

Качение однородного шара по динамически несимметричной сфере

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 4 ноября 2010 г.

В работе исследуется новая задача о взаимном обкате тел со сферическими поверхностями, обобщающая известную задачу Чаплыгина о качении шара по плоскости. В отличие от ранее исследуемых неголономных систем рассматриваемая система имеет большую размерность и значительно сложнее для анализа. Замечательной особенностью указанной системы является существование скрытых первых интегралов движения линейных по моментам, аналоги которых были обнаружены ранее Чаплыгиным в более простой интегрируемой системе. В работе найдены частные интегрируемые случаи исследуемой системы.

Ключевые слова: неголономная связь, качение, шар Чаплыгина, интеграл, инвариантная мера

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev

Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere

We consider a novel mechanical system consisting of two spherical bodies rolling over each other, which is a natural extension of the famous Chaplygin problem of rolling motion of a ball on a plane. In contrast to the previously explored non-holonomic systems, this one has a higher dimension and is considerably more complicated. One remarkable property of our system is the existence of “clandestine” linear in momenta first integrals. For a more trivial integrable system, their counterparts were discovered by Chaplygin. We have also found a few cases of integrability.

Keywords: nonholonomic constraint, rolling motion, Chaplygin ball, integral, invariant measure

MSC 2010: 37N15

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	870
1. Качение однородного шара по динамически несимметричной сфере в невесомости	872
2. Обобщенная задача Рауса	876
2.1. Задача о качении однородного шара по динамически несимметричной сферической оболочке с закрепленным центром	876
2.2. Задача о качении динамически несимметричной сферической оболочки по однородному шару с закрепленным центром	877
3. Частные случаи движения	878
3.1. Случай $\mathcal{K} = \lambda\mathcal{M}$	878
3.2. Случай $\mathcal{K} = 0$	879
3.3. Случай $\mathcal{M} = 0$	879
4. Интегрируемые частные случаи	880
4.1. Осесимметричный случай	880
4.2. Случай $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ ($\lambda = 1$)	881
5. Предельные и ограниченные задачи	882
5.1. Случай $\alpha = 0$	882
5.2. Случай $r = 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$, $d\alpha^2 = D = \text{const}$)	883
5.3. Качение однородного шара по независимо вращающейся динамически несимметричной оболочке	884
5.4. Качение динамически несимметричной оболочки по постоянно вращающемуся шару	885
5.5. Переход к шаровому подвесу	886

Введение

В хорошо известной работе [18] С. А. Чаплыгин исследовал движение динамически несимметричного уравновешенного шара, катящегося по плоскости без проскальзывания. Эта задача оказалась интегрируемой и вошла в «золотой фонд» аналитической механики. Кроме того, она не только породила массу исследований по общей теории неголономных систем и развитию методов их интегрирования, но и инициировала поиск различных ее обобщений. Одно из интересных обобщений задачи о шаре Чаплыгина было предложено самим С. А. Чаплыгиным в работе [19], где он исследовал систему катящихся вложенных шаров с точки зрения существования дополнительных интегралов движения. В частности, в этой работе он указал систему некоторых новых интегралов типа кинетического момента (либо интеграла площадей), не имеющих явной физической интерпретации. Интегрирование одной из таких задач Чаплыгин довел до квадратур, однако эта задача мало известна в научном сообществе. Не претендуя на полноту, среди обобщений также отметим исследование движения твердого тела в сферическом подвесе [17], задачу о движении шара с полостями, заполненными жидкостью [15], задачу о качении шара по шару [7, 8, 23], качение



шара Чаплыгина по прямой [9] и ряд задач о качении различных тел, образующих иерархию неголономных динамических систем с точки зрения существования различных тензорных инвариантов [24, 26]. Отметим также некоторые формальные обобщения типа многомерного шара Чаплыгина (см., например, [30, 31]), интегрируемость которого, однако, до сих пор не доказана. Вообще, методы интегрирования неголономных систем с большим числом степеней свободы почти совсем не развиты (все известные системы интегрируются с помощью теории последнего множителя). Рассматриваемые в работе задачи — конкретные примеры таких систем. Интересно, что в этих задачах возникают дополнительные интегралы, и хотя система и не является интегрируемой в общем виде, наличие интегралов позволяет выделить ряд частных интегрируемых случаев и замечательных движений.

Среди основных работ, развивающих исследование динамики самого шара Чаплыгина, отметим работы [29, 32]. В частности, работа [32] посвящена исследованию как движения приведенной системы, так и движения шара в неподвижной системе координат. В связи с развитием мобильных роботов, один из вариантов которых представляет собой катящийся шар с внутренней системой управления (основанной на гироскопах либо различных маятниках) [20–22, 28, 34], результаты теоретических исследований могут найти интересные практические приложения. Конечно, в этом случае необходимо рассматривать управляемое движение шара, поэтому актуальным становится более систематическое изучение динамики как самого шара Чаплыгина, так и различных его обобщений.

В этой статье мы исследуем свободную динамику более общей модели, включающей в себя как частный случай задачу о шаре Чаплыгина. Данная модель описывает качение одного (динамически несимметричного) шара по другому (однородному), однако в отличие от работы [8] ни один из шаров не фиксируется в пространстве. В частности, исследуемая в статье модель может рассматриваться как описание движения связки тел в невесомости, а также может иметь отношение к исследованию динамики и развитию теории управления спутниками, внутри которых происходит перемещение некоторых объектов при помощи качения. Отметим также, что рассматриваемая система интересна тем, что к ней сводится ряд других задач, например, задача о качении шара по свободно вращающейся сфере с закрепленным центром, в простейшем случае рассмотренная еще Раусом [16]. Это, в частности, дает возможность на базе исследуемой задачи в дальнейшем рассмотреть класс динамических систем, связанных с различными подвесами.

Рассматриваемая в данной работе задача имеет больше степеней свободы (по сравнению с шаром Чаплыгина), и ее анализ существенно сложнее. Несмотря на это, к ней можно применить методы, развиваемые в работах [11, 24, 26] и позволяющие описать иерархию неголономных динамических систем. В частности, с их помощью в данной работе показано наличие инвариантной меры и некоторых дополнительных интегралов движения рассматриваемой задачи. С одной стороны, это позволило сделать некоторые замечания по поводу динамики и применить методы компьютерного анализа к общей системе, а с другой стороны — рассмотреть ряд интересных частных случаев, которые можно исследовать до конца.

Интересно, что рассматриваемая система включает в себя в качестве частных либо предельных случаев достаточно большое число известных неголономных систем, связанных с различными задачами качения шаров. Кроме того, все эти системы можно рассматривать как еще одну иерархию неголономных систем, основанную уже не на наличии тензорных инвариантов, а на разных физических реализациях и возможных предельных переходах. Общая схема, обобщающая частные и предельные случаи рассматриваемой в статье задачи, приведена в конце статьи на рис. 5.

1. Качение однородного шара по динамически несимметричной сфере в невесомости

Рассмотрим задачу о качении без проскальзывания однородного шара по поверхности незакрепленной динамически несимметричной сферической оболочки. В зависимости от размеров шара и оболочки и их взаимного положения возможны три различных варианта обката (рис. 1а–с).

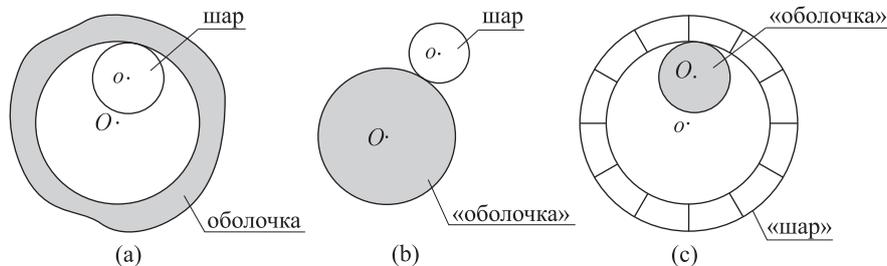


Рис. 1. Возможные варианты качения шара по поверхности оболочки. Динамически несимметричное тело — оболочка — здесь и далее обозначено серым цветом, динамически симметричное — шар — обозначается белым цветом либо штриховкой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из этих рисунков, названия *шар* и *оболочка* применимы лишь к случаю на рис. 1а; тем не менее, всюду в дальнейшем и для случаев, показанных на рис. 1б, с, мы будем использовать эти термины, понимая под оболочкой динамически несимметричное тело, а под шаром — динамически симметричное.

