

Устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним вращением

А. В. Борисов¹, И. С. Мамаев², Т. Б. Иванова³

^{1,2} Институт компьютерных исследований
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

³ Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

borisov@rcd.ru¹, mamaev@rcd.ru², tbesp@udm.ru³

Получено 29 октября 2010 г.

Рассмотрены фигуры равновесия и исследована устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним течением в классе эллиптических возмущений. Построена бифуркационная диаграмма данной системы, указаны условия существования стационарных решений.

Ключевые слова: самогравитирующая жидкость, эллиптический цилиндр, точка бифуркации, устойчивость, уравнения Римана

A. V. Borisov, I. S. Mamaev, T. B. Ivanova

Stability of a liquid self-gravitating elliptic cylinder with intrinsic rotation

We consider figures of equilibrium and stability of a liquid self-gravitating elliptic cylinder. The flow within the cylinder is assumed to be dew to an elliptic perturbation. A bifurcation diagram is plotted and conditions for steady solutions to exist are indicated.

Keywords: self-gravitating liquid, elliptic cylinder, bifurcation point, stability, Riemann equations

MSC 2010: 76B07, 76E07

1. Введение

Работа посвящена исследованию устойчивости (по части переменных) фигур относительного равновесия жидких самогравитирующих масс (жидкость идеальная несжимаемая). Эта задача имеет более чем трехсотлетнюю историю (см., например, историческое введение в [21]), тем не менее, в последнее время, в связи с появлением быстродействующих компьютеров и возможностью компьютерного эксперимента, в этих исследованиях открылись новые перспективы. Однако трехмерная задача, к классическим результатам которой относятся эллипсоиды Маклорена и Якоби, является достаточно сложной как для моделирования, так и с точки зрения наглядности представления результатов (см., например, [2]). С другой стороны, известна модельная (не связанная непосредственно с вопросами космогонии) задача о фигурах равновесия бесконечной однородной массы цилиндрической формы, вращающейся с заданным моментом вокруг оси цилиндра. В 1859 году Л. Матиссен [6] нашел, что бесконечный цилиндр с эллиптическим сечением является фигурой равновесия. Данная задача является упрощенной формой общей проблемы определения фигур равновесия вращающейся жидкости, так как достаточно рассматривать плоское сечение. Также в работе [6] впервые приведена начальная классификация фигур равновесия и приведено выражение для потенциала бесконечного эллиптического цилиндра. В работе Дирихле [1] было получено решение, описывающее пульсации жидкого эллипсоида. В дальнейшем частный случай решения Дирихле для случая эллиптического цилиндра был получен Липшицем [7], который проинтегрировал данную систему в квадратурах. С использованием несколько иного подхода аналогичные результаты были также получены в работах Лава [8] и Хикса [4].

Подробно задача о существовании и устойчивости плоских фигур равновесия без внутреннего течения, отличных от эллипса, была исследована в работах Джинса [5] и Глоба-Михайленко [3]. В частности, в работе [5] указаны точки бифуркации (в смысле Пуанкаре) кругового цилиндра, в работе [3] указаны точки бифуркации для семейства эллипсов (без внутренних течений) и приближенно построены фигуры, близкие к эллиптическим. Других широко известных классических работ по данной тематике практически нет. Интересно, что Ляпунов, например, отнес эту задачу к математическим «курьзам». Чандрасекхар [21], рассматривая динамику жидких эллипсоидов с применением вириального метода, также не рассматривал двумерный случай.

С другой стороны, двумерная задача гораздо проще с точки зрения анализа устойчивости и поиска точек бифуркации, а также для моделирования динамики эллиптического цилиндра компьютерными методами. Это позволяет апробировать на данной задаче различные методы анализа, которые впоследствии могут использоваться в трехмерной системе. В работе [16] приведен численный метод поиска новых двумерных фигур равновесия. Численным продолжением по параметру были получены фигуры равновесия, которые ответвляются от кругового цилиндра при возмущении различными гармониками.

В данной работе мы исследуем возможные фигуры равновесия и устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним полем скоростей. При этом внутренний момент (завихренность) и полный момент импульса направлены вдоль оси цилиндра. Отметим, что эта задача является более естественной с физической точки зрения (по сравнению со случаем без внутренних течений), так как с потерей устойчивости естественно ожидать появление внутренних течений во вновь образовавшихся фигурах.

2. Гамильтоново представление и интегралы движения

Рассмотрим жидкий самогравитирующий неограниченный эллиптический цилиндр постоянной плотности ρ , уравнение поверхности которого

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \tag{2.1}$$

где предполагаем $a_1 \geq a_2$.

Гравитационный потенциал V однородной массы, ограниченной поверхностью (2.1), во внутренних точках с координатами (x_1, x_2) удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta V = 4\pi G\rho$ и может быть получен предельным переходом из выражения для эллипсоида, когда одна из осей стремится к бесконечности [10, 18]:

$$V = -G\pi\rho a_1 a_2 \lim_{a_3 \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda} \right) \frac{a_3}{\Delta} d\lambda, \tag{2.2}$$

где $\Delta = \sqrt{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)}$, G — гравитационная постоянная. Элементарное интегрирование дает:

$$V = 2G\pi\rho a_1 a_2 \left(U_0(a_3) + \frac{2x_1^2}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{2x_2^2}{a_2(a_1 + a_2)} \right), \tag{2.3}$$

где постоянная $U_0(a_3) \rightarrow \infty$ ($a_3 \rightarrow \infty$ — высота цилиндра), но не дает вклада в уравнения движения и может быть опущена.

Для трехосного эллипсоида потенциальная энергия U всей массы задается с помощью объемного интеграла:

$$U = -\frac{1}{2} \int V \rho dx_1 dx_2 dx_3 = -\frac{8}{15} G(\pi\rho a_1 a_2 a_3)^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\Delta}. \tag{2.4}$$

Устремляя $a_3 \rightarrow \infty$, получим потенциальную энергию на единицу длины для эллиптического цилиндра [7]:

$$U(a_1, a_2) = 4Gm^2 \ln \frac{a_1 + a_2}{2}, \tag{2.5}$$

где $m = \rho\pi a_1 a_2$ — масса на единицу длины цилиндра.

