



УДК: 517.9

MSC 2010: 37E30, 37Gxx, 37G25

Гомоклинический Ω -взрыв: интервалы гиперболичности и их границы

С. В. Гонченко, О. В. Стенькин

В работе Н. К. Гаврилова и Л. П. Шильникова [1] было установлено, что системы с гомоклиническими касаниями могут разделять системы Морса–Смейла и системы со сложной динамикой. При этом при пересечении такой границы счетное множество периодических траекторий возникает сразу — «взрывом». В работе Ньюхауса и Пэлиса [2] было показано, что в этом случае существует счетное множество интервалов значений параметра расщепления, отвечающих грубым (гиперболическим) системам. В настоящей работе мы показываем, что интервалы гиперболичности имеют естественные бифуркационные границы. Таким образом, явление гомоклинического Ω -взрыва в случае двумерных диффеоморфизмов получает в определенном смысле законченное описание.

Ключевые слова: гомоклиническое касание, гетероклинический контур, Ω -взрыв, гиперболическое множество

Введение

«Гомоклинический Ω -взрыв» — это, несомненно, то динамическое явление, которое всегда вызывает большой интерес у специалистов по нелинейной динамике. Суть его состоит в том, что до некоторого (бифуркационного) момента рассматриваемая система имеет простую динамику, а сразу после — уже сложную. Иначе говоря, при гомоклиническом

Получено 3 октября 2010 года
После доработки 2 февраля 2011 года

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор №11.G34.31.0039. Работа поддержана грантами РФФИ No.10-01-00429, No.08-01-00083 и РФФИ No.09-01-97016-р-поволжье, а также грантом “Global Bifurcations” (Royal Society).

Гонченко Сергей Владимирович
gov100@uic.nnov.ru
Стенькин Олег Вячеславович
ostenkin@mail.ru

НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ
603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 10

Ω -взрыве сама негрубая система принадлежит границе систем Морса–Смейла, а переход через эту границу носит взрывной характер — счетное множество периодических траекторий возникает сразу. Заметим, что такой сценарий развития хаоса встречается у многих конкретных систем.

Нужно заметить, что впервые глобальные бифуркации типа *гомоклического Ω -взрыва* были открыты и исследованы Л. П. Шильниковым. Так, в его работе [3] (см. также [4]) была изучена глобальная бифуркация системы, имеющей состояние равновесия типа седло–седло с несколькими гомоклическими петлями (наличие нескольких петель в случае седло–седло — это, в общем случае, бифуркационное явление коразмерности один). При этом было показано, что, в отличие от случая одной петли [5], при исчезновении в случае седло–седло у системы появляется замкнутое инвариантное множество со сложной структурой (кодируемое с помощью топологической схемы Бернулли из p символов, где p — это как раз число петель в случае седло–седло).

Собственно термин « Ω -взрыв» ввел Пэлис в заметке [6], в которой он, по существу, обосновал необходимость требования «условия отсутствия циклов» для Ω -грубости динамических систем, т. е. грубости (или структурной устойчивости) системы на множестве неблуждающих траекторий. На рис. 1а показан пример двумерного диффеоморфизма, который имеет такой «цикл» — негрубый гетероклический контур, содержащий седловые неподвижные точки O_1 и O_2 и гетероклические траектории, в точках одной из которых инвариантные многообразия $W^u(O_2)$ и $W^s(O_1)$ имеют квадратичное касание. Причем в данном примере множество неблуждающих траекторий (как и до момента касания) состоит лишь из конечного числа периодических (неподвижных) точек: седел, источников и стоков. Однако, как только касание расщепляется, неблуждающее множество становится бесконечным — в нем появится счетное множество периодических, гомоклических траекторий и т. п.

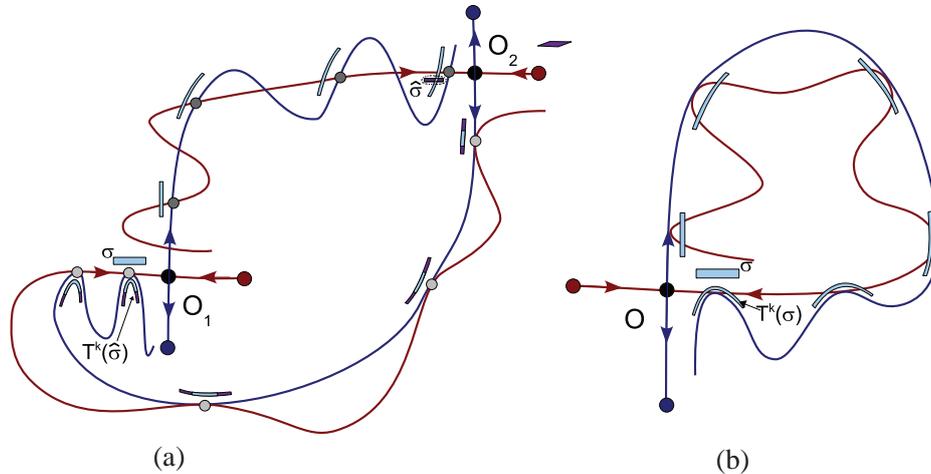


Рис. 1. Примеры двумерных диффеоморфизмов с (а) гетероклическим и (б) гомоклическим касаниями, принадлежащими границе между системами Морса–Смейла и системами с бесконечным множеством периодических траекторий.

На рис. 1б показана похожая ситуация, когда двумерный диффеоморфизм имеет квадратичное гомоклическое касание «снизу» (или, в терминологии [1], касание первого класса). Он также принадлежит границе систем Морса–Смейла. Однако выход на эту границу сопровождается тем, что неблуждающее множество становится негиперболическим, поскольку

ку к нему добавляется (одна) негрубая гомоклиническая траектория. При переходе через эту границу происходит та самая совокупность бифуркационных явлений, которая и называется *гомоклиническим Ω -взрывом*; для сравнения — в случае контура такого типа, как на рис. 1а, можно говорить о *гетероклиническом Ω -взрыве*. Сразу видно характерное различие между этими двумя случаями (которое, при желании, можно считать определением): в первом из них неблуждающее множество при выходе на бифуркационную границу не меняется (и остается гиперболическим), тогда как во втором (гомоклиническом) случае в нем появляется конечное число новых (негиперболических) траекторий. Очевидно, к этому же (гомоклиническому) случаю относятся шильниковские бифуркации в случае седло–седло с несколькими петлями.

В настоящей работе мы будем изучать динамические явления, возникающие именно при гомоклиническом Ω -взрыве в случае двумерных диффеоморфизмов. Первые результаты на эту тему были получены в работе Н. К. Гаврилова и Л. П. Шильникова [1], в которой было доказано существование достижимых переходов от систем Морса–Смейла к системам с гомоклиническими касаниями, было дано описание, на языке символической динамики, нетривиальных гиперболических подмножеств (в том числе и тех, которые рождаются в результате гомоклинического Ω -взрыва) и т. п. Аналогичные результаты для двумерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами были получены в работе Н. К. Гаврилова [7], см. также [8, 9]. Заметим, что в работе Ньюхауса и Пэлиса [2] был установлен один весьма интересный и наиболее популярный результат из теории гомоклинического Ω -взрыва — это *Теорема об Интервалах Гиперболичности* (см. теорема 1 ниже). Известны также некоторые ее обобщения, см., например, [10–13], а наиболее полный (многомерный) вариант этой теоремы был доказан в работе О. В. Стенькина и Л. П. Шильникова [14]. В настоящей работе мы даем некоторый обзор этих результатов — в § 1 и § 2, а также устанавливаем новые: о точных границах интервалов гиперболичности — в § 3.

