Критические замечания по поводу статьи А. В. Болсинова, А. В. Борисова, И. С. Мамаева, опубликованной в «Успехах математических наук»

А. Т. Фоменко
Механико-математический факультет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
fomenko@mech.math.msu.su

Недавно в УМН, 2010, том 65, выпуск 2(392), стр. 71–132, была опубликована большая статья А. В. Болсинова, А. В. Борисова, И. С. Мамаева «Топология и устойчивость интегрируемых систем».

Начну с сути дела. В работах А. Т. Фоменко и его научной школы была создана и развита теория топологической классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Эта теория носит качественный характер и позволяет легко доказывать многие факты, которые другими методами и теориями либо достигаются с трудом, либо вообще недоступны. Однако для некоторых специалистов из других областей восприятие теории Фоменко (и его коллег) затруднено используемым топологическим языком, а потому актуальна задача «перевода» некоторых важных результатов теории топологической классификации на язык теоретической механики и дифференциальных уравнений. Что и делается в работе А. В. Болсинова, А. В. Борисова, И. С. Мамаева, применительно к проблеме поиска устойчивых (и неустойчивых) замкнутых траекторий в задачах механики и физики.

Хотя в упомянутой статье ссылки на работы Фоменко и его школы формально представлены в списке литературы и вскользь упомянуты во Введении, однако характер и общий уровень ссылок не соответствует действительности. Например, из текста статьи неясно, что создателем теории, активно используемой в статье, является А. Т. Фоменко. Ни слова не сказано об «атомах»-бифуркациях и «молекулах»-инвариантах (даже эти термины не употреблены), хотя по сути они присутствуют на протяжении значительной части статьи. Эти понятия были введены А. Т. Фоменко и в течении многих лет обсуждались и использовались в работах многих математиков.

Далее. Во Введении к статье сказано: «Обобщая понятие бифуркационной диаграммы, МЫ (то есть авторы статьи — А. Ф.) ВВОДИМ НОВЫЙ ОБЪЕКТ — ТАК НАЗЫВАЕМЫЙ БИФУРКАЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС, который является простым, наглядным и естественным топологическим инвариантом интегрируемой системы. Его главное преимущество связано с упрощениями, которые достигаются при анализе и представлении результатов. . . Построение этого инварианта дает возможность не только ответить на вопрос об устойчивости...» (стр. 76). И так далее. В общем, инвариант действительно хороший. В статье А. В. Болсинова, А. В. Борисова, И. С. Мамаева этот важный инвариант вычисляется для нескольких интегрируемых систем и существенно помогает в их анализе. Определение инварианта, приведенное ими, таково: это двумерный комплекс, точками которого являются отдельные компоненты связности прообразов отображения момента $\Phi\colon \mathrm{M}^4 \to R^2$ (то есть двумерные торы Лиувилля и особые слои слоения Лиувилля). Очень важно, что в случае общего положения этот инвариант не зависит от выбора интегралов гамильтоновой системы. Обычные бифуркационные диаграммы (одномерные кривые) можно рассматривать как «проекции» особенностей этого двумерного комплекса на плоскость.

Однако этот инвариант (вместе с его указанным фундаментальным свойством не зависеть от выбора интегралов в типичном случае) родился отнюдь не в 2010 году, а значительно раньше, около 25 лет тому назад, — в 1986 году. Причем не только в двумерном, но и в многомерном случае. Инвариант был впервые обнаружен и опубликован А. Т. Фоменко в 1988 году в журнале «Функциональный анализ и его приложения», 1988, т. 22, вып. 4, с. 38–51. Здесь дано определение и описаны свойства двумерного инварианта-комплекса K^2 (см. стр. 50–51 этой статьи). Аналогичный многомерный инвариант K^n для интегрируемых систем уже с n степенями свободы был введен и подробнейшим образом обсуждался в статье А. Т. Фоменко, опубликованной в 1991 году «The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom)», Сборник «Advances in Soviet Mathematics», American Math. Soc., vol. 6, 1991, pp. 1–27. Детальное описание n-мерного инварианта-комплекса и его свойств помещено во второй половине этой статьи, на стр. 16–26, то есть занимает около десятка страниц. Отмечу, что в этом сборнике опубликованы работы учеников Фоменко, одним из которых является А. В. Болсинов.

Так вот, в двумерном случае инвариант, введенный Фоменко (в разных работах он обозначался по-разному — как K^n или C^n), — это и есть в точности тот самый «бифуркационный комплекс», который, по мнению Болсинова, Борисова и Мамаева, был впервые введен ими в 2010 (или, быть может, в 2009) году.

Причем этот инвариант Фоменко (обобщающий понятие «молекул» и «меченых молекул») регулярно обсуждался и использовался учениками Фоменко и его коллегами. Например, в 2009 году этот инвариант-комплекс был подсчитан в работе А. Ю. Москвина — аспиранта А. Т. Фоменко, для одной из интегрируемых систем.

Заключение. А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев начинают свою работу словами аннотации: «В работе предложен общий подход к исследованию устойчивости периодических решений интегрируемых динамических систем...». Это не соответствует действительности. На самом деле речь идет о применении известного метода А. Т. Фоменко, развитого его научной школой, для решения действительно интересных задач геометрии, механики, физики.

11 октября 2010 г.