Как будет показано далее, все три варианта обката описываются одними и теми же уравнениями с точностью до смены знака некоторых величин. Для определенности, координаты и характеристики динамически несимметричной оболочки будем обозначать большими буквами, а координаты и характеристики однородного шара — маленькими. Рассмотрим подробнее вывод уравнений движения для случая (а) на рис. 1.

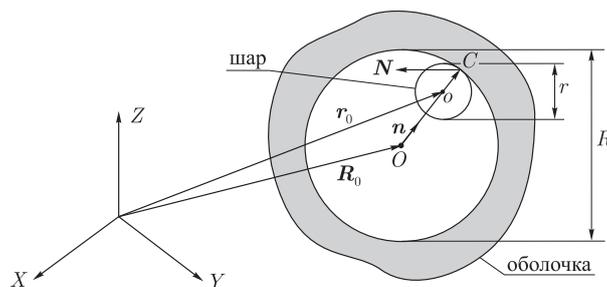


Рис. 2. Качение шара по оболочке.

Запишем законы изменения абсолютных (т. е. вычисленных относительно некоторой инерциальной системы координат, например, относительно системы центра масс) скоростей и угловых скоростей, предполагая, что все векторы проецируются на оси подвижной системы координат, жестко связанные с главными осями динамически несимметричной оболочки:

$$\begin{aligned} M(\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}) &= -\mathbf{N}, & \mathbf{I}\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{I}\mathbf{\Omega} &= -\mathbf{R}_c \times \mathbf{N}, \\ m(\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{N}, & i\dot{\boldsymbol{\omega}} + i\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r}_c \times \mathbf{N}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь $M, m, \mathbf{V}, \mathbf{v}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\omega}$ — массы, скорости и угловые скорости оболочки и шара, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции оболочки, i — момент инерции шара, \mathbf{N} — сила реакции, действующая на шар со стороны оболочки, а $\mathbf{R}_c = OC$ и $\mathbf{r}_c = oC$ — векторы из центров оболочки и шара в точку контакта (рис. 2).

К уравнениям (1.1) необходимо добавить условие непроскальзывания (т. е. равенство скоростей точки контакта для шара и оболочки)

$$\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}_c = \mathbf{v} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_c \tag{1.2}$$

и геометрическую связь

$$\mathbf{R}_c - \mathbf{r}_c = -(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0$ — радиус-векторы центров оболочки и шара в некоторой неподвижной системе координат (см. рис. 2). Векторы \mathbf{R}_c и \mathbf{r}_c можно записать через единичный вектор \mathbf{n} , направленный из центра оболочки в центр шара:

$$\mathbf{R}_c = R\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_c = r\mathbf{n}. \tag{1.4}$$

Продифференцируем связь (1.3) с учетом (1.4) и, спроектировав на подвижные оси координат, получим

$$\mathbf{V} - \mathbf{v} = -(R - r)(\dot{\mathbf{n}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}), \tag{1.5}$$

откуда с учетом (1.2) находим

$$\dot{\mathbf{n}} = -\frac{r}{R - r}\mathbf{n} \times (\mathbf{\Omega} - \mathbf{\omega}). \tag{1.6}$$

Исключив из уравнений (1.1) силу реакции \mathbf{N} и скорости \mathbf{v}, \mathbf{V} с помощью соотношений (1.2) и (1.6), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{I}\mathbf{\Omega} &= -R\mu\mathbf{n} \times \left((\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{R - r}\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \right), \\ i\dot{\mathbf{\omega}} + i\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\omega} &= r\mu\mathbf{n} \times \left((\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{R - r}\mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{n}) \right), \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{w} = R\mathbf{\Omega} - r\mathbf{\omega}$, $\mu = \frac{Mm}{M + m}$.

Введем теперь следующие переменные:

$$\mathcal{K} = \mathbf{I}\mathbf{\Omega} + \frac{R}{r}i\mathbf{\omega}, \quad \mathcal{M} = \mathbf{I}\mathbf{\Omega} + i\mathbf{\omega} + \mu(R - r)\mathbf{n} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{n}). \tag{1.8}$$

Вектор \mathcal{M} — полный момент импульса рассматриваемой системы относительно ее центра масс. Вектор \mathcal{K} задает некоторый «скрытый» момент, не имеющий ясной физической трактовки и указанный еще Чаплыгиным [19], который пытался придать ему механический смысл в родственной задаче о качении по плоскости динамически симметричного шара со сферической полостью, внутри которой катается еще один однородный шар. Используя (1.7), можно показать, что обе эти величины постоянны в неподвижной системе координат. Обратное преобразование от моментов \mathcal{M}, \mathcal{K} к угловым скоростям имеет вид

$$\begin{aligned} i\mathbf{\omega} &= \mathcal{L} + \frac{d}{i + d}\mathbf{n} \times (\alpha i\mathbf{\Omega} - \mathcal{L}) \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{\Omega} &= \mathbf{A}\mathcal{P} + \frac{(\mathbf{A}\mathbf{n}, \mathcal{P})}{1 - \tilde{D}(\mathbf{n}, \mathbf{A}\mathbf{n})}\tilde{D}\mathbf{A}\mathbf{n}, \end{aligned}$$



где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\mathcal{M} - \mathcal{K}}{(1 - \alpha)}, \quad \mathcal{N} = \frac{\alpha\mathcal{M} - \mathcal{K}}{(\alpha - 1)}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{N} + \frac{d\alpha}{i + d}\mathbf{n} \times (\mathcal{L} \times \mathbf{n}), \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{I} + \tilde{D})^{-1}, \quad \alpha = \frac{R}{r}, \quad d = mr^2, \quad \tilde{D} = \frac{id\alpha^2}{i + d}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Окончательно получим замкнутую систему девяти уравнений, описывающих эволюцию векторов \mathcal{M} , \mathcal{K} , \mathbf{n} в подвижной системе координат:

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \Omega, \quad \dot{\mathbf{n}} = -\frac{r}{R - r}\mathbf{n} \times (\Omega - \omega). \quad (1.10)$$

Для того чтобы по заданным решениям $\mathcal{K}(t)$, $\mathcal{M}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ системы (1.10) найти закон движения центров тел, необходимо эти уравнения дополнить соотношениями

$$\begin{cases} \mathbf{v} - \mathbf{V} = (R\Omega - r\omega) \times \mathbf{n}, \\ m\mathbf{v} + M\mathbf{V} = \mathbf{P}, \end{cases} \quad (1.11)$$

где \mathbf{P} — интеграл полного импульса системы (в системе центра масс $\mathbf{P} = 0$), и квадратурами, задающими движение подвижной системы координат, связанной с динамически несимметричной оболочкой,

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \Omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \Omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \Omega, \quad (1.12)$$

здесь α , β , γ — орты неподвижной системы координат, записанные в проекциях на оси подвижной системы координат.