Жидкий цилиндр — система с бесконечным числом степеней свободы, однако уравнения Лагранжа–Эйлера допускают частное решение, которое описывается конечным числом динамических переменных и линейно зависит от начальных условий [1] (современное изложение см. в [2, 14]):

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}_0, \det \mathbf{F}(t) = 1, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ — вектор начальных положений частиц, $\mathbf{F}(t)$ — матрица динамических переменных.

В качестве обобщенных координат удобно выбрать полуось эллипса сечения (учитывая сохранение массы $a_1 a_2 = \text{const}$), φ — угол поворота цилиндра вокруг своей оси как целого в неподвижной системе координат и ψ — угол, описывающий внутреннее движение относительно главных осей цилиндра. Тогда

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin -\psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^0 & 0 \\ 0 & a_2^0 \end{pmatrix}^{-1}, \tag{2.7}$$

где a_1^0, a_2^0 — главные полуоси в начальный момент, φ и ψ отсчитываются в одном направлении.

Эволюция системы в представлении (2.7) с потенциалом (2.3) описывается уравнениями Римана [9]. Вследствие того, что динамика жидкости подчиняется принципу Гамильтона, решение описывается канонической системой с тремя степенями свободы следующим образом (см. например, [14], где приведена также подробная библиография).

Вычисляя кинетическую энергию жидкости с учетом (2.6) и (2.7), получим:

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + (a_1\dot{\varphi} - a_2\dot{\psi})^2 + (a_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\psi})^2 \right). \quad (2.8)$$

Выберем единицу измерения длины так, чтобы радиус эквивалентного кругового цилиндра был равен единице: $a_1 a_2 = \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 r_0^2 = r_0^2$, где \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 — безразмерные полуоси, масштаб энергии $E_0 = \pi \rho r_0^2$. Для краткости обозначим $\tilde{a}_1 = a$, из условия сохранения массы с учетом выбора единицы измерения длины получим $\tilde{a}_2 = 1/a$. Тогда функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{\dot{a}^2}{2} \left(1 + \frac{1}{a^4} \right) + \frac{1}{2} \left(a\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\dot{\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\dot{\varphi} - a\dot{\psi} \right)^2 - 2\omega_0^2 \ln \frac{a + 1/a}{2}, \quad (2.9)$$

где $\omega_0^2 = 2\pi\rho G$.

Переменные φ, ψ являются циклическими, следовательно, имеется два интеграла движения:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \dot{\varphi} - 2\dot{\psi}, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \dot{\psi} - 2\dot{\varphi}. \quad (2.10)$$

С точностью до постоянного множителя p_ψ совпадает с завихренностью Γ (масштаб $\Gamma_0 = r_0^2 \sqrt{\pi^3 \rho G}$), p_φ — момент импульса на единицу длины M (масштаб $M_0 = r_0^4 \sqrt{\pi^3 \rho^3 G}$):

$$\Gamma = \int \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) dx dy = 2p_\psi, \quad M = \rho \int (x\dot{y} - y\dot{x}) dx dy = -\frac{p_\varphi}{2}.$$

Определенные таким образом момент и завихренность направлены в одну сторону.

Функция Гамильтона определяется преобразованием Лежандра:

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} + p_\psi \dot{\psi} + p_a \dot{a} - L,$$

где $p_a = \partial L / \partial \dot{a} = \dot{a}$.

С учетом (2.10), окончательно имеем:

$$H = \frac{p_a^2}{2(1 + 1/a^4)} + U_r, \quad U_r = \frac{c_1^2}{(a - 1/a)^2} + \frac{c_2^2}{(a + 1/a)^2} + 2\omega_0^2 \ln \frac{a + 1/a}{2}, \quad (2.11)$$

где U_r — приведенная потенциальная энергия, c_1, c_2 — фиксированные константы первых интегралов:

$$c_1 = \frac{p_\varphi + p_\psi}{2} = \frac{\Gamma}{4} - M, \quad c_2 = \frac{p_\varphi - p_\psi}{2} = -\frac{\Gamma}{4} - M. \quad (2.12)$$

Таким образом, эволюция полуосей эллипса для решения (2.6) описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы, гамильтониан которой параметрически зависит от величин интегралов момента и завихренности. Если известно решение $a(t)$ системы (2.11), то эволюция углов $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ получается с помощью независимых квадратур:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1 + c_2}{(a - 1/a)^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{c_1 - c_2}{(a - 1/a)^2}. \quad (2.13)$$

3. Стационарные решения и бифуркационная диаграмма

Стационарные состояния, для которых полуоси эллипса не меняются, соответствуют неподвижным точкам системы (2.11), которые определяются уравнениями

$$\dot{a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} = 0, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial a} = 0. \tag{3.1}$$

Из первого уравнения находим $p_a = 0$, следовательно, стационарные состояния определяются критическими точками приведенного потенциала U_r , т. е. уравнением

$$-\frac{c_1^2(a + 1/a)}{(a - 1/a)^3} - \frac{c_2^2(a - 1/a)}{(a + 1/a)^3} + \frac{\omega_0^2(a - 1/a)}{(a + 1/a)} = 0. \tag{3.2}$$

Вследствие симметрии уравнения (3.2) относительно замены $a \rightarrow 1/a$, достаточно рассмотреть его решения на интервале $a \in [1, +\infty)$. Поэтому сделаем однозначную на данном интервале замену

$$u = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2, \tag{3.3}$$

где $u \in [4, +\infty)$. Приведенная потенциальная энергия (2.11) после замены (3.3) имеет вид

$$U_r = \omega_0^2 \ln \frac{u}{4} + \frac{c_1^2}{u - 4} + \frac{c_2^2}{u}. \tag{3.4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. После замены (3.3) гамильтониан (2.11) представляется в виде

$$H = \frac{2u(u - 4)}{u - 2} p_u^2 + U_r(u),$$

где $p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{u - 2}{2u(u - 4)} \dot{u}$.

