

Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий

А. В. Болсинов¹, А. В. Борисов², И. С. Мамаев³

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы

School of Mathematics, Loughborough University

United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

^{2,3}Институт компьютерных исследований

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

A.Bolsinov@lboro.ac.uk¹, borisov@rcd.ru², mamaev@rcd.ru³

Получено 17 декабря 2010 г.

В работе рассматривается проблема гамильтонизации неголономных систем, как интегрируемых, так и неинтегрируемых. Этот вопрос является важным при качественном исследовании этих систем и позволяет определить возможные динамические эффекты. Первая часть работы посвящена представлению в конформно гамильтоновой форме интегрируемых систем. Во второй части доказывается существование конформно гамильтонового представления в окрестности периодического решения для произвольной (в том числе интегрируемой) системы, сохраняющей инвариантную меру. Общие конструкции всюду иллюстрируются примерами из неголономной механики.

Ключевые слова: конформно гамильтонова система, неголономная система, инвариантная мера, периодическая траектория, инвариантный тор, интегрируемая система

A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev

**Hamiltonisation of non-holonomic systems
in the neighborhood of invariant manifolds**

Hamiltonisation problem for non-holonomic systems, both integrable and non-integrable, is considered. This question is important for qualitative analysis of such systems and allows one to determine possible dynamical effects. The first part is devoted to the representation of integrable systems in a conformally Hamiltonian form. In the second part, the existence of a conformally Hamiltonian representation in a neighbourhood of a periodic solution is proved for an arbitrary measure preserving system (including integrable). General constructions are always illustrated by examples from non-holonomic mechanics.

Keywords: conformally Hamiltonian system, nonholonomic system, invariant measure, periodic trajectory, invariant torus, integrable system

MSC 2010: 37Jxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	830
1. Гамильтонизация в окрестности двумерного инвариантного многообразия	833
1.1. Теорема о выпрямлении векторного поля	833
1.2. Гамильтонизация в окрестности тора	838
1.3. Примеры	840
2. Гамильтонизация в окрестности периодической траектории	842
3. Гамильтонизация в окрестности положения равновесия	846
4. Препятствия гамильтонизации	847
4.1. Вырожденные периодические орбиты	847
4.2. Глобальные препятствия	849
5. Открытые вопросы	850
Приложение	851

Введение

Настоящая работа посвящена проблеме гамильтонизации неголономных систем. Хотелось бы в самой общей постановке попытаться найти препятствия к гамильтонизации или, напротив, доказать, что гамильтоново представление существует. Если рассматривать систему в целом, то такого сорта вопросы довольно сложны. Однако проблема гамильтонизации может быть естественным образом поставлена в более локальном контексте, т. е. в окрестности положения равновесия, замкнутой траектории или интегрального многообразия.

В данной работе мы доказываем несколько результатов на эту тему и обсуждаем ряд примеров.

Определение. Динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ на многообразии \mathcal{M} называется *конформно гамильтоновой*, если на \mathcal{M} существует пуассонова структура $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, такая, что $\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{J}dH$ для некоторой подходящей функции $H(\mathbf{x})$ и всюду положительной функции $\lambda(\mathbf{x})$.

Отметим прежде всего, что гамильтонова (и, разумеется, конформно гамильтонова) система обязана обладать первым интегралом и инвариантной мерой. Эти условия являются необходимыми для гамильтонизации. Поэтому мы будем их здесь предполагать. Мы также всюду считаем, что инвариантная мера является гладкой и ее плотность нигде не обращается в нуль. Мы будем отождествлять меру с дифференциальной формой $\mu = \rho(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ максимального ранга.

Наконец, отметим еще два простых, но важных обстоятельства, связанных с инвариантными мерами.



Предложение 1. Пусть динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ на многообразии M^n обладает инвариантной мерой μ и первыми интегралами f_1, \dots, f_k . Пусть интегральная поверхность

$$\mathcal{X} = \{f_1 = c_1, \dots, f_k = c_k\}$$

является регулярной, т. е. $df_1(\mathbf{x}), \dots, df_k(\mathbf{x})$ линейно независимы во всех точках $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Тогда ограничение динамической системы на \mathcal{X} также обладает инвариантной мерой, которая задается $(n - k)$ -формой σ , удовлетворяющей тождеству

$$\sigma \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k = \mu.$$

Предложение 2. Пусть динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ на многообразии M^n обладает инвариантной мерой μ и для нее можно определить трансверсальное потоку (вообще говоря, локальное) сечение \mathcal{N}^{n-1} и отображение Пуанкаре $\Phi: \mathcal{N}^{n-1} \rightarrow \mathcal{N}^{n-1}$. Тогда отображение Пуанкаре также обладает инвариантной мерой на \mathcal{N}^{n-1} и эта мера задается $(n - 1)$ -формой $\zeta(\cdot) = \mu(\mathbf{v}, \cdot)$.

Приводимые ниже теоретические результаты мы будем иллюстрировать на примере двух систем неголономной механики:

первая система описывает качение без проскальзывания неоднородного уравновешенного тела со сферической оболочкой (т. е. динамически несимметричного шара, центр масс которого совпадает с геометрическим центром) по сферическому основанию, ее для краткости будем называть шар Чаплыгина на сфере;

вторая система также описывает качение неоднородного уравновешенного тела со сферической оболочкой по сферическому основанию, но при условии как отсутствия проскальзывания, так и вращения (т. е. вращения вокруг нормали в точке контакта), эту систему назовем резиновый шар Чаплыгина на сфере.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [25] обсуждаются возможные реализации неголономной связи, состоящей в отсутствии вращения, не обязательно связанные с резиновой оболочкой шара, обеспечивающей равенство нулю проекции угловой скорости на нормаль к поверхности. Приводимое название достаточно условное, оно применяется для краткого обозначения этого класса систем и введено в [31].

Приведем уравнения движения этих систем и укажем их инвариантную меру и наиболее общие первые интегралы, существующие при произвольных значениях параметров.

Шар Чаплыгина на сфере. Эта задача с различных позиций рассматривалась в [10] и является обобщением классической задачи Чаплыгина о качении шара по плоскости [19]. Пусть динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью (шар Чаплыгина) катится без проскальзывания по поверхности неподвижной сферы радиуса a ; в зависимости от знаков кривизны возможны три варианта обката (см. рис. 1). Выберем подвижную систему координат, связанную с главными осями шара, и обозначим через $\boldsymbol{\omega}$, m , $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, b соответственно угловую скорость, массу, тензор инерции и радиус шара. Угловой момент шара относительно точки касания Q имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}), \quad D = mb^2, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к сфере в точке контакта (см. рис. 1). Полное фазовое пространство системы представляет собой $T(SO(3) \times S^2)$. Положим, что потенциальная энергия шара

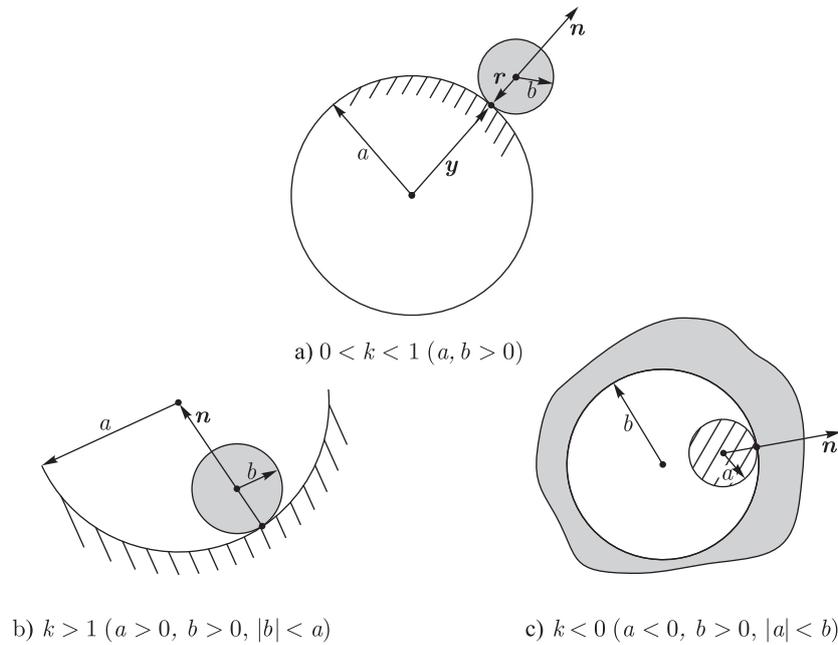


Рис. 1. Схема качения шара (обозначен серым цветом) по неподвижному сферическому основанию (обозначено штриховкой) при различных знаках радиусов кривизны a, b .