1. О классификации двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями

Рассмотрим C^r -гладкий ($r \geq 3$) двумерный диффеоморфизм f , удовлетворяющий следующим условиям:

[А] f имеет седловую неподвижную точку O с мультипликаторами λ и γ , такими, что $0 < |\lambda| < 1$, $|\gamma| > 1$;

[В] *седловая величина* $\sigma \equiv |\lambda\gamma|$ меньше единицы;¹

[С] f имеет негрубую гомоклиническую траекторию Γ , в точках которой инвариантные устойчивое, $W^s(O)$, и неустойчивое, $W^u(O)$, многообразия неподвижной точки O имеют квадратичное касание (рис. 2а).

Диффеоморфизмы, C^r -близкие к f и имеющие негрубую гомоклиническую траекторию, близкую к Γ , образуют локально связную бифуркационную поверхность \mathcal{H} коразмерности один в пространстве C^r -гладких двумерных диффеоморфизмов, снабженном C^r -топологией.

Пусть U — некоторая достаточно малая и фиксированная окрестность множества $O \cup \Gamma$. Она может быть представлена в виде объединения малого диска U_0 , содержащего точку O ,

¹Случай $\sigma > 1$ сводится, очевидно, к рассматриваемому для обратного отображения f^{-1} . Таким образом, условие $\sigma < 1$ является здесь условием общего положения. Однако случай $\sigma = 1$ является особым и требует специального рассмотрения (см., например, [15, 16]).

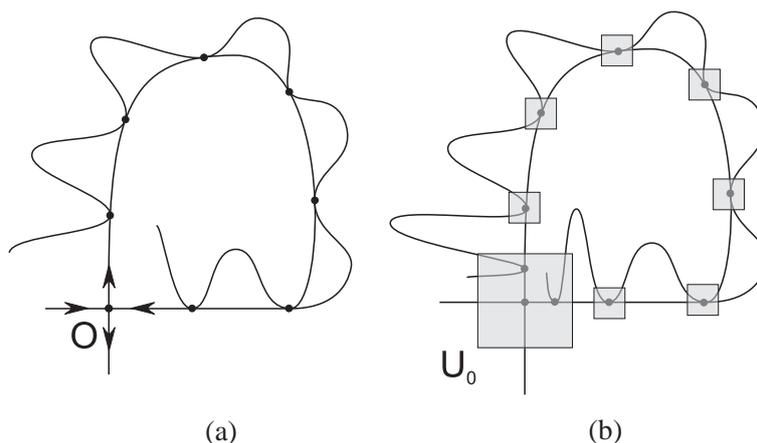


Рис. 2

и некоторого числа малых дисков, содержащих те точки траектории Γ , которые не попали в U_0 (см. рис. 2b). Обозначим через $N \equiv N(f)$ множество траекторий диффеоморфизма f , целиком лежащих в U .

Следуя [1], гомоклинические касания, удовлетворяющие условиям А)–С), разделим на три класса, в зависимости от структуры множества N . В случае касаний первого класса N имеет тривиальную структуру: $N = O \cup \Gamma$. Для касаний второго и третьего классов N содержит нетривиальные гиперболические подмножества. Однако в случае касаний второго класса множество N допускает полное описание и, более того, $N(f)$ не меняется при варьировании f внутри \mathcal{H} (т. е. когда гомоклиническое касание не расщепляется). В отличие от этого, диффеоморфизмы с гомоклиническими касаниями третьего класса являются Ω -негрубыми на \mathcal{H} .²

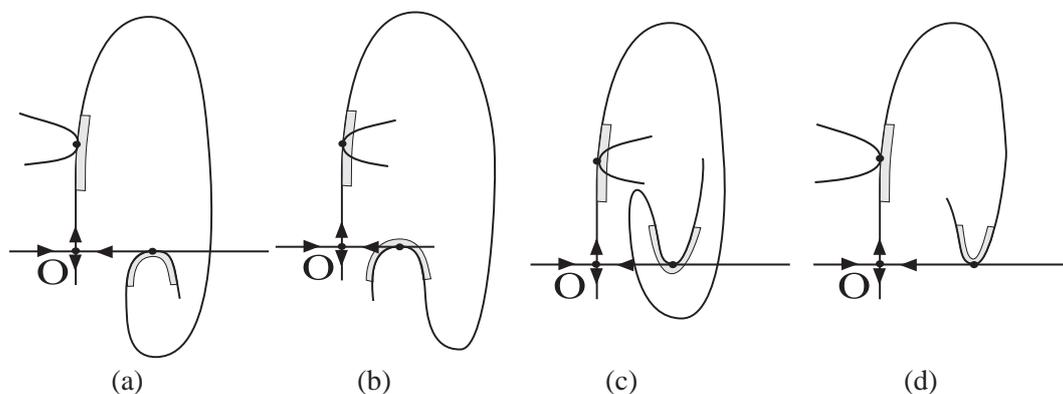


Рис. 3. Типы двумерных диффеоморфизмов с квадратичными гомоклиническими касаниями.

²Более того, они обладают здесь Ω -модулями, т. е. непрерывными инвариантами топологической эквивалентности на множестве неблуждающих траекторий. Это означает, что при любом изменении значения Ω -модуля в множестве $N(f)$ происходит бифуркация периодической, гомоклинической или т. п. траекторий. Как установлено в работе [17], основным Ω -модулем здесь является инвариант $\theta = -\ln|\lambda|/\ln|\gamma|$. Заметим, что величина θ была введена еще в работе [1], в которой она рассматривалась в качестве управляющего параметра при исследовании бифуркаций систем третьего класса на \mathcal{H} .

На рисунке 3 представлены 4 основных типа гомоклинических касаний у диффеоморфизмов плоскости в случае $\lambda > 0, \gamma > 0$. Первые два случая, 3а и 3б, соответствуют так называемым касаниям «снизу», которые являются к тому же касаниями *первого класса*. Третий и четвертый рисунки соответствуют гомоклиническим касаниям «сверху» и отвечают касаниям либо *второго класса* — рисунок 3с, либо *третьего класса* — рисунок 3д.

В настоящей работе мы будем иметь дело в основном с гомоклиническими касаниями первого класса. Однако, чтобы более точно описать качественные (геометрические) свойства таких систем, нам потребуются определенные сведения об их аналитических свойствах. Заметим, что основы качественной теории систем с гомоклиническими касаниями были заложены еще в работе Гаврилова и Шильникова [1]. В дальнейшем они были развиты в целом цикле работ по гомоклиническим касаниям, см., например, книгу [18]. Здесь мы приведем необходимые сведения, используя также весьма недавние результаты из [19].

1.1. Об аналитических свойствах диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями

Рассмотрим отображение $T_0 \equiv f|_{U_0}$, т.е. ограничение диффеоморфизма f на окрестность U_0 точки O , которое называется *локальным отображением*. Мы будем использовать на U_0 такие C^r -координаты (x, y) , в которых T_0 имеет вид

$$\bar{x} = \lambda(\mu)x + f(x, y, \mu)x^2y, \quad \bar{y} = \gamma(\mu)y + g(x, y, \mu)xy^2. \tag{1.1}$$

Существование таких координат доказано в [17], см. также [19].