Подставляя (3.3) в (3.2), находим уравнение, определяющее неподвижные точки:

$$f(u) = \omega_0^2 u^3 - (8\omega_0^2 + c_1^2 + c_2^2)u^2 + 8(2\omega_0^2 + c_2^2)u - 16c_2^2 = 0. \tag{3.5}$$

Отметим сходство этого уравнения с уравнением, определяющим регулярные прецессии осесимметричного волчка (случай Лагранжа), при этом $f(u)$ аналогична гироскопической функции волчка, которая также является полиномом третьей степени [12]. Аналогия между движением волчка Лагранжа и динамикой жидкого эллиптического цилиндра позволяет применить сходный подход к анализу устойчивости эллиптических стационарных движений.

Чтобы найти число корней (3.5) при различных значениях c_1, c_2 на интервале $u \geq 4$, вычислим на его границе значение функции $f(u)$ и ее производной:

$$f|_{u=4} = -16c_1^2 < 0, \quad f'|_{u=4} = -8c_1^2 < 0.$$

Используя дополнительно, что коэффициент при u^3 положительный, заключаем, что если $c_1 \neq 0$, при $u > 4$ всегда имеется лишь один корень, который обозначим u_* .

Таким образом,

- в данном случае при $c_1 \neq 0$ имеется одно (с точностью до замены $a \rightarrow 1/a$) двухпараметрическое семейство критических точек $u_*(c_1, c_2)$, которым соответствуют эллиптические цилиндры, сохраняющие форму;
- кроме того, при $c_1 = 0$ всегда имеется критическая точка $u = 4$, соответствующая круговому цилиндру (условия существования эллиптического стационарного решения при $c_1 = 0$ подробнее исследуются ниже).

Согласно (2.11), тип движения (вид траектории в конфигурационном пространстве) эллиптического цилиндра полностью определяется значением первых интегралов c_1, c_2, H . В связи с этим рассмотрим трехмерное пространство, точками которого являются значения первых интегралов (c_1, c_2, H) . Стационарные решения $u_*(c_1, c_2)$ определяют в этом пространстве двумерную бифуркационную поверхность

$$H = h(c_1, c_2) = H|_{p_a=0, a=a_*} = U_r(u_*(c_1, c_2), c_1, c_2), \quad (3.6)$$

где a_* получается обращением соотношения $u_* = \left(a_* + \frac{1}{a_*}\right)^2$. Эта поверхность отделяет область возможных значений интегралов от тех значений, при которых движение невозможно. При этом область возможных значений энергии при фиксированных c_1, c_2 определяется неравенством $H \geq h(c_1, c_2)$.

Стационарные решения, отвечающие круговому цилиндру ($u_* = 4$), в пространстве первых интегралов c_1, c_2, H определяют бифуркационную кривую (параболу), заданную уравнениями

$$c_1 = 0, \quad H_{cir} = \frac{1}{4}c_2^2. \quad (3.7)$$

Бифуркационная поверхность (3.6) и бифуркационная кривая (3.7) совместно с отмеченной областью возможных значений интегралов образуют полную бифуркационную диаграмму системы, общий вид которой и различные сечения приведены на рис. 1, 2.

Рассмотрим более подробно решение, соответствующее круговому цилиндру, и определим точки бифуркации в классе эллиптических цилиндров. Этому решению соответствует линия минимума бифуркационной диаграммы (рис. 1) — ребро на плоскости $c_1 = 0$, к которому при $|c_2| < 2\omega_0$ примыкает кривая, определяющая соответствующее круговое решение (3.7). При $|c_2| > 2\omega_0$ эта кривая располагается внутри поверхности (критическое значение $c_2 = \pm 2\omega_0$ определяется из уравнения (3.5) при $c_1 = 0, u_* = 4$).

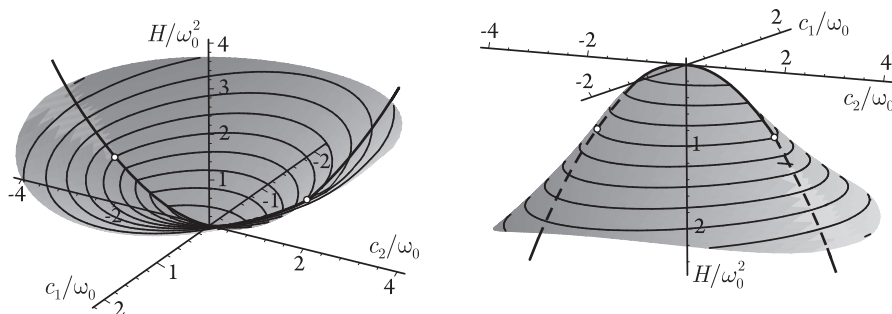


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма эллиптического цилиндра в пространстве интегралов c_1, c_2, H .

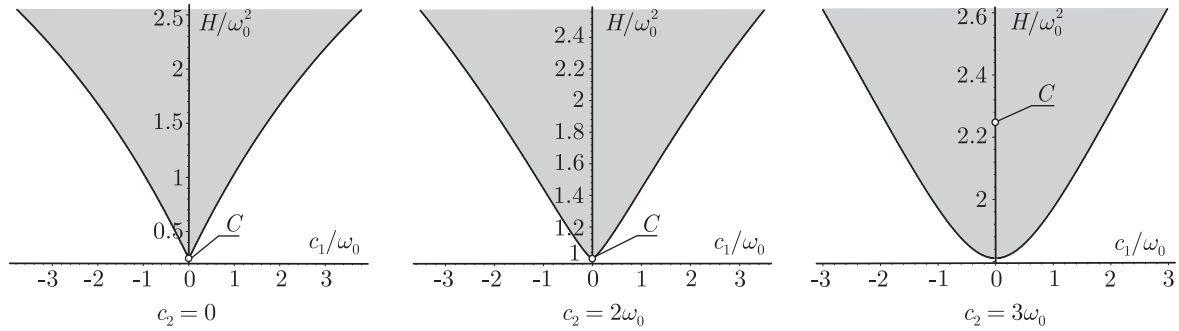


Рис. 2. Сечение поверхности (3.6) плоскостями $c_2 = \text{const}$. Серым цветом выделена область возможных значений интегралов движения. Выделенная точка C соответствует $u = 4$ (круговому цилиндру).