зависит лишь от положения его центра; тогда, используя неголономную связь — отсутствие проскальзывания (т.е. скорость точки контакта равна нулю), можно получить уравнения движения редуцированной системы в следующей замкнутой форме:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + k\mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \quad k = \frac{a}{a+b}, \quad (2)$$

где U — потенциал внешних сил, a — радиус неподвижной сферы (заметим, что радиусы подвижной и неподвижной сфер необходимо брать с соответствующим знаком, см. рис. 1), а угловая скорость выражается через момент с помощью соотношения (1) по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}\mathbf{M} + \Lambda\mathbf{A}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + D\mathbf{E})^{-1}, \quad \Lambda = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})D^{-1} - (\mathbf{n}, \mathbf{A}\mathbf{n})}.$$

Система (2) обладает инвариантной мерой $\rho d\mathbf{M} d\mathbf{n}$ с плотностью

$$\rho = ((\mathbf{n}, \mathbf{n})D^{-1} - (\mathbf{n}, \mathbf{A}\mathbf{n}))^{-1/2}$$

и допускает два (общих) первых интеграла — геометрический и энергию:

$$F_0 = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1,$$

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}D\Lambda(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{n}) + U(\mathbf{n}). \quad (3)$$

При $U \equiv 0$ и произвольном k имеется еще один интеграл

$$F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}). \quad (4)$$

Резиновый шар на сфере. Эта задача была впервые рассмотрена в работе [32] и более подробно изучена в [31, 34]. Рассмотрим, как и выше, движение динамически несимметричного уравновешенного шара по поверхности неподвижной сферы, используя те же обозначения для соответствующих величин, что и выше (см. рис. 1). Мы предполагаем, что при движении мгновенная скорость точки контакта и проекция угловой скорости шара на нормаль к сфере равны нулю. Эта модель движения отличается от классической неголономной модели качения при проскальзывании, в которой предполагается, что равна нулю только скорость точки контакта.

Как и выше, выберем подвижную систему координат, связанную с главными осями, жестко связанными с шаром. При этом кинематические уравнения, описывающие эволюцию нормали \mathbf{n} , совпадают с предыдущими (2), а динамические уравнения удобнее выписать через угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Окончательно для движения в потенциальном силовом поле, зависящем лишь от нормали $U(\mathbf{n})$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda\mathbf{n} + k\mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, & \dot{\mathbf{n}} &= k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{I} + mb^2\mathbf{E}, & \mathbf{E} &= \|\delta_{ij}\|, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) + \left(k\mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \mathbf{J}\mathbf{n}\right)}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}.$$

Система (5) обладает инвариантной мерой

$$(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})^{\frac{1}{2k}} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n}. \quad (6)$$

Мера (6) была найдена в работе [31].

Связь

$$F_1 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0 \quad (7)$$

также можно рассматривать как дополнительный частный интеграл. При этом уравнения (5) обладают также интегралами энергии и геометрическим:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{n}), \quad F_0 = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1. \quad (8)$$

1. Гамильтонизация в окрестности двумерного инвариантного многообразия

1.1. Теорема о выпрямлении векторного поля

Прежде всего остановимся на теореме, являющейся, в некоторой степени, аналогом теоремы Лиувилля–Арнольда для гамильтоновых систем. Эта теорема наиболее часто используется для установления интегрируемости систем, обладающих инвариантной мерой (в частности, неголономных систем).

Первоначальные варианты этого утверждения, позволяющие интегрировать уравнения движения в квадратурах, использовались еще в работах Эйлера и Якоби, поэтому в некоторых работах ее называют теоремой Эйлера–Якоби. Более того, в XIX веке этот метод

(под названием *теория последнего множителя*) использовался также для интегрирования в динамике твердого тела (уравнения Эйлера–Пуассона, Кирхгофа), где гамильтонова структура уравнений была установлена позже [12, 16].

Приводимая нами формулировка является естественным обобщением теоремы, сформулированной В. В. Козловым [13] и названной теоремой Эйлера–Якоби. Отличие заключается в том, что здесь рассматривается приведение потока к стандартному виду не на отдельном торе (где применима теорема А. Н. Колмогорова [15]), а на целом аналитическом семействе торов. Такое обобщение возможно благодаря тому, что мы дополнительно требуем аналитичности самой динамической системы, ее первых интегралов и инвариантной меры.

Здесь мы приведем полное доказательство этой теоремы, в связи с тем, что доказательство такого утверждения, хотя и кажущегося очевидным, нигде не приведено с достаточной степенью строгости и полноты.

Теорема 1. Пусть на n -мерном ориентируемом многообразии задана динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, обладающая независимыми интегралами f_1, \dots, f_{n-1} и гладкой инвариантной мерой μ .¹ Рассмотрим неособую интегральную поверхность

$$\mathcal{X} = \{f_1 = c_1, \dots, f_{n-2} = c_{n-2}\}.$$

Предположим, что \mathcal{X} компактна и векторное поле \mathbf{v} на \mathcal{X} не обращается в нуль. Тогда \mathcal{X} и все близкие интегральные поверхности являются двумерными торами. При этом в некоторой окрестности \mathcal{X} существуют локальные координаты $\phi_1, \phi_2, f_1, \dots, f_{n-2}$, такие, что ϕ_1, ϕ_2 — угловые координаты на торах, и динамическая система приобретает вид

$$\dot{f}_i = 0, \quad \dot{\phi}_i = \frac{\lambda_i}{\Phi},$$

где $\lambda = \lambda_i(f_1, \dots, f_{n-2})$, $\Phi = \Phi(\phi_1, \phi_2, f_1, \dots, f_{n-2})$.

Если исходная динамическая система, ее интегралы и инвариантная мера были вещественно-аналитическими, то таковыми будут и функции λ_i , Φ и угловые переменные ϕ_1, ϕ_2 .

Доказательство. Для доказательства мы покажем, что векторное поле \mathbf{v} , подходящим образом нормированное, допускает независимое поле симметрий \mathbf{u} (т. е. $[\Phi(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{u}] = 0$ для некоторой функции $\Phi(\mathbf{x})$), а затем воспользуемся стандартным утверждением о том, что для двух коммутирующих векторных полей на торе существуют угловые переменные, в которых эти поля выпрямляются.

Разобьем доказательство на несколько шагов.

Прежде всего отметим, что \mathcal{X} является тором из-за существования на нем векторного поля без особых точек и ориентируемости. Далее гладкую меру μ можно естественным образом ограничить на тор \mathcal{X} и рассматривать как симплектическую структуру ω на этом торе. Поэтому условие сохранения меры эквивалентно локальной гамильтоновости потока \mathbf{v} на \mathcal{X} . В частности, для векторного поля \mathbf{v} существует многозначный гамильтониан H без особых точек.² Однозначным будет дифференциал гамильтониана, который, будучи

¹Ориентируемость можно не предполагать, а сказать вместо этого, что мера задается дифференциальной n -формой.

²Не следует искать аналогии со стандартной ситуацией, когда гамильтониан является константой на инвариантных торах. Здесь H играет вспомогательную роль, и его природа совершенно иная.

замкнутой формой на торе, всегда может быть записан в виде³

$$dH = c_1 dx_1 + c_2 dx_2 + df(x_1, x_2),$$

где x_1, x_2 — угловые координаты на торе с периодом 1, а $f(x_1, x_2)$ — некоторая периодическая функция (т. е. однозначная функция на торе). Эквивалентным образом можно было бы сказать, что многозначный гамильтониан имеет вид $H = c_1 x_1 + c_2 x_2 + f(x_1, x_2)$. Константы c_1 и c_2 могут быть определены путем интегрирования $c_i = \int_{\gamma_i} dH$, где γ_i — базисный цикл, соответствующий угловой координате x_i .

Рассмотрим произвольную риманову метрику ds^2 на торе (например, $dx_1^2 + dx_2^2$) и векторное поле $\xi = \frac{\text{grad } H}{|\text{grad } H|^2}$. Это векторное поле корректно определено и обладает тем замечательным свойством, что его поток сохраняет траектории векторного поля \mathbf{v} . Более того, если иметь в виду, что траектории являются линиями уровня «многозначного гамильтониана», то при сдвиге вдоль потока ξ на время $t = c$ уровень $\{H = h\}$ переходит в точности в уровень $\{H = h + c\}$. Отсюда немедленно следует, что все траектории являются либо одновременно замкнутыми, либо одновременно незамкнутыми.

По сути, ξ — это уже почти поле симметрий, но пока оно сохраняет не само векторное поле \mathbf{v} , а лишь его траектории. Для построения настоящего поля симметрий нам понадобится модифицировать ξ , сделав все его траектории замкнутыми. Сначала сделаем замкнутой одну траекторию. Рассмотрим для этого векторное поле $\tilde{\xi} = \xi + \lambda \mathbf{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Следующее утверждение на самом деле вполне очевидно и является одной из версий известной леммы Зигеля [37].

Лемма 1. *Существует $\lambda \in \mathbb{R}$, такое, что по крайней мере одна из траекторий векторного поля $\tilde{\xi}$ замкнута, трансверсальна векторному полю \mathbf{v} и реализует гомотопически нетривиальный цикл α на торе.*⁴

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $P_0 \in T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и проходящую через нее траекторию γ_0 векторного поля \mathbf{v} . Поднимем ее на накрывающую плоскость \mathbb{R}^2 . Там она является линией уровня гамильтониана: $\gamma_0 = \{H = 0\}$ для определенности.

Если γ_0 незамкнута, то выберем произвольный гомотопически нетривиальный цикл α на торе; если она замкнута и сама реализует некоторый нетривиальный цикл β , то в качестве α выберем произвольный цикл, дополнительный к β . На накрывающей плоскости \mathbb{R}^2 циклу α отвечает сдвиг на соответствующий элемент решетки. Пусть $P'_0 \in \mathbb{R}^2$ — точка, получаемая из P_0 этим сдвигом. Рассмотрим траекторию векторного поля \mathbf{v} , проходящую через P'_0 . На торе эти две траектории, разумеется, совпадают, но на накрывающей плоскости они различны, так что эта траектория может быть представлена как $\gamma_c = \{H = c\}$, $c \neq 0$ (рис. 2).