В этих координатах $O = (0, 0)$, а многообразия $W_{loc}^s(O)$ и $W_{loc}^u(O)$ имеют уравнения $y = 0$ и $x = 0$ соответственно. Выберем на U_0 какую-либо пару точек траектории Γ — пусть это будут точки $M^+(x^+, 0) \in W_{loc}^s$ и $M^-(0, y^-) \in W_{loc}^u$. Не ограничивая общности, будем считать, что $x^+ > 0$ и $y^- > 0$. Пусть Π^+ и Π^- — некоторые достаточно малые (лежащие в U_0) окрестности точек M^+ и M^- , такие, что $T_0(\Pi^+) \cap \Pi^+ = \emptyset$ и $T_0^{-1}(\Pi^-) \cap \Pi^- = \emptyset$. Поскольку M^+ и M^- — точки одной и той же траектории Γ , то существует такое натуральное q , что $f^q(M^-) = M^+$. Рассмотрим так называемое *глобальное отображение* $T_1 \equiv f^q|_{\Pi^-} : \Pi^- \rightarrow \Pi^+$. В координатах (1.1) оно может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + O(x^2 + (y - y^-)^2), \\ \bar{y} &= cx + d(y - y^-)^2 + O(x^2 + |y - y^-|^3 + |x||y - y^-|). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Отметим также, что $bc \neq 0$, поскольку T_1 — диффеоморфизм, и $d \neq 0$, поскольку, по предположению, касание многообразий $T_1(W_{loc}^u)$ и W_{loc}^s в точке M^+ квадратично.

Теперь мы уже можем охарактеризовать гомоклинические касания рисунка 3 (при $\lambda > 0, \gamma > 0$) в терминах соответствующих коэффициентов: рисунок 3а отвечает комбинации $c < 0, d < 0$; рисунок 3б — $c > 0, d < 0$; рисунок 3с — $c < 0, d > 0$; и рисунок 3д — $c > 0, d > 0$.

Одним из главных достоинств нормальной формы (1.1) является то, что в данных координатах отображение T_0^k для всех достаточно больших k может быть представлено в виде, асимптотически близком к тому, которое дает линейное отображение $\tilde{T}_0: \bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \gamma y$. В линейном случае соотношение $(x_k, y_k) = \tilde{T}_0^k(x_0, y_0)$ записывается как $x_k = \lambda^k x_0, y_k = \gamma^k y_0$, или в эквивалентной, так называемой *перекрестной*, форме как $x_k = \lambda x_0, y_0 = \gamma^{-k} y_k$. Если же T_0 имеет вид (1.1), то соответствующая перекрестная форма для отображения $T_0^k: (x_0, y_0) \mapsto (x_k, y_k)$

$$x_k = \lambda^k x_0 + |\lambda|^k |\gamma|^{-k} \phi_{k1}(x_0, y_k), \quad y_0 = \gamma^{-k} y_k + |\gamma|^{-2k} \phi_{k2}(x_0, y_k) \tag{1.3}$$



будет асимптотически линейной в том смысле, что ϕ_{k1} и ϕ_{k2} — это некоторые функции, равномерно ограниченные по k вместе со всеми производными до порядка $(r - 2)$; также производные порядка $(r - 1)$ от x_k и y_0 являются величинами $O(\lambda^k)$ и $O(\gamma^{-k})$ соответственно, а порядка r — стремятся к 0 при $k \rightarrow \infty$ [19].

1.2. Полоски и подковы

Очевидно, любая траектория из множества N (кроме O) должна иметь точки пересечения с Π^+ и Π^- . Однако не для каждой точки из Π^+ какая-нибудь ее (положительная) итерация относительно $T_0 \equiv f|_{U_0}$ попадет в Π^- . Множество точек на Π^+ , итерации которых достигают Π^- , образуют счетное множество полосок $\sigma_k^0 \equiv \Pi^+ \cap T_0^{-k}\Pi^-$, накапливающихся к $W_{loc}^s \cap \Pi^+$ при $k \rightarrow \infty$. При этом образы полосок σ_k^0 относительно отображений T_0^k составляют в совокупности счетное множество полосок $\sigma_k^1 \equiv T_0^k(\sigma_k^0)$ на Π^- , накапливающихся при $k \rightarrow \infty$ к отрезку $W_{loc}^u \cap \Pi^-$. В свою очередь, из (1.2) получаем, что образы $T_1\sigma_k^1$ полосок σ_k^1 имеют вид подков, накапливающихся к «параболе» $T_1W_{loc}^u$ при $k \rightarrow \infty$ (см. рис. 4).

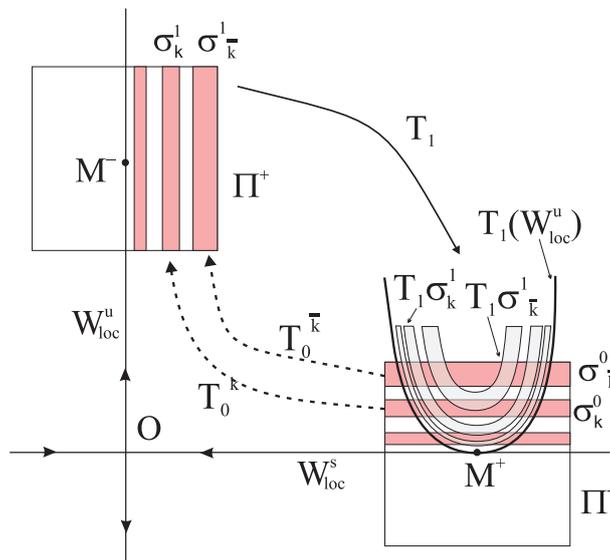


Рис. 4. Подковы и полоски.

Из построений ясно, что траектории из N должны иметь точки в Π^+ , принадлежащие пересечениям подков $T_1\sigma_i^1$ и полосок σ_j^0 для всевозможных $i, j \geq \bar{k}$, где \bar{k} — некоторое достаточно большое натуральное число.³ Поэтому структура самого множества N должна существенно зависеть от геометрических свойств этих пересечений. Различные типы пересечений показаны на рисунке 5а: подкова $T_1\sigma_i^1$ имеет правильное пересечение с полоской σ_j^0 , неправильное — с σ_k^0 и пустое — с σ_l^0 . Рисунок 5б является иллюстрацией для так называемого *правильного пересечения* полоски и подковы. В этом случае (см. [21]):

³Число \bar{k} выбирается, в принципе, в зависимости от размера окрестностей Π^+ и Π^- и соответствует минимальному номеру полосок σ_i^0 и σ_i^1 , целиком лежащих в этих окрестностях. Таким образом, полоски и подкова с номером \bar{k} — «крайние», они входят в границу так называемой «специальной окрестности» из U [9, 22] (так что, например, в Π^+ нет ни одной точки, итерации которой попадали бы в Π^- за меньшее, чем \bar{k} , число итераций).