Уравнение бифуркационной кривой, соответствующей круговому цилиндру и получающейся сечением поверхности (на рис. 1) плоскостью $c_1 = 0$, может быть определено явно исключением переменной u как параметра из уравнений (3.4), (3.5) при $c_1 = 0$:

$$H_{ell}(c_2) = \omega_0^2 \left(1 + \ln \frac{c_2^2}{4\omega_0^2} \right). \tag{3.8}$$

Соответствующие зависимости энергии кругового цилиндра H_{cir} (3.7) (парабола) и эллиптического цилиндра H_{ell} (3.8) представлены на рис. 3. Точка ответвления

$$c_2 = \pm 2\omega_0, \quad H = \omega_0^2 \tag{3.9}$$

является точкой бифуркации, в которой решение, соответствующее круговому цилиндру, меняет свой тип с центра на фокус, то есть при $|c_2| < 2\omega_0$ устойчивым является круговой цилиндр, при $|c_2| > 2\omega_0$ — эллиптический.

При $c_1 = 0, u = 4$ интегралы движения (2.10) перестают быть независимыми и определяют одинаковое вращение с угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi} - \dot{\psi}$. Для определения этой угловой скорости представим уравнение (3.5) в виде

$$\omega^2 u + 4\omega_0^2 = 0, \tag{3.10}$$

откуда при $u = 4$ получим угловую скорость, соответствующую точке бифуркации:

$$\omega^2 = \omega_0^2 = 2\pi G\rho. \tag{3.11}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Бифуркационную поверхность (3.7) удобнее строить в параметрической форме $c_1(\eta, \xi), c_2(\eta, \xi), H(\eta, \xi)$. Для этого из уравнения (3.5) определим c_1 :

$$c_1 = \pm \frac{(u - 4)\sqrt{\omega_0^2 u - c_2^2}}{u}. \tag{3.12}$$

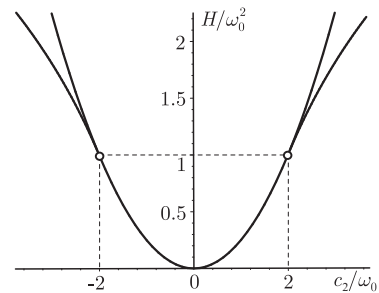


Рис. 3. Сечение бифуркационной диаграммы (3.6) плоскостью $c_1 = 0$. В выделенных точках происходит ответвление бифуркационной кривой (3.7) от поверхности (3.6).

Подставляя в (3.6), находим

$$\frac{c_1}{\omega_0} = \pm \frac{(\xi - 4)\sqrt{\xi - \eta^2}}{\xi}, \quad \frac{c_2}{\omega_0} = \eta, \quad \frac{H}{\omega_0^2} = \ln \frac{\xi}{4} + \frac{\eta^2}{\xi} + \frac{(\xi - \eta^2)(\xi - 4)}{\xi^2}. \quad (3.13)$$

При этом область возможных значений параметров (изображена серым цветом на рис. 4) определяется системой неравенств

$$\xi \geq 4, \quad \xi - \eta^2 \geq 0.$$

При каждом фиксированном η существует ξ_{\min} , начиная с которого существует стационарное решение.

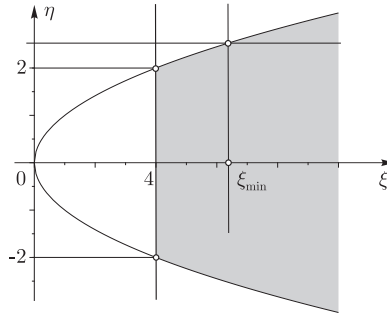


Рис. 4. Область возможных значений параметров, определяющих бифуркационную поверхность (3.6).

4. Устойчивость стационарных решений

Рассмотрим теперь проблему устойчивости стационарных решений, найденных выше, в классе возмущений, при которых цилиндр остается эллиптическим и течение описывается соотношением (3.5) (другими словами, в классе эллиптических возмущений). Как известно [20], это устойчивость по части переменных, в данном случае — устойчивость по переменным a, φ, ψ . Более того, принимая во внимание, что внутреннее течение, описываемое углом ψ , достаточно сложно измерить при внешнем наблюдении за эллиптическим цилиндром, мы ограничимся лишь исследованием *орбитальной устойчивости по отношению к возмущению переменных a, φ* . В этом случае, согласно (2.11), эволюция переменных описывается интегрируемой гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, гамильтониан которой параметрически зависит от величины интеграла циркуляции $p_\psi = \frac{\Gamma}{4}$:

$$H_{p_\psi}(a, p_a, \varphi, p_\varphi) = \frac{p_a^2}{2(1 + 1/a^4)} + \frac{(p_\varphi + p_\psi)^2}{4(a - 1/a)^2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{4(a + 1/a)^2} + 2\omega_0^2 \ln \frac{a + 1/a}{2}. \quad (4.1)$$

При этом стационарные решения (3.5) являются *критическими периодическими решениями* системы (4.1) (т. е. такими решениями, на которых интегралы p_φ и H зависимы).