Рассмотрим поток векторного поля $\tilde{\xi} = \xi + \lambda \mathbf{v}$ на накрывающей плоскости \mathbb{R}^2 . Этот поток сохраняет траектории \mathbf{v} и, более того, сдвиг на время $t = c$ переводит γ_0 в γ_c . Точка P_0 переходит при этом в некоторую точку $P' \in \gamma_c$. Чтобы траектория векторного поля $\tilde{\xi}$ оказалась замкнутой на торе, необходимо и достаточно, чтобы P' совпала с P'_0 . Ясно, что при изменении λ точка P' будет непрерывно перемещаться вдоль траектории γ_c от $-\infty$

³Форма dH , разумеется, выписывается явно по \mathbf{v} и ω . А именно, $dH(\cdot) = \omega(\mathbf{v}, \cdot)$.

⁴Более того, если траектории \mathbf{v} незамкнуты, то выбором λ этот цикл α можно сделать совершенно произвольным. Если траектории \mathbf{v} замкнуты и сами реализуют некоторый нетривиальный цикл β , то в качестве α можно получить любой цикл, негомотопичный β .

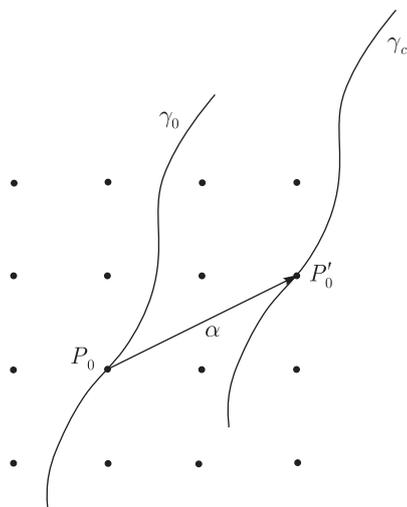


Рис. 2. Траектории векторного поля v на кривающей плоскости.

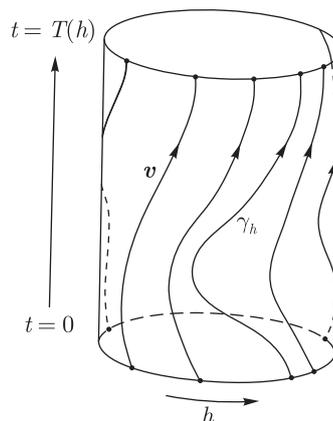


Рис. 3. Сечение Пуанкаре потока векторного поля v замкнутой траекторией поля $\tilde{\xi}$.

до $+\infty$. Поэтому существует такое значение λ , что P' совпадет с P'_0 , что и требуется. Лемма доказана.

Следующий шаг в доказательстве — это еще раз модифицировать $\tilde{\xi}$ так, чтобы уже все его траектории стали замкнутыми. Это мы сделаем в два этапа. Во-первых, покажем, что это можно сделать в смысле C^∞ .

Построенную замкнутую траекторию векторного поля $\tilde{\xi}$ мы рассмотрим как глобальное сечение Пуанкаре для потока v . Если тор разрезать вдоль нее, то он превратится в цилиндр, расслоенный на траектории векторного поля v , идущие с нижнего основания цилиндра на верхнее (рис. 3). В качестве естественных координат на цилиндре можно ввести h и t , где $h \in [0, c]$ — значение гамильтониана, параметризующее траектории векторного поля v , а t — время вдоль этих траекторий, отсчитываемое от нижнего основания цилиндра. Отметим, что на каждой отдельной траектории $\gamma_h = \{H = h\}$ параметр t меняется от нуля до некоторой величины $T(h)$, которую можно понимать как длину участка траектории, заключенного между нижним и верхним основанием цилиндра или, что то же самое, время, затрачиваемое точкой, чтобы сделать один оборот и вернуться на сечение Пуанкаре. Величина $T(h)$ не постоянна, а является периодической функцией от $h \in [0, c]$.

Мы хотим «перепараметризовать систему» так, чтобы время одного оборота для всех точек было одинаково и равно единице. Новый параметр $\tau = \tau(t, h)$ определим соотношением

$$t(\tau) = \int_0^\tau (1 + s(h)\psi(t)) dt,$$

где $\psi(t)$ — стандартная сглаживающая функция, график которой изображен на рис. 4, а $s(h)$ выбирается так, чтобы для траектории $\gamma_h = \{H = h\}$ выполнялось соотношение

$$t(1) = \int_0^1 (1 + s(h)\psi(t)) dt = T(h), \quad \text{т. е.} \quad s(h) = \frac{T(h) - 1}{\int_0^1 \psi(t) dt}.$$

Если ε достаточно мало (см. рис. 4), то $s(h) > -1$. Поэтому подынтегральное выражение строго положительно и замена монотонна.



Сглаживание необходимо для того, чтобы перепараметризация была C^∞ -гладкой после склейки верхнего и нижнего оснований цилиндра. Таким выбором функции обеспечивается, что в окрестности склеиваемых оснований мы имеем $d\tau/dt \equiv 1$, и поэтому функцию τ после обратного отождествления оснований цилиндра можно теперь понимать как новую угловую координату на нашем торе (всюду независимую от H !).

По построению τ является C^∞ -гладкой, но не вещественно-аналитической. Мы, однако, можем выбрать новую аналитическую угловую координату $\tilde{\tau}$ так, чтобы она была сколь угодно близка к τ в C^2 -топологии (см. приложение), что обеспечит ее независимость от H (никаких других свойств $\tilde{\tau}$ нам не требуется).

Итак, без ограничения общности мы можем считать угловую координату τ вещественно-аналитической. Ясно, что τ можно аналитическим образом продолжить на все близкие торы. Гамильтониан H на всех близких торах также определен и, разумеется, аналитическим образом зависит от первых интегралов f_1, \dots, f_n . Независимость H и τ на близких торах сохраняется.

Далее мы можем понимать τ и H как две «локальные координаты» на торах и рассмотреть координатные векторные поля ∂_τ и ∂_H . Отметим, что ∂_τ касается линий уровня $\{H = h\}$, т. е. траекторий векторного поля \mathbf{v} , но из-за проведенной выше перепараметризации отличается от самого векторного поля \mathbf{v} на некоторый положительный множитель, т. е. $\partial_\tau = \Phi \cdot \mathbf{v}$. Траектории поля $\mathbf{u} = \partial_H$ замкнуты и гомотопны циклу α . Будучи координатными, векторные поля ∂_τ и ∂_H коммутируют, т. е. $\mathbf{u} = \partial_H$ — поле симметрий для $\Phi \cdot \mathbf{v}$, что и требовалось.

Остается воспользоваться следующим стандартным фактом: если на торе заданы два коммутирующих векторных поля, то существует такая система угловых координат, в которых оба поля выпрямляются (см. приложение). Доказательство факта простое: два коммутирующих векторных поля задают действие группы \mathbb{R}^2 на торе. Ясно, что тор является орбитой этого действия и поэтому представляется как фактор \mathbb{R}^2 по некоторой решетке. Выбор базиса решетки эквивалентен выбору угловых координат.

Теорема доказана. ■

КОММЕНТАРИЙ. Интересным является вопрос о выпрямлении векторного поля на торах без замены времени [13]. Он оказывается весьма нетривиальным (даже на отдельном торе) и связан со свойствами числа вращения (А. Н. Колмогоров [15]). Если тор — резонансный, т. е. все траектории на нем замкнуты, то необходимым и достаточным условием выпрямления является равенство их периодов. В неголономных системах на резонансных торах периоды траекторий не обязаны быть равными, поэтому без перепараметризации выпрямления (и, стало быть, гамильтоновости) в общем случае добиться нельзя [8]. (В этой работе в качестве примера рассмотрены резонансные торы в задаче о шаре Чаплыгина и численно установлено различие в периодах для траекторий на одном и том же торе.) Теорема Колмогорова утверждает, что выпрямление поля без замены времени тем не менее возможно для почти всех иррациональных чисел вращения и дает соответствующую характеристику этих чисел (они должны удовлетворять некоторому условию диофантовости, см. также [17]).

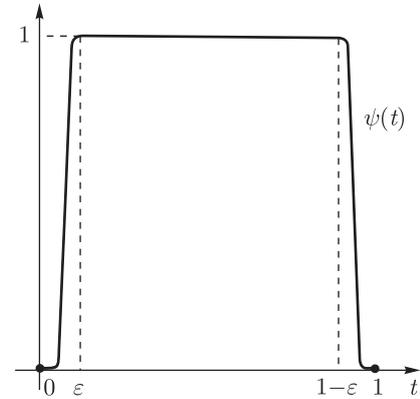


Рис. 4. Сглаживающая функция.

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется также простейший частный случай, отмеченный в [24], когда возможно выпрямление векторного поля без замены времени на семействе торов. При этом векторное поле должно удовлетворять некоторому дополнительному требованию. Такие системы в [24] названы интегрируемыми по Лагранжу–Ли.

1.2. Гамильтонизация в окрестности тора

Доказанная выше теорема утверждает, что динамика системы, обладающей $(n - 2)$ -мя интегралами и инвариантной мерой, после подходящей замены времени становится фактически такой же, как у интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. При этом оказывается, что пуассонову структуру и гамильтониан можно указать не единственным способом. На самом деле имеет место следующее утверждение.

