УДК 531.01

Сравнение моделей трения в динамике шара на плоскости

А. П. Иванов
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
141700, Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9
apivanov@orc.ru

Получено 22 декабря 2010 г.

Проводится сравнительный анализ динамики однородного шара на плоскости с сухим трением для двух гипотез: 1) контакт точечный (неголономная постановка); 2) нормальная нагрузка распределена в круговом пятне контакта радиуса ε. Предполагается, что при данных активных силах и коэффициенте трения в первой постановке возможно движение без проскальзывания. Вид функции распределения нормальной нагрузки ϕ в пятне контакта (вторая постановка) произволен, на нее накладываются лишь общие ограничения, обусловленные требованиями корректности предельного перехода. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ траектория шара с пятном контакта приближается к траектории шара с точечным контактом.

Ранее аналогичный результат был получен Фуфаевым [1] в предположении $\phi = \mathrm{const}$. Доказана возможность аппроксимации реакций неголономных связей силами вязкого трения [2, 3], а также силами сухого трения с неограниченно большим коэффициентом [4].

Ключевые слова: системы с качением, сухое трение

A. P. Ivanov

Comparative analysis of friction models in dynamics of a ball on a plane

Comparative analysis of the dynamics of a homogeneous ball on a plane with dry friction is conducted for two conjectures: 1) single contact point (non-holonomic statement); 2) the normal load is distributed in the circle spot of contact with radius ε. It is assumed that for given active forces and coefficient of friction the non-slip motion is possible. The expression for load distribution function ϕ at the contact spot (second statement) is arbitrary, with general mild restrictions, which ensure correctness of the passage to the limit. It is shown that for $\varepsilon \to 0$ the trajectory of the ball with contact spot approaches the trajectory of the ball with single contact point.

Previously similar result was obtained by Fufaev [1] in the case $\phi = \mathrm{const}$. The possibility of approximation of reactions of non-holonomic constraints by means of forces of viscous friction was proved [2, 3], as well as by means of forces of dry friction with infinitely large coefficient of friction [4].

Keywords: systems with rolling motion, dry friction
MSC 2010: 70E18

1. Введение

Динамика тяжелого твердого тела, опирающегося одной из точек на горизонтальную плоскость (волчок) — известная классическая проблема механики, восходящая к Эйлеру, Даламберу и Пуассону. Ключевую роль в решении этой проблемы играет предположение о характере контактного взаимодействия (трения), заложенное в уравнения движения. При выборе модели трения возникает конфликт между ее реалистичностью и возможностью качественного исследования динамики волчка. В частности, наименее правдоподобное допущение об отсутствии трения (абсолютно гладкая опора) компенсируется наиболее существенным упрощением уравнений движения, позволяющим применить современные аналитические и качественные методы. Напротив, использование моделей, учитывающих размеры области контакта и взаимодействие различных видов трения, неизбежно приводит к численным расчетам, и возникает проблема обоснования качественных выводов, основанных на изучении некоторого (порой небольшого) числа интегральных кривых.

Удачным компромиссом можно считать гипотезу абсолютной шероховатости, исключающей возможность относительного скольжения в точке контакта. С одной стороны, отсутствие скольжения можно обосновать силами сухого трения (закон Кулона для трения покоя); с другой стороны, данный тип контакта описывается парой идеальных дифференциальных связей, что позволяет применить к анализу развитый аппарат неголономной механики [5]. На этом пути Бобылеву, Чаплыгину и другим ученым удалось построить аналитическое решение обсуждаемой задачи для некоторых частных случаев (см. [6]).

Серьезным аргументом против гипотезы абсолютной шероховатости стали выводы Контенсу [7], полученные при расчете сил сухого трения с учетом ненулевого диаметра области контакта тела с опорой. Если угловая скорость тела велика настолько, что в точках области контакта направления скорости скольжения существенно различаются, то при суммировании локальные силы трения частично взаимно компенсируются. Вследствие этого обращение скорости скольжения в точке контакта (центральной точке области контакта) при наличии верчения возможно лишь в исключительных ситуациях (например, верчение «спящего» волчка на месте). В такой ситуации может показаться целесообразным повторное исследование известных проблем на основе усложненных моделей трения (см. [8–12]). При этом следует иметь в виду, что усложнение моделей должно компенсироваться приобретаемой при этом выгодой в виде открытия новых эффектов либо получения рекомендаций для практического использования (например, стабилизация стационарных движений).

Данная работа посвящена сравнению моделей трения при точечном и распределенном контакте однородного шара с шероховатой плоскостью.