Согласно работе [13], для анализа критических периодических решений интегрируемой двухстепенной гамильтоновой системы необходимо построить ее *бифуркационный комплекс*, при этом критические периодические решения являются устойчивыми тогда и только тогда, когда они лежат на краю бифуркационного комплекса.



ЗАМЕЧАНИЕ 3. Бифуркационный комплекс строится из бифуркационной диаграммы путем склеивания различных листов, соответствующих различным компонентам связности интегральных многообразий (торов), т. е. в данном случае

$$M_{h,c_\varphi} = \{(a, p_a, \varphi, p_\varphi) : H = h, p_\varphi = c_\varphi\}.$$

Бифуркационная диаграмма системы (4.1) строится на плоскости первых интегралов p_φ, H при некоторой фиксированной величине циркуляции $p_\psi = \frac{\Gamma}{4}$. Очевидно, что эти диаграммы являются сечением общей бифуркационной диаграммы в пространстве c_1, c_2, H (см. рис. 1) вертикальными плоскостями вида

$$c_1 - c_2 = p_\psi = \text{const.} \tag{4.2}$$

В зависимости от величины p_ψ они имеют различный тип (рис. 5).

В данном случае каждой точке в области возможных значений интегралов (отмечены серым цветом на рис. 5) соответствует лишь одно интегральное многообразие M_{h,c_φ} . Поэтому бифуркационный комплекс системы (4.1) состоит из единственного листа, который совпадает с частью плоскости p_φ, H , соответствующей возможным значениям первых интегралов (отмеченной серым цветом на рис. 5).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для всякого возможного значения интегралов p_φ, H , лежащих на границе, за исключением точки C (рис. 5), соответствующей фокусу, интегральное многообразие M_{h,c_φ} является инвариантным тором (тор Лиувилля). Точке C соответствует особое инвариантное многообразие M_{h,c_φ} , состоящее из особой точки типа фокус–фокус и примыкающего к нему многообразия, заполненного асимптотическими к фокусу траекториями.

Теорема 1. 1. Эллиптическое стационарное решение всегда устойчиво по отношению к возмущению переменных a, φ .

2. Стационарное решение, соответствующее круговому цилиндру, согласно (3.7), (3.9), (4.2), устойчиво по отношению к возмущению переменных a, φ при

$$|p_\psi| < 2\omega_0$$

и неустойчиво при

$$|p_\psi| > 2\omega_0.$$

Результаты об устойчивости критических периодических решений двухстепенной гамильтоновой системы, лежащих на краю бифуркационной диаграммы (комплекса), могут

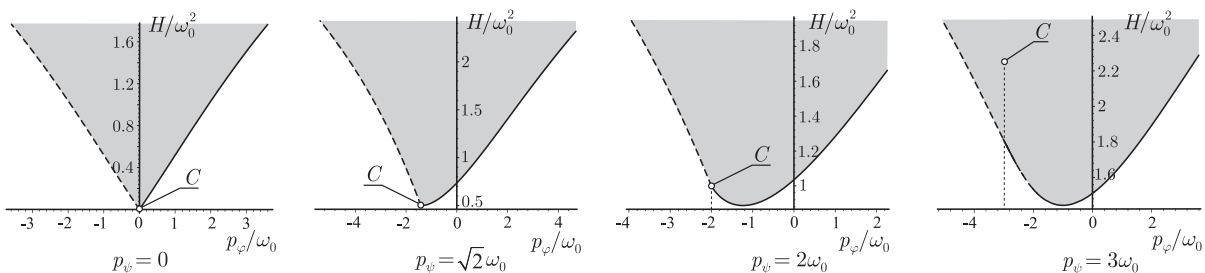


Рис. 5. Сечение поверхности (3.6) плоскостями $p_\psi = \text{const}$. Серым цветом выделена область возможных значений интегралов движения. Выделенная точка соответствует $u = 4$ (круговому цилиндру), для которого $c_1 = 0$, т. е. $p_\varphi = -p_\psi$.



быть естественным образом обобщены на случай трех степеней свободы. В данном случае можно показать, что вследствие того, что все эллиптические решения соответствуют бифуркационной поверхности, расположенной на краю, они являются устойчивыми по всем переменным a, φ, ψ .

5. Круговой цилиндр и аналоги эллипсоидов Якоби и Дедекинда

В работах Джинса [5], Глоба-Михайленко [3] и Лихтенштейна [19] исследуется проблема существования фигур равновесия без внутренних течений, близких к круговому и эллиптическому цилиндру. В них, в частности, показано, что при угловой скорости вращения ω кругового цилиндра, удовлетворяющей условию

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2}, \quad (5.1)$$

от кругового цилиндра «ответвляется» эллиптическое стационарное решение без внутреннего течения — аналог эллипсоида Якоби. Кроме того, делается замечание о неустойчивости кругового цилиндра при $\omega^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$ по отношению к эллипсоидальным возмущениям, в связи с тем, что энергия соответствующего эллиптического решения меньше. Обсудим эти результаты с точки зрения нашего анализа.

Если внутреннего течения нет (т. е. $\dot{\psi} = 0$, цилиндр вращается как твердое тело), приведенная потенциальная энергия (3.4) принимает вид

$$U_r = \omega_0^2 \ln \frac{u}{4} + \frac{p_\varphi^2}{2(u-2)},$$

где p_φ — интеграл движения, связанный с угловой скоростью вращения цилиндра $\omega = \dot{\varphi}$ следующим образом:

$$p_\varphi = (u-2)\omega. \quad (5.2)$$

Эллиптические стационарные состояния, отвечающие минимуму приведенной потенциальной энергии U_r , соответствуют неподвижным точкам, которые определяются уравнениями (3.1):

$$p_\varphi^2 u - 2\omega_0^2(u-2)^2 = 0. \quad (5.3)$$

Из (5.2)–(5.3) находим угловую скорость вращения эллиптического цилиндра (двумерного аналога эллипсоида Якоби (5.1)) и энергию в точке «бифуркации»:

$$\omega^2 = \frac{2\omega_0^2}{u} \Big|_{u=4} = \frac{\omega_0^2}{2}, \quad H = \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Кроме того, легко показать, что аналогичный результат получится для двумерного аналога эллипсоидов Дедекинда ($\dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} \neq 0$).