В предположении предыдущей теоремы выделим один из интегралов, который мы хотим видеть в качестве гамильтониана системы, из оставшихся выберем произвольным образом $n - 4$ функции, которые будут играть роль функций Казимира. Зафиксируем этот выбор, обозначив имеющиеся $n - 2$ интегралов векторного поля \mathbf{v} через $H, f, C_1, \dots, C_{n-4}$. Тогда наше векторное поле является конформно гамильтоновым в следующем точном смысле:

Теорема 2. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда в окрестности интегральной поверхности \mathcal{X} существует пуассонова структура \mathbf{J} , такая, что C_1, \dots, C_{n-4} являются ее функциями Казимира, а $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{J} dH$, где λ — некоторая гладкая положительная функция. В вещественно-аналитическом случае пуассонова структура \mathbf{J} и множитель λ тоже будут вещественно-аналитическими.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что функция λ будет, вообще говоря, отличаться от множителя Φ^{-1} из предыдущей теоремы, и гамильтониан H не совпадает с многозначным гамильтонианом, определенным при доказательстве предыдущей теоремы.

Доказательство. Мы, разумеется, будем пользоваться предыдущей теоремой. Обозначим через $\rho = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ число вращения векторного поля \mathbf{v} . Для определенности мы считаем, что $\lambda_2 \neq 0$ (иначе можно поменять λ_1 и λ_2 местами).

Вместо поиска явной формулы для пуассоновой структуры \mathbf{J} в координатах $\phi_1, \phi_2, H, f, C_1, \dots, C_{n-4}$ мы будем искать канонические координаты для этой пуассоновой структуры типа переменных действие–угол. Для этого определим две функции

$$I_1 = I_1(H, f, C_1, \dots, C_{n-4}) \quad \text{и} \quad I_2 = I_2(H, f, C_1, \dots, C_{n-4}),$$

такие, что наше векторное поле \mathbf{v} пропорционально гамильтонову векторному полю $\mathbf{J} dH$, где

$$\mathbf{J} = \partial_{\phi_1} \wedge \partial_{I_1} + \partial_{\phi_2} \wedge \partial_{I_2}. \quad (1.1)$$

Выберем в качестве I_1 совершенно произвольную функцию, независимую от H и функций Казимира C_1, \dots, C_{n-4} . Тогда функцию вращения ρ можно записать как гладкую (аналитическую) функцию от $I_1, H, C_1, \dots, C_{n-4}$.

Вторую «переменную действия» зададим следующей явной формулой:

$$I_2 = - \int \rho(I_1, H, C_1, \dots, C_{n-4}) dI_1.$$

(Другими словами, I_2 определяется из уравнения $\frac{\partial I_2}{\partial I_1} = -\rho$.) Эта функция определена с точностью до добавления произвольной функции от H, C_1, \dots, C_{n-4} . В частности, можно

считать, что $\frac{\partial I_2}{\partial H} \neq 0$ (частное дифференцирование производится в локальных координатах $I_1, H, C_1, \dots, C_{n-4}$). Это условие гарантирует, что $I_1, I_2, C_1, \dots, C_{n-4}$ независимы, и поэтому формула (1.1) имеет смысл и задает некоторую пуассонову структуру. Покажем, что эта структура — искомая.

Найдем векторное поле $\mathbf{J}dH$. Во-первых, отметим, что на каждом торе это гамильтоново векторное поле в переменных ϕ_1, ϕ_2 выпрямляется (так же, как и векторное поле \mathbf{v}). Это сразу следует из того, что $H = H(I_1, I_2, C_1, \dots, C_{n-4})$, а \mathbf{J} имеет канонический вид. Поэтому для того, чтобы показать пропорциональность \mathbf{v} и $\mathbf{J}dH$, достаточно проверить, что числа вращения этих векторных полей совпадают.

В этом легко убедиться непосредственным подсчетом. Действительно,

$$\mathbf{J}dH = \frac{\partial H}{\partial I_1} \partial_{\phi_1} + \frac{\partial H}{\partial I_2} \partial_{\phi_2},$$

отсюда

$$\rho_H = \frac{\frac{\partial H}{\partial I_1}}{\frac{\partial H}{\partial I_2}}.$$

Рассмотрим регулярную замену переменных (функции Казимира рассматриваются при этом как параметры, которые в замене участия не принимают):

$$I_1, H \rightarrow I_1, I_2,$$

матрица Якоби этой замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial H}{\partial I_1} & \frac{\partial H}{\partial I_2} \end{pmatrix}.$$

Матрица обратной замены имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial I_2}{\partial I_1} & \frac{\partial I_2}{\partial H} \end{pmatrix}.$$

Поскольку эти две матрицы взаимно обратны, то мы получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial I_1} + \frac{\partial H}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial I_1} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_H = \frac{\frac{\partial H}{\partial I_1}}{\frac{\partial H}{\partial I_2}} = -\frac{\partial I_2}{\partial I_1} = \rho,$$

что и требовалось. Теорема доказана. ■

1.3. Примеры

Проиллюстрируем доказанную теорему на примере интегрируемых неголономных систем, в которых было найдено конформно гамильтоново представление.

Пример 1 (шар Чаплыгина на плоскости). Рассмотрим систему (2) при $k = 1$ и $U = 0$, которая описывает качение без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара по неподвижной горизонтальной плоскости. В этом случае к интегралам (3) и (4) добавляется интеграл площадей

$$F_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{n}).$$

Таким образом, для этой системы, согласно теореме 1, поток после замены времени выпрямляется и, согласно теореме 2, имеется пуассонова структура, приводящая систему к конформно гамильтоновой форме.

В работе [6] (см. также [24, 25]) указана пуассонова структура с аннуляторами (функциями Казимира) F_0, F_2 , которая в переменных

$$\mathbf{L} = \rho \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n}, \quad \rho = (D^{-1} - (\mathbf{n}, \mathbf{A}\mathbf{n}))^{-\frac{1}{2}}$$

выглядит следующим образом:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} \left(L_k - \rho^2 (\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma}) \frac{\gamma_k}{J_k} \right), \quad \{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0;$$

при этом уравнения движения представляются в конформно гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{L}_k &= \rho \{H, L_k\}, \quad \dot{\gamma}_k = \rho \{H, \gamma_k\}, \quad k = 1, 2, 3, \\ H &= \frac{1}{2} \left((D^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})) (\mathbf{L}, \mathbf{A}\mathbf{L}) + (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\mathbf{L})^2 \right). \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим теперь систему (2) при $U = 0$ и $k = -1$; в этом случае имеется дополнительный линейный интеграл вида

$$F_2 = (\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{M}, \mathbf{n}), \quad \tilde{\mathbf{J}} = \text{diag}(J_2 + J_3 - J_1, J_3 + J_1 - J_2, J_1 + J_2 - J_3),$$

так что здесь также применима теорема 1 и решение уравнений движения в принципе может быть получено в квадратурах. Однако явные квадратуры при помощи разделения переменных указаны лишь при $F_2 = 0$ [22]. Вопрос о явном интегрировании и гамильтонизации при $F_2 \neq 0$ до сих пор остается открытым.

Укажем, как при помощи квадратур [22] система приводится к конформно гамильтоновой форме. Соответствующие разделяющие переменные z_1, z_2 определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} n_i^2 &= \frac{1}{G(z_1, z_2)} \frac{\det \mathbf{I}}{(J_i - d) J_j J_k} \frac{(a_i - z_1)(a_i - z_2)}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), \\ M_i &= \frac{n_j n_k}{2} (J_k - J_j) \left[\frac{\dot{z}_1}{(1 - a_j^{-1} z_1)(1 - a_k^{-1} z_1) z_2} + \frac{\dot{z}_2}{(1 - a_j^{-1} z_2)(1 - a_k^{-1} z_2) z_1} \right], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$G(z_1, z_2) = 1 - d(\text{Tr } \mathbf{J} - 2d)(z_1 + z_2) + d(4 \det \mathbf{J} - d \text{Tr}(\mathbf{J}\tilde{\mathbf{J}}))z_1 z_2 \quad (1.3)$$

и $a_i = ((J_j + J_k - J_i)J_i)^{-1}$. Интеграл энергии (3) и квадрат момента (4) представляется в форме

$$\begin{aligned} H &= (z_1 - z_2) \frac{\det \mathbf{I}}{4G^2(z_1, z_2)} \left[\frac{\Psi(z_2)}{\Phi(z_1)z_2^2} z_1^2 - \frac{\Psi(z_1)}{\Phi(z_2)z_1^2} z_2^2 \right], \\ F_1 &= (z_1 - z_2) \frac{\det \mathbf{I}}{4G^2(z_1, z_2)} \left[\frac{\psi(z_2)}{\Phi(z_1)z_2^2} z_1^2 - \frac{\psi(z_1)}{\Phi(z_2)z_1^2} z_2^2 \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\Psi(z) = d \det \mathbf{A} z^2 - \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{J})z + 2, \quad \psi(z) = (4 \det \mathbf{J} - d \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{J}))z - (\text{Tr } \mathbf{J} - 2d).$$

После замены времени

$$dt = \frac{1}{\sqrt{G(z_1, z_2)}} d\tau \equiv \sqrt{\frac{\det \mathbf{J}}{\det \mathbf{I}}} (\mathbf{I}\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) d\tau \quad (1.5)$$

на уровне интегралов $H = h$ и $F_1 = f$ уравнения движения представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{z_2 \sqrt{R(z_1)}}{z_1 - z_2}, \quad \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{z_1 \sqrt{R(z_2)}}{z_2 - z_1}, \\ R(z) &= -(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) (f\Psi(z) + h\psi(z)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

На многообразии $\mathcal{M}^4 = \{F_0 = 1, F_2 = 0\}$ выберем независимые переменные z_1, z_2, h, f и определим пуассонову структуру (ранга 4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \{z_1, z_2\} &= 0, \quad \{h, f\} = 0, \\ \{z_1, h\} &= \frac{\Psi(z_2)}{\Delta} \sqrt{P(z_1)}, \quad \{z_2, h\} = -\frac{\Psi(z_1)}{\Delta} \sqrt{P(z_2)}, \\ \{z_1, f\} &= -\frac{\psi(z_2)}{\Delta} \sqrt{P(z_1)}, \quad \{z_2, f\} = \frac{\psi(z_1)}{\Delta} \sqrt{P(z_2)}, \\ \Delta &= \Psi(z_1)\psi(z_2) - \Psi(z_2)\psi(z_1), \quad P(z) = \frac{\Psi^2(z)}{z^2} R(z). \end{aligned}$$

В этом случае уравнения движения (1.6) представляются в конформно гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{dz_k}{d\tau} &= \lambda(z_1, z_2) \{z_k, H\}, \quad H = h, \\ \lambda(z_1, z_k) &= \frac{\Psi(z_1)\Psi(z_2)(z_1 - z_2)}{\Delta z_1 z_2}. \end{aligned}$$

Конформно гамильтоново представление в первоначальных физических переменных (\mathbf{M}, \mathbf{n}) указано в [9].