2. Уравнения движения шара с учетом пятна фрикционного контакта

Считая распределение масс сферически симметричным, обозначим массу, радиус и радиус инерции шара как m, r и ρ соответственно. Свяжем с неподвижной опорной плоскостью систему координат $OXYZ$, направляя ось OZ вертикально вверх. Изменение координат x, y центра шара и проекций его угловой скорости $\vec{\omega}$ описываются уравнениями

$$m\ddot{x} = F_x + T_x, \quad m\ddot{y} = F_y + T_y, \quad m\rho^2\dot{\vec{\omega}} = \vec{M} + \vec{M}_T \tag{2.1}$$

где F_x, F_y и $\vec{M}$ — проекции главного вектора и главный момент активных сил относительно центра шара, T_x, T_y и $\vec{M}_T$ — аналогичные характеристики сил трения. Последние приложены в точках круга D_ε радиуса $\varepsilon \ll R$, что позволяет при вычислении проекций вектора $\vec{M}_T$ на оси OX и OY считать вектор $\vec{T}$ приложенным в точке C, совпадающей с центром D_ε [1, 8], т. е.

$$M_{Tx} = RT_y, \quad M_{Ty} = -RT_x.$$

Для вычисления силы трения $\vec{T}$ используем закон Кулона в локальной форме

$$\vec{T}(A) = -\mu p(A)\frac{\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}, \quad A \in D_\varepsilon; \qquad |\vec{T}(A)| \leqslant \mu p(A), \tag{2.2}$$

где $p(A)$ — нормальное напряжение в точке A. Неравенство в формулах (2.2) описывает трение покоя. Будем далее считать, что $\omega_z \neq 0$, тогда в каждый момент времени скорость скольжения $\vec{v}(A)$ может обращаться в нуль не более чем в одной точке. Следовательно, суммарную силу и момент трения можно корректно определить как интегралы

$$\vec{T} = -\mu \iint\limits_{D_\varepsilon} p(A)\frac{\vec{v}(A)}{|\vec{v}(A)|}\,dx\,dy, \quad M_{Tz} = -\mu \iint\limits_{D_\varepsilon} p(A)\frac{(\vec{CA} \times \vec{v}(A), \vec{k})}{|\vec{v}(A)|}\,dx\,dy, \tag{2.3}$$

где $\vec{k}$ — орт оси OZ.

Обозначим (ξ, η) координаты вектора $\overrightarrow{CA}$, тогда формулу (2.3) можно переписать в виде

$$\vec{T}(A) = \mu F_z \iint\limits_{D_\varepsilon} \phi_\varepsilon(\xi,\eta)\frac{(\dot{x}(C) - \omega_z\eta, \dot{y}(C) + \omega_z\xi)}{\sqrt{(\dot{x}(C) - \omega_z\eta)^2 + (\dot{y}(C) + \omega_z\xi)^2}}\,d\xi\,d\eta \tag{2.4}$$

$$\dot{x}(C) = \dot{x} - R\omega_y, \quad \dot{y}(C) = \dot{y} + R\omega_x,$$

$$\phi_\varepsilon(\xi,\eta) = -p(A)/F_z, \quad \iint\limits_{D_\varepsilon} \phi_\varepsilon(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 1$$

где F_z — вертикальная составляющая главного вектора активных сил. Аналогично можно преобразовать вторую формулу (2.3).

Функцию $\phi_\varepsilon(\xi, \eta)$, описывающую распределение нормальных напряжений в области контакта, можно выбирать по-разному. К примеру, распределения

$$\phi^1_\varepsilon(\xi,\eta) = \mathrm{const} = (\pi\varepsilon^2)^{-1}, \quad \phi^2_\varepsilon(\xi,\eta) = \frac{2}{2\pi\varepsilon^3}\sqrt{\varepsilon^2 - \xi^2 - \eta^2}$$

описывают статические законы: равномерный [1] и Герца [7]. При учете качения полагают [12]

$$\phi^3_\varepsilon(\xi,\eta) = (1 + h\xi)\phi^2_\varepsilon(\xi,\eta)$$

и т. д. (см. [13]). Универсальной формулы для функции $\phi_\varepsilon(\xi, \eta)$ не существует, а ее вывод в конкретных случаях составляет самостоятельную сложную проблему.

В данной работе будем считать $\phi_\varepsilon(\xi, \eta)$ произвольной непрерывной в замкнутом круге D_ε функцией, удовлетворяющей условию нормировки (2.4), а также условию

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \max_{(\xi,\eta)\in D_\varepsilon} \varepsilon^2 \phi_\varepsilon(\xi,\eta) < \infty \tag{2.5}$$

ограничивающему рост функций $\phi_\varepsilon(\xi,\eta)$ при $\varepsilon \to 0$ (очевидно, эти функции бесконечно велики, так как их пределом в смысле распределений является δ-функция Дирака). Заметим, что для вышеприведенных распределений $\phi^1_\varepsilon(\xi,\eta)$ (равномерное) и $\phi^2_\varepsilon(\xi,\eta)$ (Герца) величина максимума в формуле (2.5) не зависит от ε, поэтому условие выполнено. Что касается распределения $\phi^3_\varepsilon(\xi,\eta)$, то оно также удовлетворяет условию (2.5) при естественном ограничении $h\varepsilon < 1$, выражающем неотрицательность нормальных напряжений в области контакта.