Этим цилиндрам соответствуют выделенные кривые бифуркационной диаграммы (рис. 1). На рис. 6 представлена проекция этих кривых на плоскость (c_1, c_2) . Точки ответвления A_1, A_2 соответствуют критическим значениям

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \pm\sqrt{2}\omega_0.$$

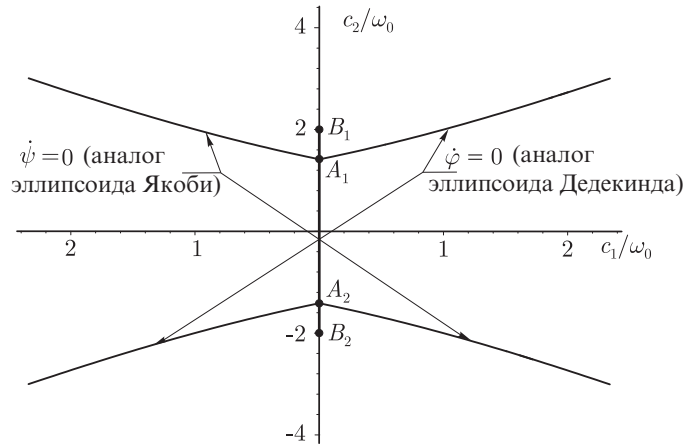


Рис. 6. В точках A_1, A_2 угловая скорость вращения $\omega^2 = \omega_0^2/2$, в точках B_1, B_2 угловая скорость вращения $\omega^2 = \omega_0^2$.

Также на рис. 6 выделены точки B_1, B_2 , которые являются точками бифуркации цилиндра с внутренним течением (3.11).

Как видно из этого рисунка (см. также рис. 5), потери устойчивости кругового цилиндра по отношению к эллиптическим возмущениям в точках A_1, A_2 (т. е. при $\omega^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$) не происходит, это происходит в точках B_1, B_2 (т. е. при $\omega^2 > \omega_0^2$).

Неточность в вышеприведенных работах [5, 3, 19] связана с тем, что энергия при $\omega^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$ не является функцией Ляпунова, тем не менее существует линейная комбинация первых интегралов, которая может выступать в роли функции Ляпунова.

6. Неразрывность течения и условия существования стационарных решений

Если внешнее давление равно нулю, то, согласно Пуанкаре [10], возможно равновесие жидкого самогравитирующего тела без внутреннего течения, если

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} < 1. \tag{6.1}$$

какова бы ни была форма внешней поверхности.

Доказательство этой теоремы следует из требования, чтобы сила тяжести, то есть равнодействующая силы притяжения и центробежной силы, была направлена на поверхности внутрь. В этом случае давление внутри жидкости положительно. В работе Лихтенштейна [19] показано, что если условие (6.1) не выполняется, то и гидростатические уравнения равновесия на поверхности нельзя удовлетворить.

Рассмотрим, как условие (6.1) обобщается на случай стационарных эллиптических цилиндров с внутренним течением. Как известно [1], давление внутри эллиптического цилиндра определяется соотношением

$$p(t) = p_0(t) + \sigma(t) \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right),$$

следовательно, условием существования решения является

$$\sigma(t) > 0.$$

Для нахождения $\sigma(t)$ запишем уравнения Римана для эллиптического цилиндра [14]:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \dot{\varphi}(-a_1\dot{\varphi} + a_2\dot{\psi}) + \dot{\psi}(a_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\psi}) &= -\frac{2\omega_0^2}{a_1 + a_2} + \frac{2\sigma}{a_1}, \\ \ddot{a}_2 - \dot{\varphi}(a_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\psi}) - \dot{\psi}(-a_1\dot{\varphi} + a_2\dot{\psi}) &= -\frac{2\omega_0^2}{a_1 + a_2} + \frac{2\sigma}{a_2}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для разрешения системы уравнений (6.2) относительно σ исключим слагаемые \ddot{a}_1, \ddot{a}_2 с помощью уравнения связи $a_1 a_2 = 1$, дифференцируя его дважды по времени, с учетом условия $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0$. Также воспользуемся явными выражениями для $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ через интегралы движения c_1, c_2 (2.13). В результате получим:

$$\sigma = \frac{u(u-4)\omega_0^2 - (u-4)c_2^2 + uc_1^2}{u(u-2)(u-4)}. \quad (6.3)$$

Для определения области существования решения построим линии уровня функции (6.3) как функции двух переменных $\sigma(c_1, c_2)$. Переменная u , входящая в уравнение (6.3), может быть определена как корень уравнения третьей степени (3.5). Причем явного выражения $u(c_1, c_2)$ в данном случае не требуется, так как достаточно построить поверхность $\sigma(c_1, c_2)$ параметрически, используя уравнения (3.5), (6.3).

На рис. 7 представлены линии равного давления $\sigma(c_1, c_2) = \text{const}$ для бифуркационной поверхности (3.6). Границы области существования физического решения отделяются кривой $\sigma(c_1, c_2) = 0$. В данном случае эта кривая представляет собой две полупрямые

$$c_1 = 0, \quad |c_2| > 2\omega_0. \quad (6.4)$$

Выше было показано, что точке бифуркации $c_2 = \pm 2\omega_0$ (точки B_1, B_2 на рис. 6) соответствует угловая скорость кругового цилиндра $\omega^2 = \omega_0^2 = 2\pi G\rho$.

Напомним также, что в плоскости $c_1 = 0$ (см. рис. 3) лежит часть бифуркационной кривой (3.7), соответствующей круговому цилиндру (располагается внутри бифуркационной поверхности (3.6)). Эта кривая определяется соотношением $u = 4$. Подставляя это значение в (6.3), получим

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 - \frac{c_2^2}{4} \right).$$

Следовательно, $\sigma > 0$ при $|c_2| < 2\omega_0$ (см. рис. 8). Таким образом, выше точки бифуркации на ветви кругового цилиндра физического решения не существует.