2. Гамильтонизация в окрестности периодической траектории

В этом разделе мы рассмотрим системы, которые не являются интегрируемыми, для них типично хаотическое поведение. В работах [23, 26, 27, 28] приведено несколько примеров (неголомомных) неинтегрируемых систем, которые могут быть сведены к потоку на четырехмерном многообразии, который сохраняет меру и обладает первым интегралом. Для качественного анализа подобных систем часто используется сечение Пуанкаре, с помощью которого на поверхности уровня первого интеграла строится двумерное отображение, сохраняющее площадь (в подходящих переменных). Таким образом анализ этого потока сводится к изучению семейства двумерных отображений, параметризуемых значением постоянной первого интеграла. Такое представление позволяет использовать хорошо известные (численные) методы исследования хаоса, применяемые, как правило, для гамильтоновых систем с $1\frac{1}{2}$ и 2 степенями свободы.

С другой стороны, известно [36], что всякое двумерное сохраняющее площадь отображение (гомотопное тождественному) аналитическим образом вкладывается в гамильтонов поток (возможно, с неоднозначным гамильтонианом).

Возникает естественный вопрос: *можно ли исходную систему на четырехмерном многообразии представить в гамильтоновой форме, где первый интеграл берется в качестве гамильтониана?*

Этот вопрос содержателен, очевидно, не локально, а либо глобально на всем многообразии, либо в окрестности некоторого инвариантного подмногообразия. В то же время выше было отмечено (см. также [8]), что в интегрируемых неголомомных системах имеются препятствия к представлению системы в гамильтоновой форме без замены времени. Поэтому в данном разделе рассмотрим проблему представления исходной системы (на четырехмерном многообразии) в конформно гамильтоновой форме в окрестности периодического решения.

Теорема 3. *Пусть имеется динамическая система на четырехмерном многообразии, обладающая инвариантной мерой μ и первым интегралом H . Пусть γ — замкнутая траектория этой системы, на которой $dH \neq 0$. Тогда в окрестности этой траектории рассматриваемая система является конформно гамильтоновой с пуассоновой структурой ранга 4.*

Доказательство также использует ряд технических утверждений. Фиксируем точку на траектории γ , рассмотрим ее четырехмерную окрестность. Первый шаг доказательства — это введение удобных координат в этой окрестности.

Ясно, что с топологической точки зрения окрестность траектории γ представляет собой прямое произведение трехмерного диска на окружность. Очевидно, что поток на этой окрестности может быть смоделирован следующим образом. Рассмотрим сначала цилиндр $D^3 \times \mathbb{R}$ с координатами (p, q, h) на диске D^3 (причем h — это значение первого интеграла H) и координатой t на прямой \mathbb{R} . Затем отождествим на нем точки с координатами

$$(p, q, h, t) \quad \text{и} \quad (\Phi(p, q, h), t + f(p, q, h)), \quad (2.1)$$

где $\Phi: D^3 \rightarrow D^3$ — трехмерное отображение Пуанкаре, а $f(p, q, h)$ — время возвращения траектории, стартовавшей из точки (p, q, h) , расположенной на трехмерном сечении Пуанкаре $\{t = 0\}$ (см. рис. 5). В рассматриваемых локальных координатах векторное поле записывается в виде $v = \frac{\partial}{\partial t}$.

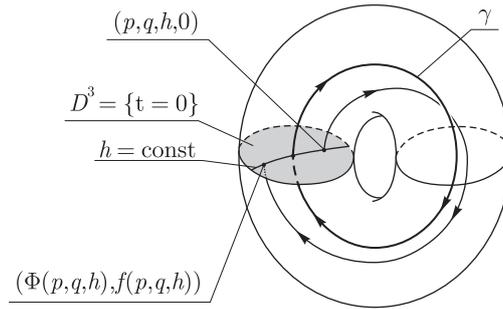


Рис. 5. Схематическое изображение *четырёхмерной* окрестности периодической траектории γ и иллюстрация *трехмерного* отображения Пуанкаре, описанного в доказательстве (граница окрестности, изображенная в виде тора, в общем случае неинвариантна относительно потока).

Итак, в окрестности мы ввели координаты (p, q, h, t) . Они, разумеется, удовлетворяют некоторому условию периодичности. Это условие как раз и выражается правилом отождествления (2.1).

Тот факт, что система имеет первый интеграл H , приводит к тому, что трехмерное отображение Пуанкаре записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \tilde{p}(p, q, h), \\ \tilde{q} &= \tilde{q}(p, q, h), \\ \tilde{h} &= h, \end{aligned}$$

где $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{h}) = \Phi(p, q, h)$ — координаты образа точки при отображении Пуанкаре.

Сохранение меры приводит к тому, что при каждом фиксированном h двумерное отображение Пуанкаре сохраняет площадь на каждом двумерном сечении $\{h = \text{const}, t = 0\}$. Без ограничения общности, мы можем считать, что p, q — канонические координаты, а

$$\tilde{p} = \tilde{p}(p, q, h), \quad \tilde{q} = \tilde{q}(p, q, h)$$

— семейство симплектических диффеоморфизмов, где h играет роль параметра. Можно сказать тем самым, что наша динамическая система в окрестности рассматриваемой траектории полностью характеризуется этим семейством симплектических отображений Φ_h и еще (положительной) функцией $f(p, q, h)$, которая, впрочем, может меняться совершенно произвольным образом при замене параметра на траекториях (поэтому в итоге она никакой роли при наших построениях играть не должна, раз мы интересуемся гамильтоновостью с точностью до конформного множителя). Отметим, что при изменении параметра t на траекториях координаты (p, q, h) остаются прежними.

Итак, мы имеем хорошую модель, описывающую поведение системы в окрестности рассматриваемой периодической траектории с уже введенными локальными координатами.

Доказательство теоремы состоит в явном построении пуассоновой структуры (точнее, симплектической формы) и использует еще одно техническое утверждение.

Лемма 2. Пусть имеется семейство симплектических отображений $\Phi_h: D^2 \rightarrow D^2$:

$$\tilde{p} = \tilde{p}(p, q, h), \quad \tilde{q} = \tilde{q}(p, q, h)$$

где (p, q) — канонические координаты. Тогда можно продолжить это отображение до четырехмерного симплектического отображения вида

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \tilde{p}(p, q, h), & \tilde{q} &= \tilde{q}(p, q, h), \\ \tilde{h} &= h, & \tilde{t} &= t + \phi(p, q, h).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Другими словами, существует гладкая (аналитическая) функция ϕ , такая, что (2.2) — симплектическое отображение в смысле симплектической структуры $\omega = dp \wedge dq + dh \wedge dt$.

Можно сформулировать более общее утверждение:

Лемма 3. Пусть имеется семейство симплектических отображений $\Phi_h: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, гладко зависящее от параметра h .

Тогда можно расширить это отображение до четырехмерного симплектического отображения пространства $\mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{R}^{2n}(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^2(h, t)$ в следующем смысле: существует гладкая функция $\phi(\mathbf{x}, h)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, $h \in \mathbb{R}$, такая, что отображение

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \Phi_h(\mathbf{x}), \\ \tilde{h} &= h, & \tilde{t} &= t + \phi(\mathbf{x}, h)\end{aligned}\tag{2.3}$$

будет симплектическим в смысле естественной симплектической структуры $\Omega = \omega + dh \wedge dt$ на пространстве $\mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{R}^{2n}(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^2(h, t)$.

Доказательство состоит в том, чтобы выписать дифференциальное уравнение на $\phi(\mathbf{x}, h)$ и убедиться, что оно всегда имеет решения. От симплектической структуры удобно при этом перейти к скобке Пуассона. Поскольку по переменным \mathbf{x} рассматриваемое преобразование является симплектическим по построению, то нетрудно видеть, что необходимое и достаточное условие симплектичности преобразования (2.3) принимает вид

$$\{\tilde{x}_k, \tilde{t}\} = 0,$$

где $\tilde{x}_k = \tilde{x}_k(\mathbf{x}, h)$ обозначает одну из координатных функций, задающих семейство преобразований Φ_h .

