

Замечания о сухом трении и неголономных связях

В. В. Козлов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, Москва, ул. Губкина, д. 8
kozlov@pran.ru

Рассматривается задача о качении тяжелого однородного шара по горизонтальной плоскости с учетом модели сухого трения В. Ф. Журавлёва. Показано, что если пятно контакта неограниченно уменьшается, а коэффициент трения увеличивается, то на больших конечных интервалах времени движение шара будет мало отличаться от неголономного качения.

В связи с возникшей дискуссией о границах применимости неголономной динамики при описании качения твердых тел (НД, 2010, т. 6, № 2, с. 365–66 и № 3, с. 671–674) мне хотелось бы сделать несколько замечаний. Во-первых, я не согласен с точкой зрения В. Ф. Журавлёва, что исследования по неголономной динамике носят учебно-методический характер. Динамика систем с неинтегрируемыми связями составляет важный раздел современной аналитической механики. Неинтегрируемые связи появляются в результате естественных предельных переходов в уравнениях динамики с учетом анизотропии трения или (и) анизотропии инерциальных свойств системы (см. по этому поводу обзор [1]). Во-вторых, неголономные уравнения качения твердого тела нетрудно получить из уравнений движения с учетом модели сухого трения, предложенной самим В. Ф. Журавлёвым [2], с помощью физически ясного предельного перехода. Это наблюдение и составляет основное содержание заметки.

Рассмотрим задачу о качении тяжелого однородного шара по горизонтальной плоскости и воспользуемся уравнениями движения, выведенными в работе [2] с учетом сил сухого трения:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{d\tau} &= -\frac{5v \sin \alpha}{R(8\mu|u| + 3\pi v)}, & \frac{d\omega_y}{d\tau} &= \frac{5v \cos \alpha}{R(8\mu|u| + 3\pi v)}, \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{5\mu^2 u}{16\mu|u| + 15\pi v}, & \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{7v}{8\mu|u| + 3\pi v}, & \frac{d\alpha}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_x, \omega_y, \omega_z (= u/R)$ — проекции угловой скорости шара на неподвижные оси x, y, z (ось z вертикальна), v — скорость точки шара, совпадающая с центром пятна контакта, R — радиус шара, $\mu = \varepsilon/R$, где ε — радиус пятна контакта,

$$\tau = \frac{3\pi N f}{2m} t$$

— новое время. В этой формуле N — вес шара, f — коэффициент трения, m — масса шара. Параметр α — угол, который составляет скорость точки центра контакта с осью x .

Сначала отметим одно некорректное утверждение в [2]: скорость скольжения v и угловая скорость вращения $\omega_z = u/R$ одновременно обращаются в нуль. Это не так. Действительно, система уравнений движения имеет частное решение $v = 0$. Тогда (при $u \neq 0$)

$$\left| \frac{du}{dt} \right| = \left| \frac{du}{d\tau} \right| \frac{d\tau}{dt} = \frac{15\pi N}{32} \frac{N}{m} f\mu.$$

При этом компоненты угловой скорости ω_x и ω_y остаются постоянными. В частности, если $f\mu \rightarrow 0$, то переменная u практически не меняется на сколь угодно больших интервалах времени и мы имеем движение шара, мало отличающееся от неголономного качения.

Теперь рассмотрим общий случай и воспроизведем фазовый портрет системы на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{v, \omega_z\}$ из работы [2, рис. 4]. Эта картина фазовых кривых не точно отражает

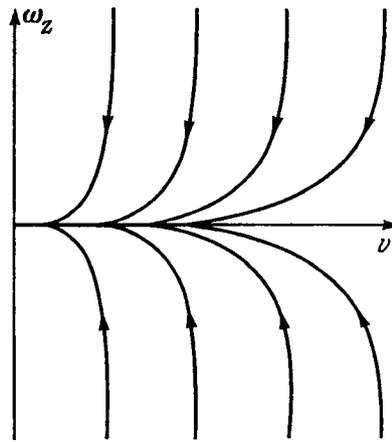


Рис. 4 из [2, стр. 766].

ситуацию в случае малых значений μ (наиболее интересную с практической точки зрения): переменные ω_z и v надо поменять местами. Видно, что при малых μ и больших f фазовая точка практически мгновенно оказывается вблизи оси ω_z . В частности, скорость скольжения v становится очень малой и движение хорошо описывается рассмотренным выше частным случаем, когда $v = 0$. Такое поведение решений характерно для систем с малым параметром при старшей производной с учетом явления пограничного слоя. Эти наглядные соображения можно дополнить точными оценками.