Отрицательное давление на ветвях, лежащих внутри бифуркационной поверхности, говорит о том, что в области возможных значений интегралов существуют области отрицательного давления. Физически это соответствует тому, что при значениях интегралов, попадающих в эту область, решение перестает существовать, т. е. цилиндр распадается. Эти значения интегралов отделяются от физических областей возможных значений поверхностями нулевого давления, т. е. $\sigma = 0$.

Поверхности нулевого давления определяются параметрически из уравнений (3.4), (6.3) и отделяют собой полости внутри бифуркационной поверхности (рис. 9). На рис. 10 приведены сечения области физического решения поверхностями $H = \text{const}$. Анализ областей

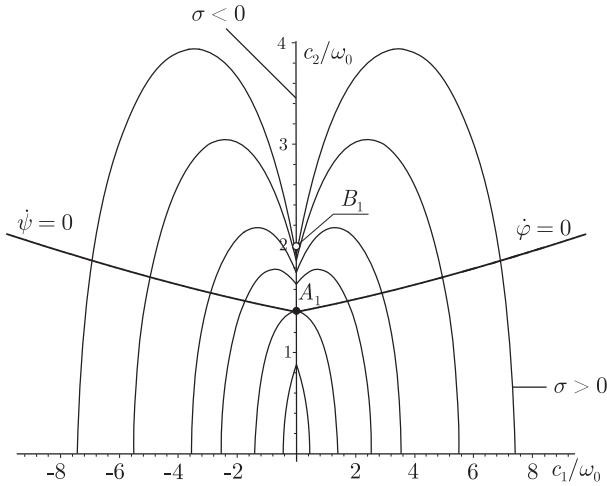


Рис. 7. Линии равного давления эллиптического цилиндра (при $c_2 < 0$ необходимо сделать симметричное продолжение). Точка A_1 соответствует угловой скорости вращения $\omega^2 = \omega_0^2/2$ (точке бифуркации цилиндра без внутреннего течения). Начиная с этого значения появляется вогнутость поверхности. Точка B_1 (точка бифуркации цилиндра с внутренним течением) соответствует $\omega^2 = \omega_0^2$.

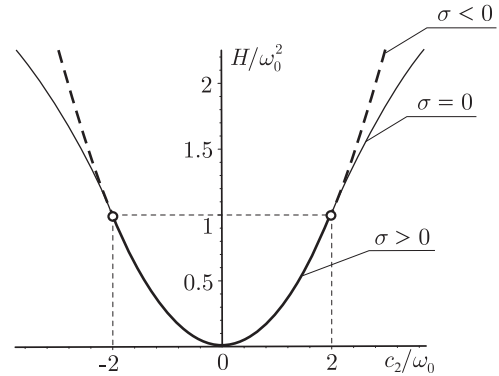


Рис. 8. Сечение бифуркационной диаграммы (3.6) плоскостью $c_1 = 0$. Пунктирной линией указана область, в которой $\sigma < 0$, т. е. не существует физического решения.

отрицательного давления показывает, что они нигде не перекрываются и всегда касаются бифуркационной поверхности (3.5) только по линии $c_1 = 0$ при $|c_2| > 2\omega_0$. Кривая (3.7), соответствующая круговому цилиндру, как и ожидалось, располагается внутри области отрицательного давления (проходит через выделенные точки на рис. 10).

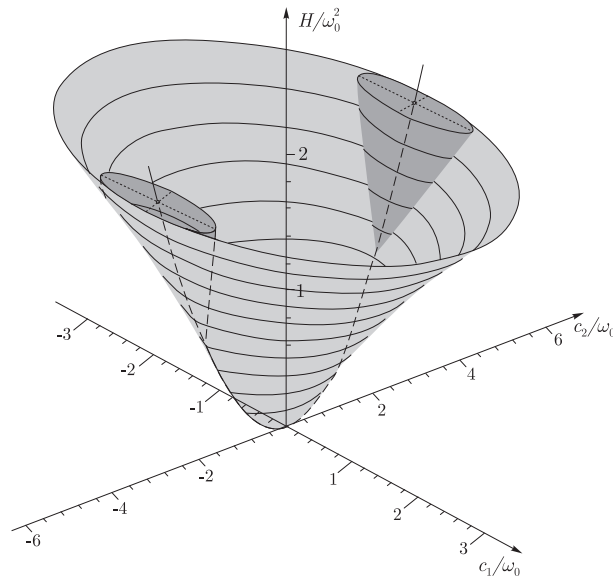


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма эллиптического цилиндра и поверхности нулевого давления (обозначены темно-серым цветом).

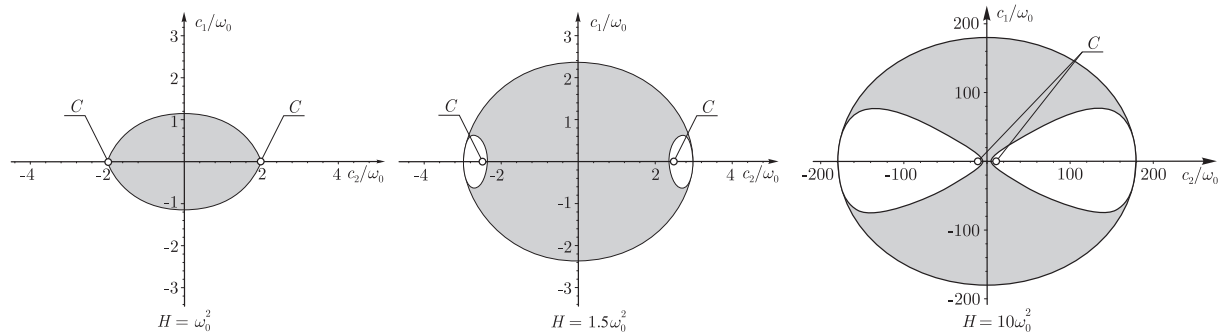


Рис. 10. Область возможных значений интегралов (выделена серым цветом) при различных значениях энергии. Область отрицательного давления, где не существует физическое решение, обозначена белым цветом. Выделенная точка соответствует круговому цилиндру.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Требование неотрицательности давления в области физического решения имеет аналоги в динамике твердого тела, движущегося по плоскости. В данном случае аналогом условия положительности давления является условие безотрывности, т. е. неотрицательности нормальной силы реакции при движении по гладкой поверхности (см., например, [15]).