Если мы обозначим через $\{, \}_0$ исходную скобку Пуассона, определенную на пространстве $\mathbb{R}^{2n}(\mathbf{x})$, то эти соотношения можно переписать в виде

$$\{\tilde{x}_k, \phi\}_0 + \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial h} = 0.$$

Нетрудно видеть, что второй член в этом равенстве представляет собой производную функции \tilde{x}_k вдоль некоторого векторного поля $\boldsymbol{\xi}$, которое определяется из равенства

$$\frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial h} = \boldsymbol{\xi}(\tilde{x}_k) = \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_{\alpha}}.$$

Отсюда

$$\xi^{\alpha} = \sum_k \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial h}$$

или, что то же самое,

$$\boldsymbol{\xi} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Phi_h^{-1}(\Phi_{h+\varepsilon}(\mathbf{x})).$$



Итак, дифференциальное уравнение на функцию ϕ имеет вид

$$\{\tilde{x}_k, \phi\}_0 + \xi(\tilde{x}_k) = 0. \quad (2.4)$$

Но это условие в точности означает, что векторное поле ξ гамильтоново, а функция ϕ служит его гамильтонианом. Таким образом, разрешимость уравнения (2.4) эквивалентна гамильтоновости векторного поля ξ . Но его гамильтоновость следует из следующего хорошо известного факта [2, 35]. Если задано семейство симплектических отображений Ψ_ε (в данном случае $\Psi_\varepsilon = \Phi_h^{-1} \circ \Phi_{h+\varepsilon}$), такое, что $\Psi_0 = \text{id}$, то его производная по параметру в нуле является гамильтоновым векторным полем (мы не делаем здесь различия между локальной и глобальной гамильтоновостью, поскольку все рассматриваемые окрестности являются односвязными). Лемма доказана.

Теперь для завершения нашего доказательства нужно подходящим образом изменить параметр на траекториях, т.е. время t . Ясно, что изменение параметра t с точки зрения отображения (2.1) приводит лишь к изменению функции $f(p, q, h)$. Более того, легко видеть, что эту функцию можно сделать совершенно произвольной. В частности, перепараметризацией мы можем добиться того, что она будет равна $\phi(p, q, h)$, т.е. отображение (2.1) станет симплектическим относительно симплектической структуры, записанной в каноническом виде $\omega = dp \wedge dq + dh \wedge dt$. Отметим, что нужную нам перепараметризацию несложно сделать аналитической (подробнее см. приложение).

Теперь остается лишь посмотреть на полученный результат с несколько иной точки зрения. В окрестности рассматриваемой замкнутой траектории мы имеем некоторую систему координат (p, q, h, t) , определенную по модулю преобразования (2.1), которое является не чем иным, как четырехмерным отображением Пуанкаре для нашей периодической траектории. Поскольку это отображение симплектическое, то $\omega = dp \wedge dq + dh \wedge dt$ задает корректно определенную симплектическую структуру в нашей окрестности.

Остается лишь заметить, что векторное поле v (мы сохраняем прежнее обозначение для перепараметризованного поля) имеет вид $\frac{\partial}{\partial t}$, что совпадает с гамильтоновым векторным полем функции $H = h$, что и требовалось. Теорема доказана. ■

Пример 3 (гамильтоновость резинового шара на сфере). В данном случае в качестве примера рассмотрим резиновый шар на сфере, описываемый системой (5), при $U \equiv 0$ (отметим, что для обычного шара (2), возникают препятствия гамильтонизации в окрестности периодических орбит, обсуждаемые ниже, см. раздел 4). При этом система (5) допускает простейшие периодические решения вида

$$\begin{aligned} \sigma_k: n_i &= \cos \varphi(t), \quad n_j = \sin \varphi(t), \quad n_k = 0, \quad \omega_i = \omega_j = 0, \quad \omega_k = \omega_0, \\ \varphi(t) &= k\omega_0 t + \varphi_0, \quad \varphi_0, \omega_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дифференциалы интегралов (7) и (8), например, для решения σ_3 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} dF_0 &= 2 \cos \varphi \, dn_1 + 2 \sin \varphi \, dn_2, \quad dF_1 = \omega_0 \, dn_3 + \cos \varphi \, d\omega_1 + \sin \varphi \, d\omega_2, \\ dH &= J_3 \omega_0 \, d\omega_3 \end{aligned}$$

и очевидно являются линейно независимыми. Следовательно, решения (2.5) невырождены (т.е. dH отлично от нуля по модулю дифференциалов dF_0, dF_1). И действительно, как

показано в [24], существует пуассонова структура с аннуляторами F_0, F_1 , приводящая систему (5) к конформно гамильтоновой форме.

Наиболее просто соответствующая пуассонова структура выглядит в следующих переменных:

$$M = \frac{\sqrt{\det \mathbf{J}}}{k} (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{\frac{1}{2k}} \mathbf{J}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\omega}, \quad \gamma = (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{n};$$

при этом

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (2.6)$$

а гамильтонианом является интеграл энергии (8)

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\det \mathbf{J}} (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J} \boldsymbol{\gamma})^{1/k} M^2, \quad (2.7)$$

при этом

$$\dot{M}_i = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{1-\frac{1}{2k}} \{M_i, H\}, \quad \dot{\gamma}_i = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\gamma})^{1-\frac{1}{2k}} \{\gamma_i, H\}.$$

Скобка (2.6) является скобкой Ли–Пуассона (ко)алгебры $e(3)$. Функции (M, γ) , (γ, γ) являются ее функциями Казимира.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показано в [24], эта система при $k = 1$ изоморфна интегрируемой системе Веселовой [11], конформно гамильтоново представление которой было впервые указано в [33].

3. Гамильтонизация в окрестности положения равновесия

Вопрос о критерии конформной гамильтоновости в окрестности положения равновесия является, по-видимому, достаточно сложным и до сих пор не решен. Приведем здесь ряд замечаний, относящихся к этой проблеме.

Легко видеть, что в этом случае имеется следующее очевидное необходимое условие.

Предложение 3. Пусть \mathbf{x}_0 — неподвижная точка векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Если \mathbf{v} является конформно гамильтоновым в окрестности этой точки, причем соответствующая пуассонова структура \mathbf{J} имеет в данной точке ранг $2k$, то линеаризация этого векторного поля имеет не более $2k$ ненулевых собственных значений, причем эти собственные значения встречаются парами $\lambda, -\lambda$.

Доказательство этого утверждения очевидно.

Легко построить пример динамической системы на \mathcal{M}^4 с инвариантной мерой и двумя интегралами, для которой указанное условие не выполняется.

Пример 4. Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (x_1, 2x_2, 2x_3, -4x_4)$. Это векторное поле сохраняет меру $\mu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ и имеет два полиномиальных интеграла $f_1 = x_1^4 x_4$ и $f_2 = x_2 x_3 x_4$. Предложение 3 показывает, что конформно гамильтоновым это векторное поле не является.

КОММЕНТАРИЙ. Препятствия к существованию инвариантной меры для неголомомных систем вблизи неподвижной точки рассмотрены В. В. Козловым [14] (при этом заведомо не существует конформно гамильтонова представления). Он указал простейшее условие на собственные числа λ_i матрицы линеаризации вида $\sum_i \lambda_i = 0$, являющееся необходимым для существования меры с аналитической плотностью (это условие более слабое, чем в предложении 3). Однако оно, по-видимому, не является достаточным: так, в работе [27] указан ряд неголомомных систем (например, уравновешенные эллипсоиды, динамические

и геометрические оси которых совпадают), для которых условие $\sum_i \lambda_i = 0$ выполнено. Тем не менее, для них до сих пор не найдены ни мера, ни тем более конформно гамильтоново представление. В работе [7] указаны условия, при которых у катящегося неоднородного эллипсоида отсутствует инвариантная мера.

КОММЕНТАРИЙ. Препятствия к гамильтонизации вблизи положения равновесия можно изучать также в интегрируемых (неголономных) системах. Так, в задаче Рауса, описывающей качение динамически симметричного шара со смещенным центром масс по горизонтальной плоскости, существует положение равновесия (для приведенной системы) типа фокус — это равномерное вращение вокруг вертикали, которое является неустойчивым при малых угловых скоростях вращения (аналог условия Маиевского). Как показано в [24], в этом случае вблизи неособого тора система может быть гамильтонизована без замены времени, что связано с существованием линейных интегралов, аналогичных циклическим. Однако эта пуассонова структура не может быть аналитически продолжена во все фазовое пространство, включающее положение равновесия [29]. Эта система является примером препятствий, связанных с негамильтоновой монодромией интегрируемых неголономных систем [30].

Это препятствие с топологической точки зрения существенно отличается от приводимого нами ниже в примере 7. В примере 7 имеется «гамильтоново» слоение на торы с «негамильтоновым» поведением траекторий на слоях, в то время как в задаче Рауса «негамильтоновым» оказывается уже само слоение на торы (см. [29]).

КОММЕНТАРИЙ. Для другой задачи Рауса (обсуждаемой в [23]), которая связана с анализом устойчивости перманентного вращения однородного шара на вершине эллиптического параболоида в поле тяжести (как и для неголономной задачи Якоби [28]), конформно гамильтоново представление также пока неизвестно. Однако, применяя теорему Мозера о существовании инвариантных кривых отображения кольца, сохраняющего площадь, можно указать достаточное условие устойчивости этих вращений и расширить тем самым КАМ-теорию на случай консервативных систем, обладающих инвариантной мерой.

4. Препятствия гамильтонизации

Рассмотрим теперь вопрос о возможных препятствиях к представлению системы в конформно гамильтоновой форме.

Помимо указанных выше препятствий, в окрестности положений равновесия в неголономных системах могут встречаться вырожденные периодические орбиты, которые также препятствуют представлению системы в конформно гамильтоновой форме. Ниже мы укажем также глобальные препятствия, которые носят топологический характер. Однако в полной мере этот вопрос еще практически не изучен.