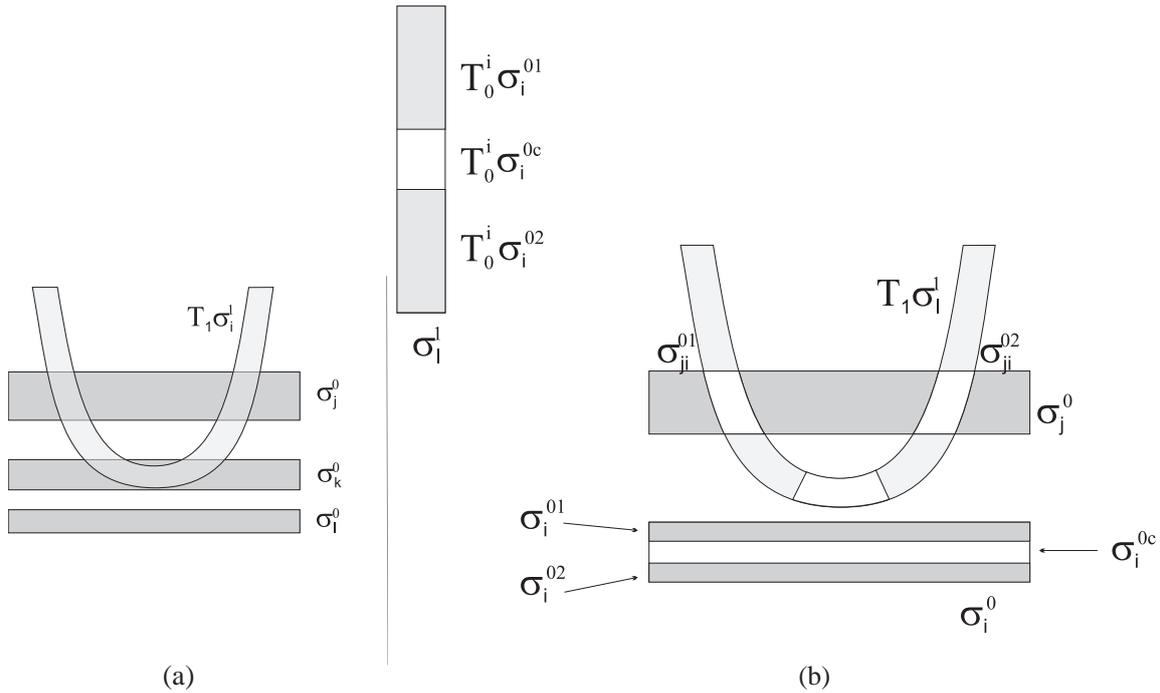


Рис. 5

1. множество $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0$ состоит из двух компонент связности: σ_{ji}^{01} и σ_{ji}^{02} ,
2. отображения $T_1T_0^i$, определенные на их соответствующих прообразах в σ_i^0 , являются седловыми (растягивают по y - и сжимают по x -координатам).

Отметим, что условия существования того или иного типа пересечения полосок и подков были установлены в [22] (см. также [15, 17]). Эти условия имеют вид сравнительно простых неравенств. Так, если выполнено неравенство

$$d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] > S_{\bar{k}}(i, j), \quad (1.4)$$

где $S_{\bar{k}}(i, j) = S_1(|\lambda|^i + |\gamma|^{-j})|\gamma|^{-\bar{k}/2}$, $i, j \geq \bar{k}$ и S_1 — некоторая положительная константа, не зависящая от i, j и \bar{k} , то пересечение подковы $T_1\sigma_i^1$ с полоской σ_j^0 будет правильным. С другой стороны, неравенство

$$d[\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+] < -S_{\bar{k}}(i, j) \quad (1.5)$$

гарантирует, что $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 = \emptyset$.

Тогда, используя только лишь неравенства (1.4) и (1.5), нетрудно понять, как устроено множество $N(f)$ в случаях диффеоморфизмов рисунка 3: здесь всегда $\lambda > 0$, $\gamma > 0$.

Так, в случаях 3а и 3б, отвечающих $d < 0$, множество $N(f)$ имеет тривиальную структуру. Действительно, если $c < 0, d < 0$, то всегда выполняется неравенство (1.5): здесь все подковы лежат ниже оси x (см. рис. 6а), а значит, их точки при положительных итерациях f покидают U . Если же $c > 0, d < 0$, то, поскольку $|\lambda\gamma| < 1$, из (1.5) вытекает, что если $T_1\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 \neq \emptyset$, то $j \gg i$ (см. рис. 6б). Это очевидно влечет, что $N = O \cup \Gamma$, но, в отличие от первого случая, у f могут существовать в U полутраектории, ω -предельные к Γ .

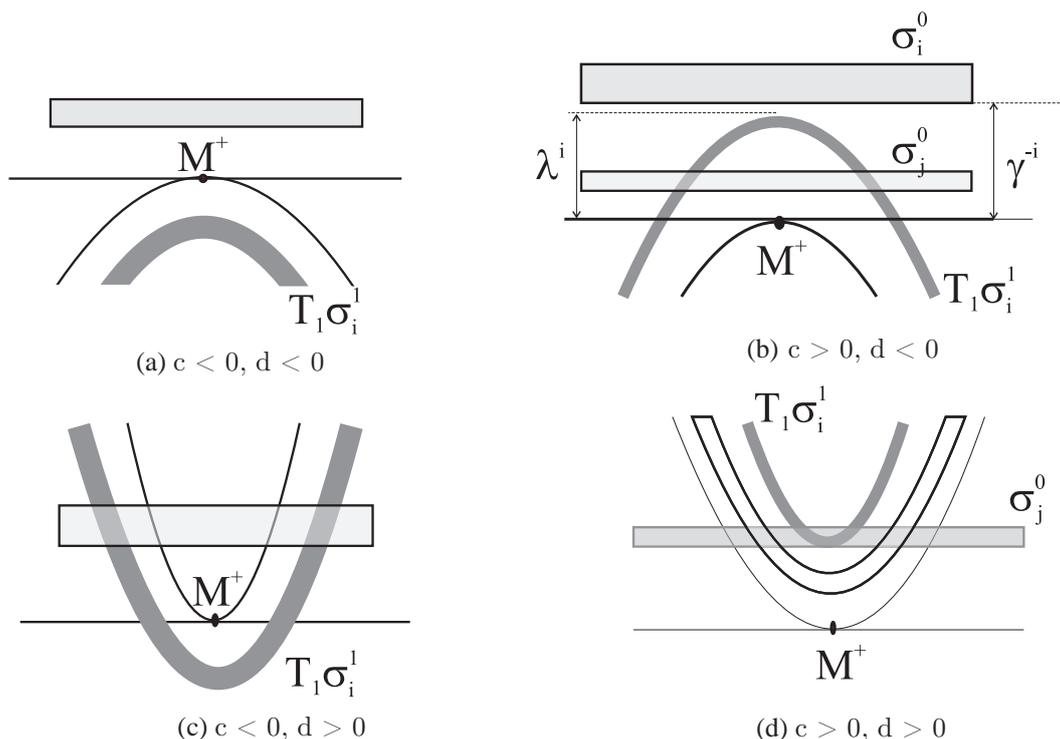


Рис. 6

Однако в случаях 3с и 3d, отвечающих $d > 0$, множество $N(f)$ имеет уже нетривиальную структуру. В частности, здесь неравенство (1.4) выполняется при всех достаточно больших $i = j$, и, следовательно, диффеоморфизм f в этом случае имеет счетное множество подков Смейла $\Omega_i, i = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$

В отличие от других гиперболических подмножеств, мы выделяем Ω_j как такое инвариантное множество, что его точки на полоске σ_j^0 инвариантны относительно отображения первого возвращения $T_j = T_1 T_0^j$, и система $T_j|_{\Omega_j}$ сопряжена с топологической схемой Бернулли из двух символов. Таким образом, Ω_j — это обычная подкова Смейла для отображения T_j .

Заметим также, что в случае гомоклинического касания второго класса, т. е. при $\lambda > 0, \gamma > 0, c < 0, d > 0$, неравенство (1.4) выполняется вообще при всех достаточно больших i и j . Это означает, что все полоски и подковы пересекаются правильно, а следовательно, все траектории в $N(f)$, кроме Γ , являются седловыми и множество $N(f)$ допускает полное описание в терминах символической динамики (см. [1]).

2. Гомоклинический Ω -взрыв — обзор результатов

Здесь мы предполагаем, что f удовлетворяет условиям [A]–[C], а также условию [D] Γ — гомоклиническая траектория первого класса.