7. Дискуссия

Обсудим некоторые задачи, которые могут быть решены на основании результатов данной статьи.

В известной работе Лава [8] показано, что жидкий эллиптический цилиндр без внутреннего течения является устойчивым по отношению к произвольным возмущениям, если отношение полуосей $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$ (в то время как согласно результатам данной работы по отношению к эллиптическим возмущениям эти цилиндры всегда устойчивы). Выше было показано, что устойчивому цилиндру без внутреннего вращения соответствует лишь некоторая кривая на бифуркационной поверхности всевозможных эллиптических цилиндров с произвольным внутренним вращением (см. рис. 7). Поэтому возникает естественный вопрос об устойчивости эллиптического цилиндра с внутренним течением по отношению к произвольным возмущениям, который может быть решен обобщением методов Лава.

Имеются работы, посвященные поиску компьютерными методами неэллиптических фигур равновесия [16, 17], которые также относятся к фигурам, не обладающим внутренним полем скоростей. В то же время, как мы видели на примере эллиптических цилиндров, возникновение внутреннего вращения является естественным с физической точки зрения. Поэтому интересно было бы указать при помощи компьютерных методов новые семейства неэллиптических фигур равновесия с внутренним полем скоростей.

Отметим также, что, помимо рассматриваемого в данной работе обобщения о решении Дирихле для жидких цилиндров, известно аналогичное решения для газовых самогравитирующих эллиптических цилиндров (для эллипсоидов подобные решения обнаружены в работах [11, 14]). Эта система не является интегрируемой. Тем не менее, стационарные решения существуют, и их устойчивость является открытым вопросом.

В заключение отметим, что двумерная задача об эллиптических цилиндрах использовалась начиная с Джинса и его современников для качественного объяснения распада звезд или происхождения двойных звезд и т. п. Как правило, в основе этих заключений лежит

предположение о том, что при изменении параметров системы (например, в связи с некоторыми внутренними процессами или диссипацией) она проходит через последовательность равновесных конфигураций, среди которых следует искать равновесные двойные конфигурации. С другой стороны, также вероятен сценарий, при котором в процессе эволюции параметров система приходит к границе устойчивости либо к границе разрывности (области отрицательного давления). При этом аналитических методов для описания этих процессов не существует, поэтому было бы интересно использовать компьютерный эксперимент для моделирования эволюции таких систем, в том числе распадов.

Авторы выражают благодарность Васькину В. В. и Болсинову А. В. за внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта «Ведущие научные школы» (грант НШ-8784.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (ГК 02.740.11.0195), ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 гг.) (№ 2.1.1/554), гранта правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.G34.31.0039).

Список литературы

- [1] Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (Aus dessen Nachlass hergestellt von Herrn R. Dedekind zu Zürich) // J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal), 1861, Bd. 58, S. 181–216 [Дирихле Л. Исследование одной задачи гидродинамики // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2010. С. 19–58].
- [2] Fasso F., Lewis D. Stability properties of the Riemann ellipsoids // Arch. Rational Mech. Anal., 2001, vol. 158, pp. 259–292.
- [3] Globa-Mikhaïlinko B. Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation // J. Math. Pures Appl. (7), 1916, vol. 2, pp. 1–78.
- [4] Hicks W. M. On the motion of a mass of liquid under its own attraction, when the initial form is an ellipsoid // Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 4, p. 6, 1883, pp. 1–4.
- [5] Jeans J. N. On the equilibrium of rotating liquid cylinders // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 1903, vol. 200, pp. 67–104.
- [6] Matthiessen L. Über die Gleichgewichtsfiguren homogener frei rotierender Flüssigkeiten. Kiel: Schwers'sche Buchhandlung, 1857. 77 S.;
Matthiessen L. Neue Untersuchungen über frei rotierende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts // Schriften der Universität zu Kiel, 1859, vol. 6, VI, 1, 74 S.
- [7] Lipschitz R. Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals, und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders // J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal), 1874, vol. 78, pp. 245–272.
- [8] Love A. E. H. On the Motion of a liquid elliptic cylinder under its own attraction // Q. J. Pure Appl. Math., 1889, vol. 23, pp. 153–158.
- [9] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes // Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861 [Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 339–366; а также см.: Риман Б. О движении жидкого однородного эллипсоида // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2010. С. 74–107].
- [10] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 376 с.

- [11] Богоявленский О. И. Динамика гравитирующего газового эллипсоида // Прикл. мат. и мех., 1976, т. 40, № 2, с. 270–280.
- [12] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. 576 с.
- [13] Борисов А. В., Мамаев И. С., Болсинов А. В. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.
- [14] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The Hamiltonian dynamics of self-gravitating liquid and gas ellipsoids // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 2, pp. 179–217.
- [15] Васькин В. В., Наймушина О. С. К вопросу о безотрывном движении шара на гладкой плоскости // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 625–632.
- [16] Дубровский А. С., Кондратьев Б. П. Неэллиптические фигуры равновесия — двумерный случай // Вестник Удмуртского университета, 2007, № 1, с. 25–36.
- [17] Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 624 с.
- [18] Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 240 с.
- [19] Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 252 с.
- [20] Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебн. пособие для вузов. 4-е изд. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
- [21] Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.