Рассмотрим теперь оставшиеся два варианта обката шаров, представленные на рис. 1б, с. Единственным отличием этих случаев от рассмотренного выше является изменение соотношений (1.4) на следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c &= R\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_c = -r\mathbf{n} && \text{для случая (b),} \\ \mathbf{R}_c &= -R\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_c = -r\mathbf{n} && \text{для случая (c).} \end{aligned} \quad (1.13)$$

В приведенной системе (1.10) такая замена приводит к соответствующей смене знаков перед r и R . Заметим, что уравнения (1.10) инвариантны относительно замены $R \rightarrow -R$, $r \rightarrow -r$, следовательно, случай (с) описывается в точности уравнениями (1.10) и его отличие от случая (а) заключается в смене знака скоростей в квадратурах (1.11), а также в том, что в случае (а) $R > r$, а в случае (с) $R < r$. В случае (b) смена знака перед r эквивалентна рассмотрению отрицательных значений r . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Задача о качении без проскальзывания однородного шара (сферической оболочки) по динамически несимметричной сферической оболочке (шару) в невесомости описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \Omega, \quad \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{1 - \alpha}\mathbf{n} \times (\Omega - \omega), \\ \mathcal{K} &= \mathbf{I}\Omega + \alpha i\omega, \quad \mathcal{M} = \mathbf{I}\Omega + i\omega + d(\alpha - 1)\mathbf{n} \times ((\alpha\Omega - \omega) \times \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $d = \mu r^2$, $\alpha = \frac{R}{r}$, а различным вариантам обката соответствуют следующие значения параметров и уравнение связи с абсолютными скоростями:



- (a) $\alpha > 1, \mathbf{v} - \mathbf{V} = r(\alpha\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n};$
- (b) $\alpha < 0, \mathbf{v} - \mathbf{V} = -r(\alpha\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n};$
- (c) $0 < \alpha < 1, \mathbf{v} - \mathbf{V} = -r(\alpha\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n}.$

Уравнения (1.14) допускают пять первых интегралов движения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2 = \text{const}, \quad \mathcal{K}^2 = \text{const}, \quad (\mathcal{M}, \mathcal{K}) = \text{const}, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \\ E = \frac{1}{2(R-r)}(\mathcal{M}, \mathbf{w}) + \frac{r}{2(R-r)}(\mathcal{K}, \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \\ = \frac{1}{2(\alpha-1)}\left((\mathcal{K} - \mathcal{M}, \boldsymbol{\omega}) + (\alpha\mathcal{M} - \mathcal{K}, \boldsymbol{\Omega})\right) = \text{const} \end{aligned} \tag{1.15}$$

и обладают инвариантной мерой $\rho d\mathcal{M} d\mathcal{K} d\mathbf{n}$ с плотностью

$$\rho = \left(1 - \tilde{D}(\mathbf{n}, \mathbf{A}\mathbf{n})\right)^{1/2} = \left(1 - \left(\mathbf{n}, \left(\mathbf{E} + \frac{i+d}{id\alpha^2}\mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{n}\right)\right)^{1/2}. \tag{1.16}$$

Таким образом, в общем случае система (1.13) определяет поток, сохраняющий инвариантную меру на четырехмерном интегральном многообразии, задаваемом соотношениями (1.14). Обсудим возможные «механизмы» интегрируемости и методы интегрирования этой системы.

В наиболее часто используемом в неголономной механике методе Эйлера–Якоби или теории последнего множителя [3, 11, 24] для интегрируемости n -мерной системы требуется наличие $n - 2$ первых интегралов и инвариантной меры, при этом неособые траектории представляют собой (прямолинейные) обмотки *двумерных* торов. В данном случае для интегрируемости системы (1.13) «по Эйлеру–Якоби» не хватает еще двух первых интегралов, и в общем случае этот метод для рассматриваемой системы неприменим. Действительно, как показано в разделе 5.1, при $\alpha = 0$ уравнения (1.13) определяют интегрируемую гамильтонову систему с *тремя* степенями свободы, а ее неособые траектории являются обмотками *трехмерных* торов (т. е. в данном случае вместо двух дополнительных первых интегралов имеется лишь один интеграл и одно поле симметрий).

Проблема интегрируемости системы в зависимости от наличия различных тензорных инвариантов обсуждалась в работах В. В. Козлова [13, 33, 10]. Существует «наивный» критерий интегрируемости, согласно которому необходимо существование $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что тензорное поле является тензорным инвариантом («законом сохранения»), если его производная Ли вдоль векторного поля системы обращается в нуль. Примерами тензорных инвариантов являются первые интегралы, поля симметрий, инвариантная мера, пуассонова структура и т. д.

В заключение этого раздела укажем также дополнительные первые интегралы полной системы, включающей уравнения, описывающие движение центра масс (1.11) и эволюцию подвижных осей (1.12):

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}, \boldsymbol{\alpha}) = \text{const}, \quad (\mathcal{K}, \boldsymbol{\beta}) = \text{const}, \quad (\mathcal{K}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}, \\ (\mathcal{M}, \boldsymbol{\alpha}) = \text{const}, \quad (\mathcal{M}, \boldsymbol{\beta}) = \text{const}, \quad (\mathcal{M}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const}. \end{aligned}$$

Наличие этих интегралов существенно упрощает анализ задач управления подобными системами [14].



2. Обобщенная задача Рауса

Рассмотрим две задачи, получающиеся из рассмотренной выше путем закрепления центра либо оболочки, либо однородного шара (т. е. в первом случае закреплен центр динамически несимметричного тела, а во втором — симметричного). В обоих случаях подробно рассмотрим только один вариант обката (остальные получаются так же, как и в разделе 1). Рассматриваемые задачи являются естественным обобщением простейшей интегрируемой задачи о качении однородного шара по другому динамически симметричному шару с неподвижным центром, рассмотренной Раусом в своем учебнике [16].

2.1. Задача о качении однородного шара по динамически несимметричной сферической оболочке с закрепленным центром

Рассмотрим вариант обката, представленный на рис. 3, и воспользуемся теми же обозначениями, что и в предыдущем разделе. Запишем уравнения движения системы в проекциях на систему координат, жестко связанную с главными осями сферической оболочки:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} &= -\mathbf{R}_c \times \mathbf{N}, & i\dot{\boldsymbol{\omega}} + i\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r}_c \times \mathbf{N}, \\ m(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

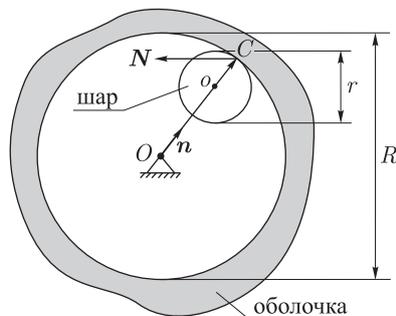


Рис. 3. Качение шара по сферической оболочке с неподвижным центром.

Выбрав начало координат неподвижной системы в центре оболочки, получим $\mathbf{R}_0 \equiv 0$. Условия непроскальзывания и геометрической связи в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_c &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c, & \mathbf{R}_c - \mathbf{r}_c &= \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{R}_c &= R\mathbf{n}, & \mathbf{r}_c &= r\mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так же, как и в разделе 1, исключив из уравнений (2.1) реакцию \mathbf{N} и скорость \mathbf{v} и введя переменные

$$\mathcal{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + \frac{R}{r}i\boldsymbol{\omega}, \quad \mathcal{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} + i\boldsymbol{\omega} + m(R-r)\mathbf{n} \times ((R\boldsymbol{\Omega} - r\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n}), \quad (2.3)$$

получим редуцированную систему уравнений

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -\frac{r}{R-r}\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}). \quad (2.4)$$

Вектор \mathcal{M} — полный момент импульса системы относительно неподвижного центра сферической оболочки. Уравнение, связывающее линейные и угловые скорости, принимает вид

$$\mathbf{v} = (R\boldsymbol{\Omega} - r\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Заметим, что система уравнений (2.3), (2.4) совпадает с системой (1.14) с точностью до замены $\mu \rightarrow m$; таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. *Задача о качении без проскальзывания однородного шара (сферической оболочки) массы m по динамически несимметричной сферической оболочке (шару) массы M в невесомости с точностью до дополнительных квадратур эквивалентна задаче о качении однородного шара приведенной массы $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ по сферической оболочке с закрепленным центром.*

Данное предложение можно рассматривать как некоторый аналог утверждения из небесной механики о том, что кеплеровская задача о движении двух тел сводится к задаче о движении одного тела в поле неподвижного притягивающего центра.



ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (2.4) можно получить также с помощью предельного перехода $M \rightarrow \infty$ в уравнениях (1.14) и последующего перехода в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью V .

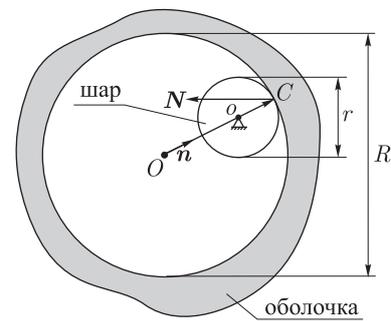
2.2. Задача о качении динамически несимметричной сферической оболочки по однородному шару с закрепленным центром

Выберем вариант обката, показанный на рис. 4, и, как и выше, воспользуемся обозначениями раздела 1. Уравнения движения в проекциях на оси системы координат, жестко связанной с подвижной оболочкой, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\Omega} + \Omega \times \mathbf{I}\Omega &= -\mathbf{R}_c \times \mathbf{N}, \quad i\omega + i\Omega \times \omega = \mathbf{r}_c \times \mathbf{N}, \\ M(\dot{V} + \Omega \times V) &= -\mathbf{N}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выберем начало координат неподвижной системы в центре шара $\mathbf{r}_0 \equiv 0$. Тогда условие непроскальзывания и геометрическая связь примут вид

$$\begin{aligned} V + \Omega \times \mathbf{R}_c &= \omega \times \mathbf{r}_c, \\ \mathbf{R}_c - \mathbf{r}_c &= -\mathbf{R}_0, \\ \mathbf{R}_c &= R\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_c = r\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{2.7}$$



По аналогии с предыдущими задачами введем переменные

$$\mathcal{K} = \mathbf{I}\Omega + \frac{R}{r}i\omega, \quad \mathcal{M} = \mathbf{I}\Omega + i\omega + M(R-r)\mathbf{n} \times ((R\Omega - r\omega) \times \mathbf{n}) \tag{2.8}$$

Рис. 4. Качение сферической оболочки по шару с неподвижным центром.

и запишем для них уравнения движения:

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \Omega, \quad \dot{\mathbf{n}} = -\frac{r}{R-r}\mathbf{n} \times (\Omega - \omega). \tag{2.9}$$

Вектор \mathcal{M} в данном случае — момент импульса системы относительно точки закрепления шара. Как видно из сравнения уравнений (2.3)–(2.4), (2.8)–(2.9) и (1.14), справедливо следующее

Предложение 2. Системы, описывающие

1. качение однородного шара массы m по динамически несимметричной сферической оболочке массы M в невесомости,
2. качение однородного шара массы $\mu = \frac{Mt}{M+t}$ по динамически несимметричной сферической оболочке с закрепленным центром,
3. качение динамически несимметричной сферической оболочки массы $\mu = \frac{Mt}{M+t}$ по однородному шару с закрепленным центром,

эквивалентны друг другу с точностью до дополнительных квадратур и описываются одной и той же приведенной системой уравнений (1.14).



3. Частные случаи движения

Рассмотрим теперь частные случаи движения (т. е. полагаем выполненными некоторые дополнительные ограничения на начальные условия), для которых система девяти уравнений (1.14) сводится к системе шести уравнений.

3.1. Случай $\mathcal{K} = \lambda\mathcal{M}$

Используя интегралы (1.15), можно провести редукцию уравнений (1.14) на две степени свободы, получив при этом систему пяти дифференциальных уравнений, обладающих интегралом энергии и инвариантной мерой. В общем случае система (1.14) не допускает никаких первых интегралов движения кроме (1.15). Однако существует ряд частных случаев, в которых можно провести дополнительную редукцию уравнений, а в некоторых случаях и доказать их интегрируемость.

Рассмотрим один из наиболее интересных частных случаев уравнений (1.14), когда векторы \mathcal{M} и \mathcal{K} параллельны, т. е. выполняется равенство

$$a\mathcal{M} + b\mathcal{K} = 0. \quad (3.1)$$

Это равенство задает инвариантное подмногообразие системы (1.14), а его инвариантность относительно уравнений движения следует из постоянства векторов \mathcal{M} и \mathcal{K} в неподвижной системе координат.

Будем считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$ (случаи $a = 0$ либо $b = 0$ подробно рассмотрены ниже), и запишем рассматриваемое многообразие в виде $\mathcal{K} = \lambda\mathcal{M}$. Уравнения движения на этом многообразии можно записать в виде

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{n} = kn \times (\Omega - c\mathbf{I}\Omega), \quad (3.2)$$

где

$$k = \frac{(\alpha - \lambda)i - d\lambda(\alpha - 1)^2}{(1 - \alpha)((\alpha - \lambda)i + d\lambda(\alpha - 1))}, \quad c = \frac{\lambda - 1}{(\alpha - \lambda)i - d\lambda(\alpha - 1)^2},$$

а момент \mathcal{M} связан с угловой скоростью Ω следующим соотношением:

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \lambda}\mathbf{I}\Omega + \frac{d(\alpha - 1)\alpha}{(\alpha - \lambda)i + d\lambda(\alpha - 1)}n \times \left(\left(i\alpha\Omega - \frac{\lambda - 1}{\alpha - \lambda}\mathbf{I}\Omega \right) \times n \right). \quad (3.3)$$

Первые интегралы системы (3.2) представляются в форме

$$n^2 = 1, \quad \mathcal{M}^2 = \text{const}, \quad E = \frac{1}{2(1 - \alpha)} \left(\frac{\lambda - 1}{i\alpha} (\lambda\mathcal{M}^2 - (\mathcal{M}, \mathbf{I}\Omega)) + (\alpha - \lambda)(\mathcal{M}, \Omega) \right), \quad (3.4)$$

а плотность инвариантной меры $\rho d\mathcal{M} dn$ задается соотношением (1.16).

Отметим один случай, когда эти уравнения выглядят наиболее просто. Пусть $\lambda = \alpha$, тогда уравнения движения и связь между угловыми скоростями и моментами принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{n} = \frac{1}{1 - \alpha} n \times \Omega, \\ \Omega &= \frac{d\alpha}{i + d} \mathbf{A} \left(\mathcal{M} - \frac{(\mathcal{M}, (1 - \tilde{D}\mathbf{A})n)}{(n, (1 - \tilde{D}\mathbf{A})n)} n \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где \mathbf{A} и \tilde{D} задаются формулами (1.9).



Численное построение сечения Пуанкаре систем (3.2) и (3.5) показывает, что в общем случае они являются неинтегрируемыми.

3.2. Случай $\mathcal{K} = 0$

Если в начальный момент мы положим $\mathcal{K} = 0$, то, вследствие постоянства вектора \mathcal{K} в неподвижных осях, это равенство будет выполнено во все моменты времени. В данном случае уравнения движения записываются в виде

$$\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{n} = \frac{1}{1-\alpha} n \times (\Omega - \omega), \quad (3.6)$$

а связь между вектором момента и угловыми скоростями задается соотношениями

$$\omega = -\frac{1}{\alpha i} \mathbf{I}\Omega, \quad \mathcal{M} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\mathbf{I}\Omega + Dn \times (\Omega \times n) + \frac{d}{i} n \times (\mathbf{I}\Omega \times n) \right). \quad (3.7)$$

Уравнения (3.6) допускают три первых интеграла движения

$$n = 1, \quad \mathcal{M} = \text{const}, \\ E = \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)} \left(\mathcal{M}, (i^{-1}\mathbf{I} + \alpha^2\mathbf{E})\Omega \right)$$

и меру $\rho d\mathcal{M} dn$ с плотностью (1.16).

Для интегрируемости этих уравнений не хватает одного дополнительного первого интеграла. Как показывает численное построение сечения Пуанкаре, в общем случае система (3.6) не является интегрируемой.