Таким образом, для f выполнены соотношения $\gamma > 0, d < 0$. Тогда можно выделить три различных типа касаний первого класса, отвечающим таким комбинациям знаков коэффициентов λ и c : (i) $\lambda > 0, c > 0$, (ii) $\lambda > 0, c < 0$ и (iii) $\lambda < 0$ (здесь знак c не существен). Примеры соответствующих гомоклинических касаний в случае диффеоморфизмов плоско-



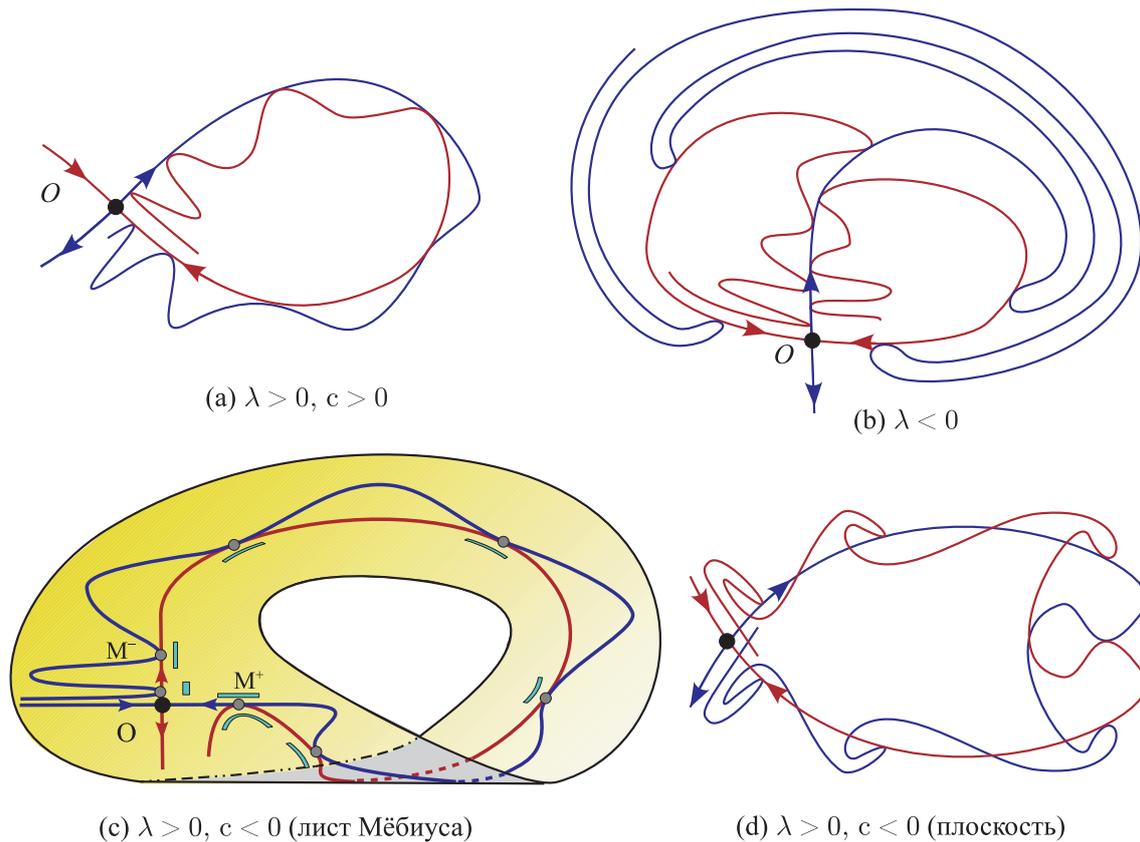


Рис. 7

сти с показаны на рис. 7а, b и d. Заметим, что диффеоморфизмы (плоскости) в случаях 7а ($\lambda > 0, c > 0$) и 7b ($\lambda < 0$) могут принадлежать границе систем Морса–Смейла. Однако случай 7d гомоклинического касания с $\lambda > 0, c < 0$ без других гомоклинических точек для диффеоморфизма плоскости невозможен, хотя вполне реализуем для диффеоморфизмов на неориентируемых многообразиях — см. рисунок 7с, где показан пример соответствующего диффеоморфизма на листе Мёбиуса.

Включим f в однопараметрическое семейство f_μ общего положения, такое, что

[E] $f_0 = f$ и семейство f_μ трансверсально при $\mu = 0$ к бифуркационной поверхности \mathcal{H}_1 диффеоморфизмов первого класса.

Заметим, что соответствующие локальное и глобальное отображения в случае диффеоморфизма f_μ также будут (гладко) зависеть от μ . Однако вид отображения $T_0 = T_{0\mu}$ не изменится — только во входящих в формулы (1.1) и (1.3) функциях появится (неявная) зависимость от μ , например, будет $\lambda = \lambda(\mu), \gamma = \gamma(\mu)$ и т. п. Глобальное же отображение $T_1 = T_{1\mu}$, в силу условия [E], может быть записано в таком виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + O(x^2 + (y - y^-)^2), \\ \bar{y} &= \mu + cx + d(y - y^-)^2 + O(x^2 + |y - y^-|^3 + |x||y - y^-|); \end{aligned} \tag{2.1}$$

при этом нужно считать, что в (2.1) коэффициенты a, b, c, d , а также x^+ и y^- , вообще говоря, зависят (гладко) от μ .

Уравнения локальных устойчивого и неустойчивого многообразий точки O_μ имеют по-прежнему вид $y = 0$ и $x = 0$. Однако глобальный кусок $T_{1\mu}(W_{loc}^u)$ неустойчивого многообразия точки O_μ имеет на Π^+ , в силу (2.1), уже такое уравнение

$$y = \mu + \frac{d}{b^2}(x - x^+)^2 + O((x - x^+)^3). \quad (2.2)$$

Отсюда видно, что параметр μ является, по существу, параметром расщепления инвариантных многообразий точки O_μ относительно гомоклинической точки M^+ .

Теперь можно, так же как и при гомоклиническом касании (при $\mu = 0$), вывести условия существования того или иного типа пересечения полосок и подков (как это сделано, например, в [1]). Для случая, когда f_0 — диффеоморфизм первого класса, такие условия были найдены в работе [14]:

(i) пусть $\mu > 0$, $i, j \geq k(\mu)$ и выполнено неравенство

$$\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+ - \mu < \delta_k (|\lambda|^i + \gamma^{-j}), \quad (2.3)$$

где $\delta_k = S_2\gamma^{-k/2}$, S_2 — некоторая положительная константа и $k(\mu) \sim -\ln \mu / \ln \gamma$ (или, иначе, $\mu \sim \gamma^{-k}$), тогда пересечение подковы $T_{1\mu}\sigma_i^1$ с полоской σ_j^0 будет правильным;⁴

(ii) неравенство

$$\gamma^{-j}y^- - c\lambda^i x^+ - \mu > -\delta_k (|\lambda|^i + \gamma^{-j}) \quad (2.4)$$

гарантирует, что $T_{1\mu}\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 = \emptyset$.

Достаточно очевидно, что структура множества N_μ (т. е. множества траекторий диффеоморфизма f_μ , целиком лежащих в U) при переходе μ через $\mu = 0$ будет претерпевать резкие изменения. При этом, если $\mu < 0$, множество N_μ будет состоять только из одной траектории: $N_\mu = O$. В этом случае многообразия $T_{1\mu}(W_{loc}^u)$ и W_{loc}^s не пересекаются — гомоклиническая траектория Γ исчезает, а подков как не было при $\mu = 0$, так и не будет при $\mu < 0$.

