 50, no. 1, pp. 69–77.
- [21] Kaplan H. Return to type-I intermittency // *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 68, pp. 553–556.
- [22] Kaplan H. Type-I intermittency for the Hénon-map family // *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, pp. 1655–1669.
- [23] Rodrigues Ch. S., Grebogi C., de Moura A. P. S. Escape from attracting sets in randomly perturbed systems. *arXiv:1004.3125*, April 2010.
- [24] Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. М: УРСС, 2007. 143 с.
- [25] Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
- [26] Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points // *Differential and combinatorial topology / S. S. Cairns (Ed.)*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1965. P. 63–80.
- [27] Кузнецов С. П., Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 294 с.
- [28] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [29] Hirsch H., Huberman B. A., Scalapino D. J. Theory of intermittency // *Phys. Rev. A*, 1982, vol. 25, pp. 519–532.