3.3. Случай $\mathcal{M} = 0$

По аналогии с предыдущим разделом положим $\mathcal{M} = 0$. В данном случае уравнения движения и связь моментов с угловыми скоростями задаются соотношениями

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \times \Omega, \quad \dot{n} = \frac{1}{1-\alpha} n \times (\Omega - \omega), \\ \omega = \frac{\mathcal{K}}{(\alpha-1)i} + \frac{d}{i+d} n \times \left(\left(\alpha\Omega - \frac{\mathcal{K}}{(\alpha-1)i} \right) \times n \right), \\ \Omega = \mathbf{A}\mathcal{P} + \frac{(\mathbf{A}n, \mathcal{P})}{1-\tilde{D}(n, \mathbf{A}n)} \tilde{D}\mathbf{A}n, \quad (3.8)$$

где введены значения

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{\alpha-1} \left(\mathcal{K} - \frac{d\alpha}{i+d} n \times (\mathcal{K} \times n) \right), \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + \tilde{D}\mathbf{E})^{-1}, \quad \tilde{D} = \frac{id}{i+d} \alpha^2. \quad (3.9)$$

Интегралы движения имеют вид

$$n^2 = 1, \quad \mathcal{K}^2 = \text{const}, \\ E = \frac{1}{2(\alpha-1)} (\mathcal{K}, \omega - \Omega),$$

имеется мера $\rho d\mathcal{K} dn$ с плотностью (1.16). Проведенные численные эксперименты показывают, что уравнения (3.8), как и в предыдущем случае, являются неинтегрируемыми.

4. Интегрируемые частные случаи

Приведем далее наиболее интересные с точки зрения интегрируемости частные случаи системы (3.2), т. е. на инвариантном многообразии $\mathcal{M} = \lambda\mathcal{K}$.

4.1. Осесимметричный случай

Рассмотрим осесимметричный случай уравнений (3.2) когда $I_2 = I_1$. Запишем производные по времени проекций момента $\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_n = (\mathcal{M}, \mathbf{n})$ и компоненты вектора нормали n_3

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}}_3 &= \frac{a_2\mathcal{M}_n - 2k\mu_2 n_3 \mathcal{M}_3}{1 + kn_3^2} \mathfrak{a} \mathcal{M}_\tau, & \dot{\mathcal{M}}_n &= \frac{a_1\mathcal{M}_3 - 2k\mu_1 n_3 \mathcal{M}_n}{1 + kn_3^2} \mathfrak{a} \mathcal{M}_\tau, \\ \dot{n}_3 &= \mathfrak{a} \mathcal{M}_\tau, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\mathcal{M}_\tau = (\mathcal{M}, \mathbf{n} \times \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} \frac{(\alpha - \lambda)i\alpha - (\lambda - 1)I_1}{(\alpha - 1)^2 d\lambda - (\alpha - \lambda)i + (\lambda - 1)I_1}, & \mu_2 &= \frac{1}{2} \frac{((\alpha - \lambda)i + (\alpha - 1)d\lambda)(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2 d\lambda - (\alpha - \lambda)i + (\lambda - 1)I_1}, \\ a_1 &= \frac{-((\alpha - \lambda)i + (\alpha - 1)d\lambda)kI_1}{((\alpha - 1)^2 d\lambda - (\alpha - \lambda)i + (\lambda - 1)I_1)d\alpha}, & a_2 &= \frac{-((\alpha - \lambda)i\alpha - (\lambda - 1)I_1)(\alpha - 1)d\alpha}{((\alpha - 1)^2 d\lambda - (\alpha - \lambda)i + (\lambda - 1)I_1)I_1}, \\ k &= \frac{(I_3 - I_1)id\alpha^2}{I_1(id\alpha^2 + (i + d)I_3)}, & \mathfrak{a} &= \frac{(\alpha - 1)^2 d\lambda - (\alpha - \lambda)i + (\lambda - 1)I_1}{(\alpha - 1)^2(id\alpha^2 + (i + d)I_1)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

причем коэффициенты a_1, a_2, μ_1, μ_2 и k связаны соотношениями

$$a_1 a_2 = -4k\mu_1\mu_2, \quad \mu_1 + \mu_2 = -\frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

Поделив первые два уравнения системы (4.1) на третье, получим замкнутую систему двух дифференциальных уравнений первого порядка с n_3 в качестве независимой переменной:

$$\mathcal{M}'_n = \frac{a_1\mathcal{M}_3 - 2k\mu_1 n_3 \mathcal{M}_n}{1 + kn_3^2}, \quad \mathcal{M}'_3 = \frac{a_2\mathcal{M}_n - 2k\mu_2 n_3 \mathcal{M}_3}{1 + kn_3^2}; \quad (4.4)$$

здесь штрих обозначает производную по n_3 . Систему (4.4) можно записать в виде одного уравнения второго порядка, например, относительно \mathcal{M}_n :

$$\mathcal{M}_n''(1 + kn_3^2) + kn_3\mathcal{M}'_n - 4k\mu_1^2\mathcal{M}_n = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) является уравнением гипергеометрического типа. В рассматриваемом случае его решение выражается в элементарных функциях:

$$\mathcal{M}_n = \begin{cases} C_1 \left(kn_3 + \sqrt{k(1 + kn_3^2)} \right)^{2\mu_1} + C_2 \left(kn_3 + \sqrt{k(1 + kn_3^2)} \right)^{-2\mu_1}, & k(1 + kn_3^2) > 0, \\ C_1 \sin \left(2\mu_1 \arcsin \left(\sqrt{-kn_3} \right) \right) + C_2 \cos \left(2\mu_1 \arcsin \left(\sqrt{-kn_3} \right) \right), & k(1 + kn_3^2) < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь C_1 и C_2 — константы интегрирования, являющиеся первыми интегралами движения исходной системы. Взяв производную по n_3 от выражения (4.6), вычислим зависимость C_1

и C_2 от \mathcal{M}_n и \mathcal{M}'_n :

$$\begin{aligned} C_1 &= (2k\mu_1\mathcal{M}_n - \sqrt{k(1+kn_3^2)}\mathcal{M}'_n) \left(kn_3 + \sqrt{k(1+kn_3^2)} \right)^{2\mu_1}, \\ C_2 &= (2k\mu_1\mathcal{M}_n + \sqrt{k(1+kn_3^2)}\mathcal{M}'_n) \left(kn_3 + \sqrt{k(1+kn_3^2)} \right)^{-2\mu_1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

при $k(1+kn_3^2) > 0$ и

$$\begin{aligned} C_1 &= \mathcal{M}_n \sin \varphi + \frac{\mathcal{M}'_n}{2\mu_1\sqrt{-k}} \sqrt{1+kn_3^2} \cos \varphi, \\ C_2 &= \mathcal{M}_n \cos \varphi - \frac{\mathcal{M}'_n}{2\mu_1\sqrt{-k}} \sqrt{1+kn_3^2} \sin \varphi, \\ \varphi &= 2\mu_1 \arcsin \left(\sqrt{-kn_3} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

при $k(1+kn_3^2) < 0$. Эти интегралы линейны по скоростям, но неалгебраичны по координатам. Интересно, что, несмотря на неалгебраичность, их произведение (при $k(1+kn_3^2) > 0$) или сумма квадратов (при $k(1+kn_3^2) < 0$) является алгебраическим интегралом второй степени по скоростям, который с точностью до постоянного множителя можно записать в виде

$$F = \mathcal{M}_n^2 - \frac{1+kn_3^2}{4k\mu_1^2} \mathcal{M}'_n{}^2 \quad (4.9)$$

или, выразив \mathcal{M}'_n через \mathcal{M}_3 ,

$$F = \mathcal{M}_n^2 - \frac{(a_1\mathcal{M}_3 - 2k\mu_1n_3\mathcal{M}_n)^2}{4k\mu_1^2(1+kn_3^2)}. \quad (4.10)$$

Отметим, что интеграл (4.10) линейно зависим с интегралами энергии и квадратом момента \mathcal{M}^2 . Таким образом, уравнения (3.2) в случае $I_2 = I_1$ допускают четыре независимых интеграла E , \mathbf{n}^2 , C_1 , C_2 и инвариантную меру и являются интегрируемыми по теореме Эйлера–Якоби [3, 11]. Ясно, что в принципиальном плане квадратуры могут быть получены явно, вследствие линейности интегралов, и изучение системы сводится к анализу одностепенной системы с некоторой гироскопической функцией (аналогично волчку Лагранжа или круговому диску [8]). Интересно было бы произвести качественный анализ движения указанной интегрированной системы.