Совершенно другая ситуация будет при положительных μ . Здесь, поскольку $d < 0$, кривые $T_{1\mu}(W_{loc}^u)$ и W_{loc}^s будут трансверсально пересекаться в двух точках

$$M_\alpha^+ = \left(x^+ + (-1)^\alpha b \sqrt{-\frac{\mu}{d}} + O(\mu), 0 \right), \quad \alpha = 1, 2,$$

(см. формулу (2.2)), т. е. появляются две грубые гомоклинические траектории $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$, близкие к Γ . Соответственно, множество N_μ имеет уже нетривиальную структуру. Более того, в этом случае, как было замечено еще в [1], при переходе μ через $\mu = 0$, от отрицательных значений к положительным, сразу, взрывом, возникает счетное множество подков Смейла Ω_i , т. е. для всех целых $i \geq k_0(\mu)$, где $k_0(\mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow +0$, подковы $T_{1\mu}(\sigma_i^1)$ и полоски σ_i^0 пересекаются правильно.

⁴Заметим, что здесь минимальный номер полосок $k(\mu)$ выбран зависящим от μ (в частности, $k(\mu) \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow 0$). Это связано с тем, что если $i < k(\mu)$, то условие $T_{1\mu}\sigma_i^1 \cap \sigma_j^0 \neq \emptyset$ означает, что $j > i$. Поэтому в $N(f_\mu)$ нет траекторий, пересекающих полоски $\sigma_i^{0,1}$ с номерами $i < k(\mu)$, а значит, все такие полоски можно «выкинуть» из первоначальных окрестностей Π^+ и Π^- и рассматривать меньшие, так называемые «специальные» окрестности (подробнее см. в [14]).

Однако нужно заметить, что соответствующая *глобальная бифуркация*⁵ может иметь место только в случаях $c > 0$ — для таких диффеоморфизмов плоскости f_0 , как на рисунке 7а и б, и $c < 0$ — для таких диффеоморфизмов неориентируемого многообразия, как на рисунке 7с.

2.1. Интервалы гиперболичности

Рассмотрим подсистему B_3^n топологической схемы Бернулли из трех символов $\{0, 1, 2\}$, выделяемую следующими условиями:

- 1) в B_3^n нет траекторий, содержащих хотя бы два соседних ненулевых символа;
- 2) у траекторий из B_3^n длина любого полного отрезка из нулей не меньше, чем n .

Теорема 1 (теорема об интервалах гиперболичности) ([2, 14]). Пусть f_μ — однопараметрическое семейство двумерных диффеоморфизмов, удовлетворяющее условиям [A]–[E]. Тогда для любого $\mu_0 > 0$ существует счетная последовательность открытых (и непересекающихся) интервалов $\Delta_k \subset (0, \mu_0)$, такая, что все траектории из N_μ являются седловыми, и система $f_\mu|_{N_\mu}$ при $\mu \in \Delta_k$ топологически сопряжена с B_3^{k+q} .

Эта теорема была доказана еще в давней работе Ньюхауса и Пэлиса [2]; однако наиболее общий ее вариант был установлен в работе Стенькина и Шильникова [14], в которой, собственно, и показано, что *теорема об интервалах гиперболичности* справедлива для любого многомерного диффеоморфизма первого класса.

Для полноты изложения, мы приведем ниже подробную схему доказательства теоремы 1, опуская некоторые технические детали. При этом основное внимание будем уделять (двумерному ориентируемому) случаю $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$, $d < 0$.

Схема доказательства теоремы 1. Обозначим через $N_k(\mu)$ то подмножество из $N_\mu = N(f_\mu)$, которое содержит седло O_μ и те и только те траектории, которые пересекают Π^+ в точках, принадлежащих W_{loc}^s и полоскам σ_i^0 с $i \geq k$.

Пусть, для определенности, Π^+ и Π^- являются прямоугольными окрестностями гомоклинических точек $M^+(x^+, 0)$ и $M^-(0, y^-)$, такими, что

$$\Pi^+ = \{(x_0, y_0) \mid |x_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, |y_0| \leq \varepsilon_0\},$$

$$\Pi^- = \{(x_1, y_1) \mid |x_1| \leq \varepsilon_1, |y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1\},$$

для некоторых достаточно малых положительных $\varepsilon_{0,1}$. Тогда, в силу (1.3), полоски $\sigma_k^0 \subset \Pi^+$ и $\sigma_k^1 \subset \Pi^-$, $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$, будут задаваться следующими соотношениями:

$$\sigma_k^0 = \{(x_0, y_0) \mid |x_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, |y_0 - \gamma^{-k}y^-| \leq |\gamma^{-k}|(\varepsilon_1 + O(\gamma^{-k}))\},$$

$$\sigma_k^1 = \{(x_1, y_1) \mid |x_1 - \lambda^k x^+| \leq |\lambda^k|(\varepsilon_0 + O(\gamma^{-k})), |y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1\}.$$

⁵В случае $c < 0$, как можно увидеть из рисунка 7а, в момент соответствующего гомоклинического касания диффеоморфизма плоскости обязательно должны существовать другие гомоклинические траектории. Поэтому здесь имеет место так называемый *локальный Ω -взрыв* — резкое изменение структуры множества неблуждающих траекторий в некоторой окрестности фазового пространства. Хотя этот случай и вписывается в общую схему исследования гомоклинического Ω -взрыва, он менее интересен, и поэтому мы не акцентируем на нем внимания.

В случае $c > 0$ выберем $\mu > 0$ таким образом, что

$$\mu + c\lambda^k(x^+ + \varepsilon_0) < \gamma^{-k}(y^- - \varepsilon_1). \quad (2.5)$$

В этом случае, очевидно, подкова $T_{1\mu}\sigma_k^1$ лежит ниже своей полосы σ_k^0 и, соответственно, она может пересекать только лишь полосы σ_j^0 с номерами $j > k$, и, в свою очередь, подковы $T_{1\mu}\sigma_j^1$ также не пересекаются с полосой σ_k^0 (см. рис. 8а).

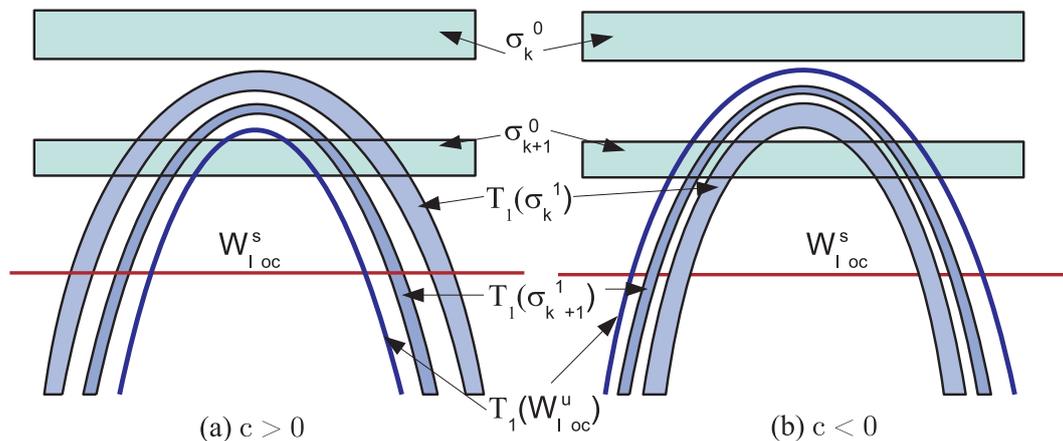


Рис. 8

Возьмем теперь μ таким, что выполнено неравенство

$$\mu > \gamma^{-(k+1)}(y^- + \varepsilon_1). \quad (2.6)$$

В этом случае парабола $T_{1\mu}(W_{loc}^u)$ пересекает все полосы σ_i^0 с номерами $i \geq k+1$. Кроме того, все подковы $T_1\sigma_j^1$ и полосы σ_i^0 с номерами $i, j \geq k+1$ также пересекаются. Причем, как показано в [14], все указанные пересечения являются правильными. Отсюда вытекает, что множество $N_{k+1}(\mu)$ при всех μ , удовлетворяющих (2.6), будет являться (равномерно) гиперболическим множеством, сопряженным с B_3^{k+q+1} .