4.1. Вырожденные периодические орбиты

Будем полагать, что на n -мерном многообразии M^n задана сохраняющая инвариантную меру система

$$\dot{x} = v(x), \quad (4.1)$$

которая также обладает набором первых интегралов f_1, \dots, f_k , удовлетворяющих условию $n - k + 1 = 2m$ — четное число.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как правило, в имеющихся примерах (см. [24, 25]) на шестимерном многообразии M^6 задана система с тремя первыми интегралами f_1, f_2, f_3 и инвариантной мерой.

Простейшее препятствие, когда из интегралов f_1, \dots, f_k заведомо невозможно образовать функции Казимира и гамильтониан для системы (4.1), описывается следующим образом.

Предложение 4. Если существует решение системы $\gamma(t)$, не являющееся неподвижной точкой, которое удовлетворяет условию

$$\text{rank}(df_1, \dots, df_k)|_{\gamma(t)} < k, \quad (4.2)$$

тогда в окрестности $\gamma(t)$ не существует кососимметричного представления системы вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) dH(\mathbf{x}), \quad H(\mathbf{x}) = H(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})), \quad (4.3)$$

с кососимметрической матрицей $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{x})$, для которой $\text{rank } \mathbf{J}(\mathbf{x}) = n - k + 1$ и $\text{Ker } \mathbf{J}(\mathbf{x})$ принадлежит линейной оболочке df_1, \dots, df_k .

Доказательство сводится к проверке того, что при условии (4.2) и при произвольном выборе $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ и $H(\mathbf{x})$, удовлетворяющих сформулированным условиям, справедливо соотношение

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) dH(\mathbf{x})|_{\gamma(t)} \equiv 0,$$

т. е. $\gamma(t)$ не может быть решением, отличным от неподвижной точки. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В данном утверждении исключается лишь такой случай, когда гиперплоскость $\text{Ker } \mathbf{J}(\mathbf{x})$ должна всюду касаться поверхности уровня функций Казимира $M^{2m} = \{F_1(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) = c_1, \dots, F_{k-1}(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) = c_{k-1}\}$. При этом вопрос о возможности конформно гамильтонова представления с тензором $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ более высокого или низкого ранга остается открытым.

Пример 5. При $U = 0$ уравнения движения (2) допускают три семейства замкнутых траекторий, задаваемых соотношениями

$$\sigma_k: n_i = \sin \varphi, \quad n_j = \cos \varphi, \quad n_k = 0, \quad M_i = M_j = 0, \quad M_k = c, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (4.4)$$

Для периодической траектории σ_3 находим

$$dF_0 = 2 \cos \varphi dn_1 + 2 \sin \varphi dn_2, \quad dF_1 = 2c dM_3, \quad dH = a_3 c dM_3.$$

Таким образом, в данном случае $\text{rank}(dF_0, dF_1, dH)|_{\sigma_k} = 2$, следовательно, согласно предложению 4,

в окрестности периодических решений σ_k невозможно представить систему (2) в конформно гамильтоновой форме, где функции Казимира и гамильтониан являются функциями первых интегралов (3).

ЗАМЕЧАНИЕ. В то же время система (2) представляется в кососимметрической форме следующим образом:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \frac{k}{d\Lambda} \mathbf{n} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}}, \quad (4.5)$$

причем интегралы F_0, F_1 являются аннуляторами соответствующей матрицы $\mathbf{J}(\mathbf{M}, \mathbf{n})$. Тем не менее, как мы видим, функция $\Lambda(\mathbf{M}, \mathbf{n})|_{\sigma_k} = 0$, следовательно, на периодических решениях (4.4) это представление имеет сингулярность.

Кроме того, для кососимметрического представления (4.5) не известен приводящий множитель (т. е. такая функция $K(\mathbf{M}, \mathbf{n})$, что \mathbf{KJ} удовлетворяет тождеству Якоби). Следовательно, вопрос о конформной гамильтоновости системы вдали от периодических решений (4.4) также не решен.

4.2. Глобальные препятствия

Если ставить вопрос глобально, т. е. пытаться провести гамильтонизацию динамической системы в целом на многообразии M^4 , то нетрудно понять, что препятствия существуют. Приведем простой пример, показывающий, какого типа они могут быть.

Пример 6. В качестве M^4 рассмотрим четырехмерную сферу $S^4 = \{x_1^2 + \dots + x_5^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^5$.

Рассмотрим векторное поле $\xi = (\lambda x_2, -\lambda x_1, \mu x_4, -\mu x_3, 0)$.

Легко видеть, что это векторное поле обладает инвариантной мерой, индуцированной на сфере стандартной формой объема $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_5$ и двумя первыми интегралами x_5 и $x_1^2 + x_2^2$.

Локально это векторное поле легко гамильтонизируется (даже без замены времени), но подходящей глобальной симплектической структуры на S^4 не существует просто потому, что четырехмерная сфера S^4 не является симплектическим многообразием [21].

Можно привести пример, показывающий, что препятствия к гамильтонизации существуют даже в окрестности двумерного «интегрального многообразия» $\mathcal{X} = \{H = h_0, f = f_0\}$, но в том случае, когда \mathcal{X} имеет особенности. Идея такого примера использует одно не совсем очевидное свойство интегрируемой гамильтоновой системы.

Типичное особое интегральное многообразие представляет собой декартово произведение некоторого графа K (см. рис. 6) на окружность (см., например, [4]). Вершины графа соответствуют периодическим траекториям системы, а (открытые) ребра — сепаратрисным многообразиям. Поведение гамильтонова векторного поля на сепаратрисном многообразии, являющемся с топологической точки зрения кольцом, может быть трех различных типов.

Либо все траектории замкнуты, либо они являются асимптотическими по отношению к граничным окружностям кольца, которые, в свою очередь, могут быть ориентированы одинаковым или противоположным образом (см. рисунок 7).

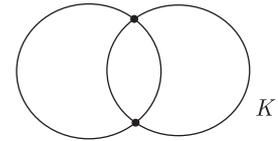


Рис. 6.

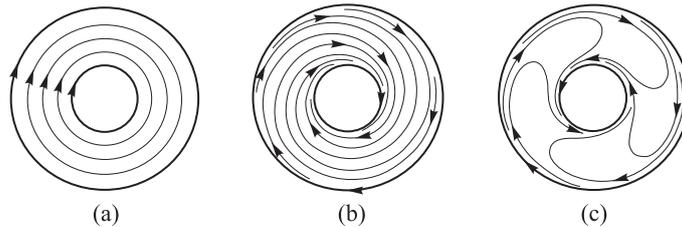


Рис. 7.

Рассмотрим последнюю ситуацию (рис. 7c). Ее несложно реализовать на особом слое типа $\mathcal{X} \simeq K \times S^1$, где K — граф с двумя вершинами и четырьмя ребрами, изображенный на рис. 6 (в книге [4] он называется C_2). Особые траектории, отвечающие вершинам графа, будут при этом ориентированы противоположным образом. Известно (см. [4], Предложение 3.10), что если в интегрируемой системе встретилась особая интегральная поверхность такого типа, то она является неустойчивой, т. е. распадается на две более простые интегральные поверхности при сколь угодно малом изменении уровня энергии системы. Однако

если априори никакой симплектической структуры нет, то нам ничто не мешает построить векторное поле следующим образом.

Пример 7. Сначала рассмотрим настоящую интегрируемую гамильтонову систему с особой интегральной поверхностью $\mathcal{X} \simeq K \times S^1$ с гамильтоновым векторным полем, описанным выше (т.е. как на рис. 7с). Пример построения интегрируемой системы с такой динамикой на особом слое можно найти в [4]. Зафиксируем соответствующий уровень гамильтониана $\mathcal{Q}^3 = \{H = h_0\}$ и ограничим на \mathcal{Q}^3 наше векторное поле \mathbf{v} . Про поведение этого векторного поля вне \mathcal{Q}^3 вообще забудем. Теперь рассмотрим новое многообразие $\mathcal{M}^4 = \mathcal{Q}^3 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Пусть $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ — дополнительная координата. Продолжим на \mathcal{M}^4 естественным образом дополнительный интеграл f и функцию H , полагая $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$, $H(\mathbf{x}, t) = t$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}^3$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Векторное поле \mathbf{v} продолжается с \mathcal{Q}^3 на $\mathcal{M}^4 = \mathcal{Q}^3 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ тривиальным образом так, чтобы при каждом t оно касалось $\mathcal{Q}_t^3 = \mathcal{Q}^3 \times \{t\}$ и просто совпадало с исходным векторным полем при естественном отождествлении \mathcal{Q}_t^3 с \mathcal{Q}^3 . Другими словами, поведение \mathbf{v} на всех уровнях $\{H = h_0\}$ совершенно идентично (для исходного гамильтонова векторного поля это было не так, поскольку особая поверхность \mathcal{X} обязана была распадаться на две более простые!).

Построенное векторное поле обладает двумя интегралами f и H и, кроме того, сохраняет естественную меру $\mu \wedge dt$ на \mathcal{M}^4 , где μ — мера на \mathcal{Q}^3 , которая сохранялась исходным векторным полем.

Гамильтонизовать это векторное поле нельзя, поскольку при каждом $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ особый слой по построению содержит сепаратрисное многообразие с динамикой, показанной на рис. 7с, и не распадается при изменении H , что в случае гамильтоновых систем невозможно (см. [4], Предложение 3.10).

5. Открытые вопросы

В заключение укажем некоторые открытые вопросы, которые могут быть решены при помощи методов, развиваемых в этой работе.