4.2. Случай $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ ($\lambda = 1$)

В случае $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ уравнения движения совпадают с уравнениями, описывающими качение динамически несимметричного шара по поверхности неподвижной сферы

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \times \Omega, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \Omega, \\ \mathcal{M} &= \mathbf{I}\Omega - \tilde{D}\mathbf{n} \times (\Omega \times \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$k = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{d\alpha}{i+d} \right).$$

Уравнения (4.11) задают хорошо известную систему, описывающую качение шара Чаплыгина по сферической поверхности [8, 23]; отличие заключается в том, что в задаче о шаре

Чаплыгина k задает лишь отношение кривизн соприкасающихся поверхностей, в то время как в данном случае k зависит также от динамических характеристик тел (массы и момента инерции i). Отметим, что эта система играет важную роль при анализе возможных динамических эффектов, встречающихся в неголономной механике [3, 24, 25].

Система (4.11) при $k = 1$ задает известную интегрируемую задачу Чаплыгина о качении динамически несимметричного уравновешенного шара по горизонтальной плоскости. Помимо этого, как показано в [8] (см. также [23]), уравнения (4.11) допускают еще один случай интегрируемости при $k = -1$.

Предложение 3. Уравнения движения (1.14) допускают частный случай интегрируемости на инвариантном многообразии $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ при

$$k = \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{d\alpha}{i + d} \right) = \pm 1.$$

При $k = 1$ это соотношение приводит к равенству

$$\frac{d}{i + d} = \frac{\mu r^2}{i + \mu r^2} = 1,$$

которое может достигаться лишь при $r \rightarrow \infty$, т. е., как уже говорилось выше, динамически несимметричный уравновешенный шар радиуса R катится по плоскости.

При $k = -1$ находим

$$\alpha = \frac{R}{r} = 2 \left(1 + \frac{d}{i + d} \right)^{-1},$$

т. е. при этом $1 < \alpha < 2$, следовательно, реализуется вариант обката, соответствующий рис. 1а.

Интересно, что в отличие от случая, рассмотренного в [8], в данном случае условие $k = -1$ накладывает ограничение не только на взаимные размеры шаров, но и на их динамические характеристики.

5. Предельные и ограниченные задачи

Рассмотрим частные случаи уравнений (1.14). Все рассмотренные ниже частные случаи имеют три различных физических интерпретации (задача в невесомости и две задачи с закреплением центра одного из тел). Однако для краткости мы будем приводить лишь одну из них, которая наиболее наглядно, по нашему мнению, иллюстрирует рассматриваемый случай.

5.1. Случай $\alpha = 0$

Положим в уравнениях (1.14), что $\alpha = 0$, и введем следующие обозначения:

$$\mathbf{m} = \mathcal{K}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathcal{M} - \mathcal{K}}{i + d};$$

получим однородную квадратичную систему следующего вида:

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \mathbf{I}^{-1} \mathbf{m}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{I}^{-1} \mathbf{m}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{I}^{-1} \mathbf{m} - \boldsymbol{\gamma}). \quad (5.1)$$



Интегралы движения (1.15) также сохраняются для уравнений (5.1) и могут быть представлены в виде

$$\mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{m}^2 = \text{const}, \quad \gamma^2 = \text{const}, \quad (\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}) = \text{const},$$

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{m}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\gamma^2.$$

Данные уравнения описывают качение точки, сохранившей динамические характеристики (в том числе вращательные), по поверхности однородного шара, который вращается вокруг своего центра. С точки зрения моделей качения, описанных выше, система (5.1) носит достаточно формальный характер, так как физически невозможно реализовать бесконечно малый шар с конечными моментами инерции.

С точки зрения анализа проблемы интегрируемости общих уравнений (1.14), система (5.1) важна, так как она допускает дополнительный интеграл

$$(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}) = \text{const}$$

и представляется в гамильтоновой форме

$$\dot{m}_k = \{m_k, E\}, \quad \dot{\gamma}_k = \{\gamma_k, E\}, \quad \dot{n}_k = \{n_k, E\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где скобки Пуассона определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \{m_i, m_j\} &= -\varepsilon_{ijk}m_k, & \{m_i, \gamma_j\} &= -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, & \{m_i, n_j\} &= -\varepsilon_{ijk}n_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= -\varepsilon_{ijk}\gamma_k, & \{\gamma_i, n_j\} &= -\varepsilon_{ijk}n_k, & \{n_i, n_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Пуассонова структура (5.2) обладает тремя функциями Казимира

$$\mathcal{G}_1 = \mathbf{n}^2, \quad \mathcal{G}_2 = (\mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma})^2, \quad \mathcal{G}_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{n}). \quad (5.3)$$

После редукции на соответствующий симплектический лист получим гамильтонову систему с тремя степенями свободы, обладающую тремя интегралами движения в инволюции:

$$F_1 = E, \quad F_2 = \mathbf{m}^2, \quad F_3 = \gamma^2. \quad (5.4)$$

Таким образом, согласно теореме Лиувилля [1, 2, 6, 12], уравнения (5.1) являются интегрируемыми, при этом, вследствие компактности общей поверхности уровня первых интегралов, траектории (общего положения) являются обмотками *трехмерных* торов.

5.2. Случай $r = 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$, $d\alpha^2 = D = \text{const}$)

Рассмотрим предельный случай рассматриваемой задачи, когда радиус однородного шара стремится к нулю. Такой предельный переход так же, как и в предыдущем разделе статьи, носит формальный характер, однако интересен с точки зрения интегрируемости уравнений (1.14). В этом случае в уравнениях (1.14) необходимо сделать предельный переход $\alpha \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы величина $D = d\alpha^2$ и угловые скорости $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ оставались конечными. Положим

$$\gamma = \frac{\mathcal{K}}{\alpha}, \quad \mathbf{m} = \frac{\alpha\mathcal{M} - \mathcal{K}}{\alpha - 1}, \quad (5.5)$$

тогда после предельного перехода $\alpha \rightarrow \infty$ получим систему уравнений

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \mathbf{J}^{-1}\mathbf{m}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\mathbf{n}} = 0, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{I} + D(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$.

Как видно из уравнений (5.6), вектор \mathbf{n} является постоянным в системе координат, связанной со сферой. При этом уравнения для \mathbf{m} и γ представляют собой классические уравнения Эйлера–Пуансо (правда, записанные в проекциях не на главные оси инерции, так как матрица \mathbf{J} не диагональна).