Коль скоро величина ε и распределение $\phi_\varepsilon(\xi,\eta)$ заданы, система (2.1), (2.4) замыкается. Тем не менее, использовать ее как для качественного, так и для численного анализа весьма неудобно ввиду необходимости расчета двойных интегралов. Поэтому целесообразно изучить асимптотическое поведение этой системы при $\varepsilon \to 0$. С физической точки зрения такой предельный переход соответствует переходу к классической модели точечного контакта, неизмеримо более простой и детально изученной в применении к обсуждаемой задаче.

3. Теорема о предельном переходе

Введем новые переменные u, v по формулам

$$\varepsilon u = \dot x(C), \quad \varepsilon v = \dot y(C)$$

и сделаем в интеграле (2.4) замену переменных $\xi = \varepsilon\overline{\xi}$, $\eta = \varepsilon\overline{\eta}$. Для силы трения получим следующее выражение:

$$\vec T = \mu F_z \iint\limits_{D_1} \varepsilon^2 \phi_\varepsilon(\varepsilon\overline{\xi},\varepsilon\overline{\eta}) \frac{(u-\omega_z\overline{\eta}, v+\omega_z\overline{\xi})}{\sqrt{(u-\omega_z\overline{\eta})^2+(v+\omega_z\overline{\xi})^2}}\, d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}, \tag{3.1}$$

где D_1 — единичный круг. В новых переменных система (2.1) примет вид

$$m\varepsilon\dot u = F_x - \gamma M_y + \kappa T_x, \quad m\varepsilon\dot v = F_y + \gamma M_x + \kappa T_y, \quad m\rho^2\dot{\vec\omega} = \vec M + \vec M_T, \tag{3.2}$$
$$\kappa = 1 + R^2/\rho^2, \quad \gamma = R/\rho^2,$$

где трение $\vec T(u,v,\varepsilon)$ определено формулой (3.1).

Система (3.1), (3.2) содержит малый параметр при производных $\dot u$, $\dot v$, что позволяет применить теорию Тихонова [14]. Допустим, что на некотором интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ выполнено условие

$$(F_x - \gamma M_y)^2 + (F_y + \gamma M_x)^2 < \kappa^2\mu^2F_z^2, \tag{3.3}$$

которое означает: шар, касающийся плоскости в единственной точке C, может двигаться без скольжения, так как при этом выполнено неравенство (2.2) (где вместо A подставлено C, а вместо $p(A)$ — суммарная нормальная нагрузка $-F_z$).

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть на некотором интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ решение задачи о качении шара с точечным контактом (неголономная постановка) согласуется с законом трения покоя* (2.2), *т. е. выполнено строгое неравенство* (3.3), *а распределение $\phi_\varepsilon(\xi,\eta)$ непрерывно и удовлетворяет условию* (2.5).

Тогда найдется значение $\varepsilon_0 > 0$, такое что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ решение системы (3.1), (3.2) *с начальными условиями $u(t_0) = 0$, $v(t_0) = 0$, $\vec{\omega}(t_0) = \vec{\omega}_0$ существует и единственно на заданном интервале, причем в каждой точке t этого интервала имеем*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} v(t) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}^*(t), \tag{3.4}$$

где $\vec{\omega}^*(t)$ угловая скорость шара, вычисленная в неголономной постановке.

Доказательство данного утверждения сводится к проверке условий теоремы Тихонова и имеет технический характер. Наметим основные его этапы.

1) Элементы матрицы Якоби J отображения $(u, v) \mapsto (T_x, T_y)$, заданного формулой (3.1), вычисляются путем дифференцирования (несобственного) интеграла по параметру:

$$J = mF_z \begin{pmatrix} \big\langle (u - \overline{\eta}\omega_z)^2 \big\rangle & -\big\langle (u - \overline{\eta}\omega_z)(v + \overline{\xi}\omega_z) \big\rangle \\ -\big\langle (u - \overline{\eta}\omega_z)(v + \overline{\xi}\omega_z) \big\rangle & \big\langle (v + \overline{\xi}\omega_z)^2 \big\rangle \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\big\langle f(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \big\rangle \triangleq \iint\limits_{D_1} \varepsilon^2 \phi_\varepsilon(\varepsilon\overline{\xi}, \varepsilon\overline{\eta}) \frac{f(\overline{\xi}, \overline{\eta})}{\big((u - \omega_z\overline{\eta})^2 + (v + \omega_z\overline{\xi})^2\big)^{3/2}} \, d\overline{\xi}\, d\overline{\eta}. \tag{3.6}$$

Вследствие условия (2.5) несобственные интегралы в формуле (3.5) абсолютно сходятся и равномерно ограничены при $u, v \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (стремятся к нулю при $u, v \to \infty$), что обеспечивает условие Липшица, а также существование и единственность решения задачи Коши для системы (3.2). Кроме того, матрица J симметрична и отрицательно определена (так как $F_z < 0$), что следует из неравенства Коши–Буняковского.