- Пусть имеется динамическая система на четырехмерном многообразии \mathcal{M}^4 , обладающая двумя независимыми интегралами H и f и инвариантной мерой μ . Тогда на поверхности уровня $\mathcal{Q}^3 = \{H = \text{const}\}$ возникает слоение на торы с особенностями, которое в случае общего положения должно, как и в гамильтоновом случае, описываться инвариантом Фоменко–Цишанга, т.е. так называемой меченой молекулой [4, 18].

Возникает естественный вопрос о конформной гамильтоновости такого векторного поля в окрестности «изоэнергетического» многообразия \mathcal{Q}^3 , т.е. на «молекуле». Описанный выше пример 7 иллюстрирует возможные препятствия гамильтонизации. Верно ли, что отсутствие сепаратрисных многообразий, показанных на рис. 7с, гарантирует конформную гамильтоновость системы?

Этот вопрос представляется вполне разрешимым, поскольку имеется хорошо развитая теория орбитальной классификации на изоэнергетических поверхностях [3, 5], которая подробно описывает поведение траекторий интегрируемых гамильтоновых систем на \mathcal{Q}^3 .

- В приложениях возникают ситуации, когда векторное поле на \mathcal{M}^4 обладает двумя независимыми интегралами, но о существовании инвариантной меры ничего не из-

вестно [24]. С чисто теоретической точки зрения, построить примеры такого типа без инвариантой меры (и, следовательно, не являющиеся конформно гамильтоновыми) довольно просто. Достаточно сделать так, чтобы на инвариантном торе с рациональным числом вращения появился предельный цикл. Интересно было бы выяснить, встречаются ли такого рода примеры в реальных механических системах.

Приложение

В доказательствах основных теорем этой работы использовались упоминания некоторых «стандартных фактов дифференциальной геометрии и топологии». Здесь мы приведем их строгие формулировки.

Так, в доказательстве теоремы 1 говорится о том, что гладкую угловую координату τ можно аппроксимировать аналитической угловой координатой τ . Это частный случай следующего совершенно общего утверждения об аппроксимации гладких функций аналитическими на компактных многообразиях.

Теорема. Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — C^∞ -гладкая функция на вещественно-аналитическом компактном многообразии M . Тогда существует вещественно-аналитическая функция $g: M \rightarrow \mathbb{R}$, которая аппроксимирует f вместе со всеми производными до порядка k включительно с точностью до любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если M — окружность, то аппроксимация дается рядом Фурье. В случае произвольного многообразия аналогом ряда Фурье является, например, разложение по собственным функциям оператора Лапласа–Бельтрами (см. подробнее [20]).

Второе стандартное утверждение является одним из шагов в доказательстве теоремы Лиувилля (см., например, [1]), и поэтому мы приводим его без доказательства.

Лемма. Пусть на торе заданы два линейно независимых в каждой точке коммутирующих векторных поля, тогда на торе существуют угловые координаты, в которых эти векторные поля выпрямляются (т. е. представляются в форме $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, $\omega_i = \text{const}$).

Аналогичным образом, если задано семейство торов $T^2 \times D^{n-2}$ и два коммутирующих векторных поля, которые касаются торов и линейно независимы в каждой точке, то угловые координаты, в которых поля выпрямляются, можно выбрать согласованным образом сразу на всех торах одновременно. В вещественно-аналитической ситуации эти угловые координаты также будут вещественно-аналитическими.

В заключение приведем доказательство того, что перепараметризацию времени в теореме 3 можно сделать аналитической. Оно основывается на следующем утверждении.

Лемма. Рассмотрим вещественно-аналитическую динамическую систему $\dot{x} = v(x)$ с замкнутой траекторией и ее отображение Пуанкаре, заданное на некоторой аналитической трансверсальной площадке. Можно аналитическим образом перепараметризовать систему так, чтобы время возвращения на площадку было равно единице сразу для всех траекторий одновременно.

Теперь получается следующее: любую функцию $f(p, q, h)$ (которая задает время возвращения) в силу этой леммы можно аналитической перепараметризацией сделать равной единице. Тогда обратная перепараметризация будет из единицы производить любую наперед заданную функцию. Таким образом, применяя эту лемму два раза (сначала из $f(p, q, h)$

получим единицу, а потом из единицы получим $\phi(p, q, h)$, мы получаем нужную нам аналитическую перепараметризацию.

Доказательство леммы. Поскольку мы рассматриваем периодическую траекторию, то в ее окрестности можно ввести аналитическую угловую координату τ (та же самая идея, что в теореме 1), которая при обходе вдоль траектории меняется на единицу. Сечения $\tau = \text{const}$ трансверсальны потоку. Поэтому координаты p, q, h, τ являются хорошими локальными координатами вдоль траектории.

Векторное поле ∂_τ в этой системе координат и исходное векторное поле $\mathbf{v} = \partial_t$ коллинеарны и аналитичны, это в точности означает, что одно получается из другого аналитической перепараметризацией (или, что то же самое, аналитическим конформным множителем).

Таким образом, эта лемма сразу следует из того, что в окрестности любой замкнутой аналитической кривой можно задать аналитическую угловую координату. Лемма доказана.

Авторы выражают признательность за полезные замечания и обсуждения результатов работы В. В. Козлову, А. И. Нейштадту.

Работа выполнена при поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (код проекта 2009-1.5-503-004-019). Работа А. В. Болсинова выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-660.2008.1).

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [2] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
- [3] Болсинов А. В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Матем. сб., 1995, т. 186, вып. 1, с. 3–28.
- [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. М.–Ижевск: РХД, 1999. 444 с.; см. также: Bolsinov A. V., Fomenko A. T. Integrable Hamiltonian systems: Geometry, topology, classification. Boca Raton, FL: Chapman & Hall, 2004. 730 pp.
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации: I // Матем. сб., 1994, т. 185, вып. 4, с. 27–80;
Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации: II // Матем. сб., 1994, т. 185, вып. 5, с. 27–78.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, вып. 5, с. 793–795.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. О несуществовании инвариантной меры при качении неоднородного эллипсоида по плоскости // Матем. заметки, 2005, т. 77, вып. 6, с. 930–932.
- [8] Борисов А. В., Мамаев И. С. Препятствие к гамильтоновости неголомомных систем // Докл. РАН, 2002, т. 387, вып. 6, с. 764–766.



- [9] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, вып. 4, с. 475–478.
- [10] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, вып. 6, с. 102–105.
- [11] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Т. Фоменко. М.: МГУ, 1986. С. 64–68.
- [12] Козлов В. В. Две интегрируемые задачи классической динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1981, вып. 4, с. 80–83.
- [13] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механ., 1985, т. 8, № 3, с. 85–107; опубликовано также в сборнике статей «Неголономные динамические системы» под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева (М.–Ижевск, Инст. компьютерн. исслед., 2002).
- [14] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ, 1987, т. 51, вып. 4, с. 538–545.
- [15] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР, 1953, т. 93, вып. 5, с. 763–766.
- [16] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН, 1982, т. 37, № 5(227), с. 3–49.
- [17] Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. 2-е изд. М.: Фазис, 1996. 128 с.
- [18] Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1990, т. 54, вып. 3, с. 546–575.
- [19] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, вып. 1, с. 139–168.
- [20] Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. 2-е изд. М.: Добросвет, 2005. 312 с.
- [21] Berndt R. An introduction to symplectic geometry. (Grad. Stud. Math., vol. 26.) Providence, RI: AMS, 2001. 195 p.
- [22] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.
- [23] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Stability of steady rotations in the nonholonomic Routh problem // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 4, pp. 239–249.
- [24] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [25] Borisov A. V., Mamaev I. S. Isomorphism and Hamilton representation of some nonholonomic systems // Siberian Math. J., 2007, vol. 48, no. 1, pp. 26–36; см. также arXiv: nlin.SI/0509036 v. 1 (Sept. 21, 2005).
- [26] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [27] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [28] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.

- [29] Cushman R. Routh's sphere // *Rep. Math. Phys.*, 1998, vol. 42, no. 1, pp. 47–70.
- [30] Cushman R., Duistermaat J. J. Non-Hamiltonian monodromy // *J. Differential Equations*, 2001, vol. 172, no. 1, pp. 42–58.
- [31] Ehlers K., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2 – 3 – 5 distributions // In *Proceedings IUTAM symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, at the Steklov Institute, Moscow, to appear.*
- [32] Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., Rios P. Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin Hamiltonization // *The breadth of symplectic and Poisson geometry: Festschrift in honor of Alain Weinstein / J. E. Marsden, T. S. Ratiu. (Progr. Math., vol. 232.) Boston: Birkhäuser, 2005. P. 75–120.*
- [33] Fedorov Yu. N., Jovanović B. Nonholonomic LR -systems as generalized Chaplygin systems with an invariant measure and flows on homogeneous spaces // *J. Nonlinear Sci.*, 2004, vol. 1, no. 14, pp. 341–381.
- [34] Koiller J., Ehlers K. Rubber rolling over a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [35] McDuff D., Salamon D. *Introduction to symplectic topology.* Oxford: Oxford Univ. Press, 1998. 512 p.
- [36] Pronin A. V., Treschev D. V. On the inclusion of analytic maps into analytic flows // *Regul. Chaotic Dyn.*, 1997, vol. 2, no. 2, pp. 14–24.
- [37] Siegel C. L. Note on differential equations on the torus // *Ann. of Math. (2)*, 1945, vol. 46, no. 3, pp. 423–428.