С другой стороны, множество N_μ будет совпадать с $N_{k+1}(\mu)$, если μ удовлетворяет неравенству (2.5). Таким образом, получаем, что на интервале h_{k+1}

$$\gamma^{-(k+1)}(y^- + \varepsilon_1) < \mu < \gamma^{-k}(y^- - \varepsilon_1) - c\lambda^k(x^+ + \varepsilon_0)$$

значений параметра μ множество N_μ является гиперболическим, допускает полное описание и сопряжено с B_3^{k+q+1} (по построению, $h_{k+1} \subset \Delta_{k+1}$). Очевидно, при достаточно больших k интервал h_{k+1} не пуст. Действительно, его длина

$$\gamma^{-k}(y^- - \varepsilon_1) - c\lambda^k(x^+ + \varepsilon_0) - \gamma^{-(k+1)}(y^- + \varepsilon_1) = \gamma^{-k}[(y^- - \varepsilon_1)(1 - \gamma^{-1}) - c\lambda^k\gamma^k(x^+ + \varepsilon_0)]$$

будет величиной порядка γ^{-k} при больших k , поскольку $\gamma > 1$, $\lambda\gamma < 1$ и $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ — достаточно малы.

Случай $c < 0$ рассматривается, в принципиальном плане, аналогично. Хотя есть и определенные отличия. Так, верхняя граница интервала h_{k+1} определяется из соотношения



$T_{1\mu}(W_{loc}^u) \cap \sigma_k^0 = \emptyset$, а нижняя — из условия, что на полосках σ_i^0 с $i \geq k + 1$ «организуется гиперболическая динамика» (см. рис. 8b). Эти условия (типа неравенств (2.5) и (2.6)) запишутся как

$$\mu < \gamma^{-k}(y^- - \varepsilon_1) \text{ и } \mu - |c|\lambda^{k+1}(x^+ + \varepsilon_0) > \gamma^{-(k+1)}(y^- + \varepsilon_1) \tag{2.7}$$

соответственно. Опять легко видно, что интервал $h_{k+1} \subset \Delta_{k+1}$ не пуст при больших k и имеет длину порядка γ^{-k} . \square

2.1.1. Преобладание гиперболичности

В формулы (2.5)–(2.7) для границ интервалов гиперболичности входят ε_0 и ε_1 . Однако очевидно, что точные границы не должны зависеть от этих величин, и в работе [14] (за счет выбора так называемой специальной окрестности) были получены следующие формулы для границ интервалов $h_{k+1} = (\mu_{k+1}^1, \mu_{k+1}^2)$: в случае $c > 0$ —

$$\mu_{k+1}^1 = \gamma^{-(k+1)}y^-(1 + \dots), \quad \mu_{k+1}^2 = \gamma^{-k}y^-(1 - \frac{cx^+}{y^-}(\lambda\gamma)^k + \dots), \tag{2.8}$$

в случае $c < 0$ —

$$\mu_{k+1}^1 = \gamma^{-(k+1)}y^-(1 + \gamma \frac{|c|x^+}{y^-}(\lambda\gamma)^k + \dots), \quad \mu_{k+1}^2 = \gamma^{-k}y^-(1 + \dots), \tag{2.9}$$

где многоточиями обозначены члены порядка $o(|\lambda\gamma|^k)$.

Интервалы гиперболичности Δ_k попарно не пересекаются, и заметим, что, в совокупности, они занимают достаточно большую часть исходного интервала $(0, \mu)$. Этому утверждению можно придать более точный смысл.

Так, назовем *относительной мерой гиперболичности* следующую величину

$$\nu = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{m(\text{Нур})}{\mu},$$

где $\text{Нур} = \{\hat{\mu}: \hat{\mu} \in (0, \mu), f_{\hat{\mu}} \text{ — гиперболична}\}$ и m — лебегова мера. Из формул (2.8) и (2.9) вытекает, что длина интервала Δ_{k+1} равна $\gamma^{-k}(1 - \gamma^{-1})y^-(1 + \dots)$. Поэтому просуммировав длины всех интервалов гиперболичности, находим, что $m(\text{Нур}) \geq \gamma^{-k}y^-(1 + \dots)$ для $\mu \in (\mu_{k+1}^2, \mu_k^1)$. Откуда, в силу (2.8) и (2.9), получаем, что $\nu = 1$.

Этот результат из [11, 14], известный как *преобладание (prevalence) гиперболичности*, восходит, по существу, к работам Ньюхауса–Пэлиса–Такенса [2, 10], в которых, правда, оценивалась относительная мера негрубых систем.

3. Теорема о бифуркационных границах интервалов гиперболичности при глобальном Ω -взрыве

Формулы (2.8) и (2.9) дают много полезной информации о структуре и расположении интервалов гиперболичности. Однако они не решают вопрос о характере *точных* границ интервалов Δ_k . В частности, представляет несомненный интерес вопрос о том, какие бифуркации отвечают граничным точкам, т. е. ведут к разрушению или становлению гиперболических множеств.

Рассмотрим снова однопараметрическое семейство f_μ двумерных C^r -гладких ($r \geq 3$) диффеоморфизмов, удовлетворяющее условиям [A]–[E].

Основное внимание будем уделять тем случаям, когда при переходе через $\mu = 0$ осуществляется так называемый «глобальный» Ω -взрыв, т. е. мы предполагаем, что

[F] при $\mu = 0$ диффеоморфизм f_0 принадлежит границе систем Морса–Смейла.

Требую условие [F] (вместе с [A]–[D]), мы выделяем, по существу, следующие три основных случая (здесь всегда $\gamma > 0$, $d < 0$):

- 1) f_0 — диффеоморфизм плоскости с $\lambda > 0$, $c > 0$ (здесь также $bc < 0$, так как глобальное отображение T_1 — ориентируемо; пример — на рисунке 7а;
- 2) f_0 — диффеоморфизм неориентируемого многообразия и $\lambda > 0$, $c < 0$ (здесь $bc > 0$, поскольку T_1 — неориентируемое отображение); пример — на рисунке 7с;
- 3) $\lambda < 0$, $c > 0$; пример диффеоморфизма плоскости — на рисунке 7б.⁶

Как мы отмечали, главной особенностью касаний первого класса является то, что множество N_μ траекторий, целиком лежащих в достаточно малой окрестности $U(O \cup \Gamma)$, имеет тривиальную структуру при $\mu \leq 0$ (т. е. $N_\mu = O$ при $\mu < 0$ и $N_0 = O \cup \Gamma$ при $\mu = 0$) и содержит нетривиальные гиперболические подмножества при $\mu > 0$. В частности, N_μ содержит при $\mu > 0$ счетное множество подков Смейла Ω_j . В этом случае, пусть O_j^+ и O_j^- — их неподвижные точки, т. е. седловые неподвижные точки отображений T_j . Определим точку O_j^+ (и, соответственно, O_j^-) как ту, которая имеет положительный (отрицательный) неустойчивый мультипликатор.

Теорема 2 (о границах интервалов гиперболичности при глобальном Ω -взрыве). Пусть f_μ — однопараметрическое семейство C^r -гладких ($r \geq 3$) двумерных диффеоморфизмов, удовлетворяющее условиям [A]–[E] и [F], и пусть $\Delta_k = (\mu_k^*, \mu_k^{**})$ — интервал гиперболичности для достаточно большого k . Тогда значения $\mu = \mu_k^*$ и $\mu = \mu_k^{**}$ отвечают таким бифуркационным моментам, что в множестве N_μ появляется только один негрубый элемент следующего типа.