Отметим, что исследуемый случай близок к задаче, рассмотренной в разделе 5.1. Кроме того, эти две задачи должны совпадать в случае шарового тензора инерции \mathbf{I} . Однако очевидно, что уравнения (5.6) и (5.1) не совпадают друг с другом при $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{E}$. Это связано с тем, что эти уравнения записаны в разных системах координат. Уравнения (5.1) записаны в системе, вращающейся вместе с материальной точкой, а уравнения (5.6) — в системе, связанной с вращающейся сферой. Идентичность данных уравнений можно показать, например, записав третье уравнение системы (5.1) в системе, связанной с вращающейся сферой. Для этого приведем очевидную связь производных вектора \mathbf{n} , спроецированного на различные оси координат:

$$\dot{\mathbf{n}}_{abs} = \dot{\mathbf{n}}_{\Omega} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{n}_{\Omega} = \dot{\mathbf{n}}_{\omega} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{n}_{\omega}; \quad (5.7)$$

здесь \mathbf{n}_{abs} — вектор \mathbf{n} , записанный в проекциях на неподвижную систему координат, \mathbf{n}_{Ω} — на оси, связанные с динамически несимметричной материальной точкой, а \mathbf{n}_{ω} — на оси, связанные с вращающейся сферой. Записав третье уравнение системы (5.1) в виде

$$\dot{\mathbf{n}}_{\Omega} = \mathbf{n}_{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} - \mathbf{\omega}) \quad (5.8)$$

и сравнив его с (5.7), получим

$$\dot{\mathbf{n}}_{\omega} = 0, \quad (5.9)$$

что совпадает с уравнением для вектора \mathbf{n} в системе (5.6).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что неподвижность «материальной точки» на сферической оболочке не противоречит полученным ранее результатам, связанным с «неголономным качением материальной точки» по различным поверхностям [4]. Действительно, в рассматриваемом нами предельном переходе при стремлении радиуса к нулю мы оставляем конечную угловую скорость вращения шара. В результате этого скорость шара относительно оболочки обращается в нуль. С другой стороны, в работе [4] стремление радиуса к нулю сопровождается бесконечным увеличением угловой скорости вращения шара таким образом, что линейная скорость материальной точки относительно поверхности остается конечной.

5.3. Качение однородного шара по независимо вращающейся динамически несимметричной оболочке

Выполним в уравнениях (1.14) предельный переход, при котором все три момента инерции I_1, I_2, I_3 стремятся к бесконечности, так что их отношения $I_1/I_3, I_2/I_3$ остаются конечны и, кроме того, остаются конечны и угловые скорости $\mathbf{\omega}, \mathbf{\Omega}$ и оставшиеся параметры i, d . Положим

$$I_1 = \mu \tilde{I}_1, \quad I_2 = \mu \tilde{I}_2, \quad I_3 = \mu \tilde{I}_3, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\mu} \mathbf{K}, \quad \gamma = \frac{\mathcal{M} - \mathcal{K}}{(1 - \alpha)(i + d(1 - \alpha))};$$

и, переходя к пределу $\mu \rightarrow \infty$, после некоторых упрощений получим систему

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \tilde{\mathbf{I}}^{-1} \mathbf{m}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \tilde{\mathbf{I}}^{-1} \mathbf{m}, \quad \dot{\mathbf{n}} = k \mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{I}}^{-1} \mathbf{m} - \gamma), \quad (5.10)$$

где $k = \frac{i + d(1 - \alpha)}{(i + d)(1 - \alpha)}$.



С физической точки зрения, система (5.10) описывает ограниченную задачу, для которой динамически несимметричная оболочка вращается вокруг неподвижной точки как свободное твердое тело (т. е. случай Эйлера–Пуассона в динамике твердого тела [5]), а катящийся по ней динамически симметричный шар не оказывает влияния на ее динамику.

Уравнения (5.10) обладают пятью первыми интегралами

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{m}^2 = \text{const}, \quad \gamma^2 = \text{const}, \quad (\mathbf{m}, \gamma) = \text{const}, \\ E = (\mathbf{m}, \tilde{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}) \end{aligned}$$

и инвариантной мерой $\rho_I d\mathbf{m} d\gamma d\mathbf{n}$ с постоянной плотностью.

При $k = 1$ получаем интегрируемую гамильтонову систему с тремя степенями свободы, описанную в разделе 5.1.

При $\gamma \equiv 0$ система (5.10) записывается в форме

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \tilde{\Gamma}^{-1} \mathbf{m}, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \tilde{\Gamma}^{-1} \mathbf{m} \tag{5.11}$$

и представляет собой предельный случай задачи о качении шара Чаплыгина по сфере, подробно описанный в [5]. Как показано в [5], система при целых нечетных k имеет алгебраический интеграл степени $|k|$ по переменным \mathbf{m} .

При $\mathbf{m} \equiv 0$ система (5.10) также допускает тривиальный случай интегрируемости.

5.4. Качение динамически несимметричной оболочки по постоянно вращающемуся шару

Если в уравнениях (1.14) выполнить предельный переход $i \rightarrow \infty$ так, что при этом остальные параметры \mathbf{I} , α , d и угловые скорости $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ остаются конечны, то, обозначив

$$\mathbf{m} = \frac{\alpha\mathcal{M} - \mathcal{K}}{\alpha - 1}, \quad \gamma = \boldsymbol{\omega} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K}}{i\alpha},$$

в пределе получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\Omega}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{1 - \alpha} \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\Omega} - \gamma), \\ \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{m} + d\alpha\mathbf{n} \times (\gamma \times \mathbf{n}) + \frac{(\mathbf{m} + d\alpha\mathbf{n} \times (\gamma \times \mathbf{n}), \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{\frac{1}{d\alpha^2} - (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{I} + d\alpha^2\mathbf{E}$.

С физической точки зрения этот случай может рассматриваться как ограниченная задача для системы, описанной в разделе 2.2, когда масса (и, соответственно, момент инерции i) динамически симметричного шара настолько велика, что на его движение не влияет качение по нему оболочки.

Система (5.12) также обладает пятью интегралами движения

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{m}^2 = \text{const}, \quad \gamma^2 = \text{const}, \quad (\mathbf{m}, \gamma) = \text{const}, \\ E = \frac{1}{2}((\mathbf{m}, \boldsymbol{\Omega}) + d(\mathbf{n} \times ((\alpha\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n}), \boldsymbol{\omega})) \end{aligned}$$

и инвариантной мерой $\rho_i d\mathbf{m} d\gamma d\mathbf{n}$ с плотностью

$$\rho_i = (\mathbf{n}, \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}).$$



Вследствие того, что вектор γ постоянный в неподвижной системе координат, можем положить $\gamma = 0$; при этом получаются уравнения уже описанной выше в разделе 4.2 системы Фёдорова (см. [23]):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} &= \mathbf{m} \times \boldsymbol{\Omega}, & \dot{\mathbf{n}} &= \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{m} + \frac{(\mathbf{m}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}{\frac{1}{d\alpha^2} - (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Эта система является интегрируемой при $\alpha = 2$, и в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$, $d\alpha^2 \rightarrow D = \text{const}$, при этом последний случай соответствует известной задаче Чаплыгина о катении шара по плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что при шаровом тензоре инерции $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{E}$ данный частный случай совпадает со случаем раздела 5.3 при $\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\lambda} \mathbf{E}$. Разница между этими случаями заключается лишь в том, что в разделе 5.3 уравнения записываются в неподвижной системе координат, а в рассматриваемом случае — в системе, связанной с катящимся шаром.