2) Вышеупомянутое отображение взаимно однозначно отображает плоскость $\mathbb{R}^2$ на открытый круг

$$T_x^2 + T_y^2 < \mu^2 F_z^2$$

Действительно, полагая $u, v \to \infty$ $(u/v = \mathrm{const})$, мы неограниченно приближаемся к любой выбранной точке граничной окружности. Исходя из принципа сохранения области при дифференцируемых отображениях с ненулевым якобианом, приходим к выводу: множество образов заполняет всю внутренность круга. Единственность следует из отрицательной определенности матрицы Якоби в каждой точке плоскости $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: перемещаясь из некоторой точки (u_1, v_1) в любую другую точку (u_2, v_2) вдоль прямолинейного отрезка, мы получим, что в каждой внутренней точке этого отрезка вектор приращения образа (T_x, T_y) образует тупой угол с направляющим вектором отрезка. Поэтому суммарное приращение при перемещении из одной точки в другую отлично от нуля.

3) Из неравенства (3.3) следует, что присоединенная система

$$m\varepsilon\dot{u} = F_x - \gamma M_y + \kappa T_x, \quad m\varepsilon\dot{v} = F_y + \gamma M_x + \kappa T_y \tag{3.7}$$

имеет единственную особую точку, которая в силу отрицательной определенности матрицы Якоби является глобальным аттрактором. Эту точку найдем, полагая левые части нулями и учитывая вторую часть доказательства.

Все условия теоремы Тихонова выполнены, откуда и следует сформулированное утверждение.

Замечание. В модели точечного контакта нулевой скорости скольжения соответствует целый круг возможных значений сил трения (неравенство (2.2)). Особая точка системы (3.7) определяется из условия, что силы трения принимают те же значения, что и в неголономной постановке. При этом скорость скольжения $\dot{x}(C) = \varepsilon u$, $\dot{y}(C) = \varepsilon v$ будет малой, но ненулевой величиной.

4. Выводы

Учет размеров пятна контакта приводит к выводу о невозможности движений шара без проскальзывания. Тем не менее, если в модели точечного контакта коэффициент трения достаточен для того, чтобы предотвратить скольжение, то скорости скольжения в распределенной модели исчезающе малы при $\varepsilon \to 0$. При этом различие между траекториями систем двух типов также стремится к нулю. Данный результат можно обобщить на случай волчков, не обладающих сферической симметрией. Однако при этом следует иметь в виду, что односторонний характер связи между телом и плоскостью может приводить к парадоксам несуществования или неединственности решений [15]. В этих случаях распределенная модель трения может оказаться полезной.

Отметим, что аппроксимация реакций неголономных связей силами бесконечно большого вязкого [2.3] или сухого трения [4] приводит к аналогичным результатам. На наш взгляд, эти подходы проще с позиций математических доказательств, но не бесспорны с точки зрения физики контактного взаимодействия.

Список литературы

[1] Фуфаев Н. А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // ПММ, 1966, т. 39, вып. 1, с. 67–72.

[2] Карапетян А. В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 42-51.

[3] Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 550-554.

[4] Козлов В. В. Замечание о сухом трении и неголономных связях // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 903–906.

[5] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем М. Наука, 1967. 519 с.

[6] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 335 с.

[7] Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. с. 60–77.

[8] Журавлев В. Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // МТТ, 2006, № 6, с. 3–8.

[9] Журавлев В. Ф., Климов Д. М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН, МТТ, 2005, № 6, с. 157–168.

[10] Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Глобальное движение Кельтского камня // Изв. РАН, МТТ, 2008, вып. 3, с. 8–16.

[11] Карапетян А. В. Двухпараметрическая модель трения // ПММ, 2009, т. 73, вып. 4, с. 515–519.

[12] Киреенков А. А. Связанные модели трения скольжения и качения // ДАН, 2008, т. 419, № 6, с. 759–762.

[13] Карапетян А. В. О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости // ПММ, 2010, т. 74, вып. 4, с. 531–535.

[14] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущеных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

[15] Иванов А. П. Об условиях отрыва в задаче о движении твердого тела по шероховатой плоскости // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 303–312.