Если $v \neq 0$, то

$$\left| \frac{du}{d\tau} \right| < \frac{5}{16} \mu.$$

Следовательно,

$$|\Delta u| = \int_0^\tau \left| \frac{du}{ds} \right| ds < \frac{5}{16} \mu \tau.$$

С учетом соотношения между τ и t , получаем следующее. В интервале $0 \leq t \leq t_\delta$, где

$$t_\delta = \frac{32m}{15\pi N} \frac{\delta}{f\mu},$$

переменная u уменьшается не более, чем на δ .

Далее, поскольку переменная $|u|$ уменьшается, то

$$\left| \frac{dv}{d\tau} \right| = \frac{7v}{8\mu|u| + 3\pi v} > \frac{7v}{8\mu|u_0| + 3\pi v},$$

где $u_0 = u(0)$. Следовательно,

$$\tau < \int_{v(\tau)}^{v(0)} \left(\frac{8\mu|u_0|}{7v} + \frac{3\pi}{7} \right) dv = \frac{8\mu|u_0|}{7} \left| \ln \frac{v(0)}{v(\tau)} \right| + \frac{3\pi}{7} |v(0) - v(\tau)|.$$

Фиксируя сколь угодно малое значение скорости v в момент нового времени τ , мы имеем оценку сверху для интервала времени, в течение которого скорость скольжения достигнет этого значения. Следовательно, при $t > t_\rho$, где

$$t_\rho = \frac{16|u_0|m}{21\pi N} \frac{\mu}{f} \left| \ln \frac{\rho}{v_0} \right| + \frac{2m}{7N} \frac{1}{f} v_0,$$

имеем $v(t) < \rho$; здесь также $v_0 = v(0)$.

Зафиксировав начальные условия u_0 и v_0 , устремим μ к нулю, а f к бесконечности, причем $f\mu \rightarrow 0$. Тогда вне малого интервала времени $[0, t_\rho]$ скорость скольжения станет очень малой, а в течение большого интервала времени $[t_\rho, t_\delta]$ угловая скорость верчения практически не меняется.

На эти выводы можно посмотреть несколько по-иному, заметив, что отношение характерных времен

$$\frac{t_\rho}{t_\delta} = \frac{5}{14} \mu^2 |u_0| \ln \frac{v_0}{\rho} + \frac{15\pi}{112} \frac{\mu v_0}{\delta}$$

не зависит от коэффициента трения f . Зафиксируем значение f , а радиус пятна контакта устремим к нулю. Тогда при малых значениях μ время «релаксации» t_δ все равно будет много меньшим длины интервала $[t_\rho, t_\delta]$, в течение которого движение шара с сухим трением мало отличается от неголономного качения.

Остается показать, что в этом большом интервале угловые скорости ω_x и ω_y будут мало меняться. Действительно, без ограничения общности можно положить (как и в [2]) $\alpha = 0$, что дает $\omega_x = \text{const}$ и $7R\omega_y + 5v = \text{const}$. Как уже было сказано, при $t > t_\rho$ скорость v станет малой. Но тогда и угловая скорость ω_y может лишь немного увеличиться. Что и требовалось показать.

Следует иметь в виду, что формулы В. Ф. Журавлёва для силы и момента сухого трения являются аппроксимацией более сложных формул Контенсу, полученных на основе решения *статической* контактной задачи Герца. И в этом случае справедливы указанные выше выводы, только их строгое обоснование более громоздко. Собственно говоря, похожая задача рассматривалась Н. А. Фуфаевым еще в 1966 г. при другом распределении напряжений в пятне контакта [3]. Правда, анализ в [3] касался, в основном, поведения времени проскальзывания при уменьшении радиуса пятна контакта и поэтому оказался неполным. Утверждение о стремлении движения шара к неголономному качению при неограниченном уменьшении пятна контакта и увеличении коэффициента трения справедливо и в более общей модели, предложенной в [4] и учитывающей сухое трение качения. Отметим в заключение, что модели сухого трения из [2–4] будут более точными, если *статические* контактные задачи заменить *стационарными* контактными задачами, когда тело движется с постоянной линейной и угловой скоростью.

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.
- [2] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, вып. 5, с. 762–767.
- [3] Фуфаев Н. А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 67–72.
- [4] Карапетян А. В. О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости // ПММ, 2010, т. 74, вып. 4, с. 531–535.

29 октября 2010 г.