5.5. Переход к шаровому подвесу

Рассмотрим теперь предельный переход $M \rightarrow \infty$ для задачи раздела 2.2. В этом случае уравнение для \mathbf{V} системы (2.6) принимает вид

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (5.14)$$

откуда следует, что скорость \mathbf{V} является постоянной в неподвижной системе координат. Единственным значением \mathbf{V} , удовлетворяющим уравнению связи (2.7) при ненулевых угловых скоростях, является $\mathbf{V} \equiv 0$. Таким образом, уравнение движения в данном случае можно записать в виде

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{R}_c \times \mathbf{N}, \quad i(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{r}_c \times \mathbf{N}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (5.15)$$

Данные уравнения допускают первый интеграл движения

$$C = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = \text{const} \quad (5.16)$$

и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{K}} &= \mathcal{K} \times \boldsymbol{\Omega}, & \dot{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \mathcal{K} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \frac{R}{r} i\boldsymbol{\omega}, & \boldsymbol{\omega} &= \frac{R}{r} \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) + C\mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.17)$$

или, после замены $\mathcal{M} = \mathcal{K} - \frac{R}{r} iC\mathbf{n}$, в виде уравнений для шара Чаплыгина [17]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \times \boldsymbol{\Omega}, & \dot{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega}, \\ \mathcal{M} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \frac{R^2}{r^2} i\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

В заключение упомянем некоторые наиболее интересные нерешенные задачи. Во-первых, интересно было бы найти стационарные решения общей системы и исследовать их

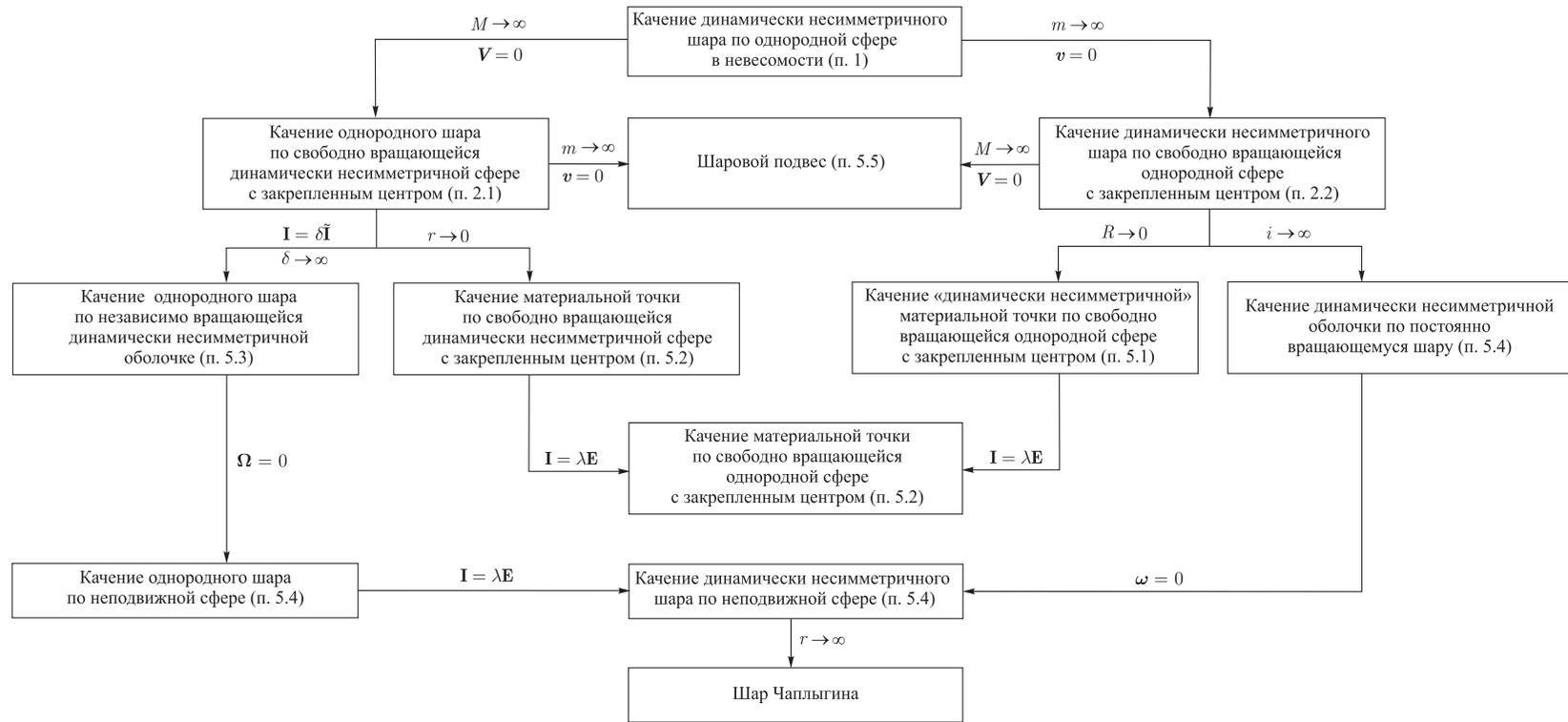


Рис. 5. Иерархия частных и предельных случаев задачи о качении динамически несимметричного шара по однородной сфере в невесомости.

устойчивость (возможно, это позволит прояснить вопрос о представимости системы в гамильтоновой форме). Можно также искать интегрируемые случаи рассматриваемой системы. Но наиболее интересна, в том числе с точки зрения возможных приложений, задача об исследовании движения в случае динамической симметрии (в частности, обобщение результатов, указанных нами для подмногообразия $\mathcal{M} = \lambda\mathcal{K}$ на общую систему).

Авторы выражают благодарность за полезные замечания и обсуждения Ю. Н. Фёдорову, М. Пржибыльской, А. Ю. Москвину.

Работа выполнена при поддержке Гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (код проекта 2009-1.5-503-004-019). Работа А. А. Килина выполнена при поддержке грант президента РФ поддержки молодых кандидатов наук МК-8428.2010.1

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [2] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. (Совр. пробл. матем. Фундаментальные направления. Т. 3.) М.: ВИНТИ, 1985, 304 с.
- [3] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854.
- [4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. К модели неголономного бильярда // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 373–385.
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2005. 576 с.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2003. 296 с.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, вып. 4, с. 475–478.
- [8] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1995, вып. 6, с. 102–105.
- [9] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Матем. заметки, 1988, т. 44, вып. 5, с. 604–618.
- [10] Козлов В. В. Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана // Интегральные инварианты / Э. Картан. М.: УРСС, 1998. С. 215–260.
- [11] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.
- [12] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. 429 с.
- [13] Козлов В. В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова // Матем. заметки, 1992, т. 51, вып. 2, с. 46–52.
- [14] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, т. 65, вып. 4, с. 529–601.



- [15] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // МТТ, 1986, т. 21, № 1. с. 64–65.
- [16] Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел: В 2-х тт. М.: Наука, 1983. 544 с. [Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies: 2 vols. New York: Dover, 1905.]
- [17] Фёдоров Ю. Н. О движении твердого тела в шаровом подвесе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1988, вып. 5, с. 91–93.
- [18] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 76–101.
- [19] Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 26–56.
- [20] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // J. Systems Control Engrg, 2003, vol. 217, no. 6, pp. 457–467.
- [21] Behar A., Matthews J., Carsey F., Jones J. NASA/JPL Tumbleweed Polar Rover // Proc. IEEE Aerospace Conference (Big Sky, MO, March 2004), pp. 1–8.
- [22] Bhattacharya S., Agrawal S. K. Design, experiments and motion planning of a spherical rolling robot // Proc. IEEE Intern. Conference on Robotics & Automation (San Francisco, CA, April 2000), pp. 1208–1212.
- [23] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.
- [24] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [25] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [26] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [27] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Dynamics of rolling disk // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 2, pp. 201–212.
- [28] Crossley V. A. A literature review on the design of spherical rolling robots. Pittsburgh, PA, 2006, 6 p.
- [29] Duistermaat J. J. Chaplygin's sphere // Chaplygin and the geometry of nonholonomically constrained systems / R. Cushman, J. J. Duistermaat, J. Sniatycki. Singapore: World Sci. Publ., 2010; arXiv:math/0409019
- [30] Fedorov Yu. N. Multidimensional integrable generalizations of the nonholonomic Chaplygin sphere problem, Report of Nov. 29, 2006, 13 p. <http://www.cirm.univ-mrs.fr/videos/2006/exposes/32/Fedorov.pdf>
- [31] Jovanović B. Hamiltonization and integrability of the Chaplygin sphere in \mathbb{R}^n // J. Nonlinear Sci., 2010, vol. 20, no. 5, pp. 569–593.
- [32] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [33] Kozlov V. V. Symmetries and regular behavior of Hamiltonian systems // Chaos, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 1–5.
- [34] Shen J., Schneider D. A., Bloch A. M. Controllability and motion planning of a multibody Chaplygin's sphere and Chaplygin's top // Int. J. Robust Nonlinear Control, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 905–945.