Случай 1. При $\mu = \mu_k^*$ возникает квадратичное гомоклиническое касание (второго класса) инвариантных многообразий $W^u(O)$ и $W^s(O)$ точки O (см. рис. 10а). Если $\lambda^2\gamma^3 < 1$, при $\mu = \mu_k^{**}$ возникает квадратичное гетероклиническое касание инвариантных многообразий $W^u(O_k^+)$ и $W^s(O)$ (см. рис. 10б). Если $\lambda^2\gamma^3 > 1$, при $\mu = \mu_k^{**}$ у отображения T_{k-1} появляется неподвижная точка \tilde{O}_{k-1} типа седло–узел.

Случай 2. Значения $\mu = \mu_k^*$ и $\mu = \mu_k^{**}$ отвечают появлению у f_μ квадратичного гомоклинического касания седла O_μ : при $\mu = \mu_k^*$ это касание второго класса («последнее» на полоске σ_k^0 , см. рис. 11а), а при $\mu = \mu_k^{**}$ — первого класса («первое» на полоске σ_{k-1}^0 , см. рис. 11б).

⁶Здесь мы полагаем, что с положительно — этого всегда можно добиться, выбрав подходящую пару гомоклинических точек. Действительно, возьмем вместо пары $M^+(x^+, 0)$ и $M^-(0, y^-)$ гомоклинических точек, например, такую: $M^{+'} = T_0(M^+)$ и $M^{-'} = T_0(M^-)$. Тогда легко убедиться, что у нового глобального отображения $T_1' = T_0T_1 : \Pi^- \rightarrow T_0(\Pi^+)$ будет $x^{+'} = -\lambda x^+$, $b' = b\lambda$, $c' = c\gamma$. Сделав замену координат $x \mapsto -x$, $y \mapsto y$, мы получим, что $x^{+'} = |\lambda|x^+$, $b' = -b\lambda$, $c' = -c\gamma$, т. е. «новое c » будет иметь другой знак, чем у «старого» (делая замену $x \mapsto -x$, мы соблюдаем наше соглашение о том, координаты x^+ и y^- выбранных гомоклинических точек должны быть положительными).

Случай 3. (i) Пусть $k = 2m$. Тогда инвариантные многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O_{2m}^+)$ имеют квадратичное касание: при $\mu = \mu_{2m}^*$ — «последнее» на полоске σ_{2m}^0 (см. рис. 12a); при $\mu = \mu_{2m}^{**}$ — «первое» на полоске σ_{2m-1}^0 (см. рис. 12b).

(ii) Пусть $k = 2m + 1$. Тогда при $\mu = \mu_{2m+1}^*$ многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O_{2m+2}^+)$ имеют квадратичное касание — «последнее» на полоске σ_{2m+1}^0 (см. рис. 13a). Если $\lambda^2\gamma^3 < 1$, то при $\mu = \mu_{2m+1}^{**}$ многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O_{2m+2}^+)$ имеют квадратичное касание — «первое» на полоске σ_{2m}^0 (см. рис. 13b). Если $\lambda^2\gamma^3 > 1$, то при $\mu = \mu_{2m+1}^{**}$ у отображения T_{2m} появляется седло–узел \tilde{O}_{2m} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно сказать, что момент $\mu = \mu_k^*$ отвечает последней бифуркации при становлении гиперболического множества $N_k = N(f_\mu)$. В случаях 2, 3(i), а также в случаях 1 и 3(ii) при $\lambda^2\gamma^3 < 1$, момент $\mu = \mu_k^{**}$ отвечает первой бифуркации, ведущей к разрушению гиперболичности (другими словами, μ_k^{**} — это кризисное бифуркационное значение для гиперболического множества $N(f_\mu)$). Однако в случаях 1 и 3(ii) при $\lambda^2\gamma^3 > 1$ ситуация явно другая. Здесь при $\mu = \mu_k^{**}$ рождается периодическая траектория типа седло–узел, лежащая в стороне от указанного гиперболического множества N_k , т. е. с этим множеством (здесь оно уже подмножество $N_k \subset N(f_\mu)$) ничего не происходит: оно существует еще некоторое время как базисное гиперболическое — вплоть до того самого момента, обозначим его как $\mu = \mu_k^{het}$, когда появляется первое гетероклиническое касание многообразий $W^u(O_k^+)$ и $W^s(O) \cap \sigma_{k-1}^0$ (см. рис. 10a). И здесь уже $\mu = \mu_k^{het}$ является кризисным значением для N_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\lambda^2\gamma^3 > 1$, то $\mu_k^{het} - \mu_k^{**} = \nu_k$, где $\nu_k > 0$ есть величина порядка λ^k (как вытекает из формул (3.4) и (3.5) ниже, $\nu_k = c\lambda^+(\lambda^{-1} - 1)\lambda^k + o(\lambda^k)$). С другой стороны, как известно (см., например, [21]), длина бифуркационного интервала $B_k = [\mu_k^{sn}, \mu_k^{sh}]$ для отображения первого возвращения $T_k(\mu)$ есть величина порядка γ^{-2k} . Здесь значение $\mu = \mu_k^{sn} = \mu_k^{**}$ отвечает моменту появления седло–узла у $T_k(\mu)$, а $\mu = \mu_k^{sh}$ соответствует последней (гомоклинической) бифуркации, после которой у $T_k(\mu)$ возникает подкова Ω_k . Поскольку $\lambda^k \gg \gamma^{-2k}$ (неравенство $\lambda\gamma^{3/2} > 1$ влечет, что и $\lambda\gamma^2 > 1$), то значение $\mu = \mu_k^{het}$ будет отвечать в этом случае бифуркационному моменту гетероклинического Ω -взрыва (в смысле Пэлиса [6]), т. е. при $\mu = \mu_k^{het}$ у f_μ существуют два гиперболических базисных множества N_k и Ω_{k-1} и «цикл», так как $W^u(N_k) \cap W^s(\Omega_k) \neq \emptyset$ при $\mu \geq \mu_k^{het}$ и $W^u(\Omega_k) \cap W^s(N_k) \neq \emptyset$ при $\mu \geq \mu_k^{**}$.⁷

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Граница $\mu = \mu_k^*$ является точной по модулю того, что мы не доказываем явно такой принципиально важный факт, что множество N_k при $\mu = \mu_k^*$ является неравномерно гиперболическим, т. е. все траектории в нем имеют седловой тип, кроме одной (гомоклинической в случаях 1 и 2 или гетероклинической в случае 3). Однако этот факт может быть доказан с использованием новой «техники конусов в неравномерно гиперболической ситуации», развитой, в частности, в работах [26, 27]. Причем в нашем случае ситуация кажется более простой, чем в указанных работах (где доказана точность соответствующих глобальных бифуркаций на границе диффеоморфизмов Аносова [26] и для отображения Эно [27]), поскольку из [1, 7] известно, что при $\mu = \mu_k^*$ неравномерная гиперболичность имеет место в некоторой малой окрестности точки касания (правда, размеры этой окрестности в нашем случае зависят от k).

3.1. Доказательство теоремы 2

Для упрощения обозначений, ниже мы будем иногда опускать зависимость от μ , т. е., например, писать T_0, T_1 и T_k вместо $T_{0\mu}, T_{1\mu}$ и $T_k(\mu)$ соответственно, и т. п.

⁷Таким образом, бифуркация при $\mu = \mu_k^{het}$ имеет всегда важное значение. Если $\lambda^2\gamma^3 < 1$, то при $\mu_k^{het} = \mu_k^{**}$ множество $N(f_\mu)$ начинает «мягко» портиться — в нем появляются небольшие фрагменты неблуждающих траекторий, имеющих точки на полоске σ_{k-1}^0 . Если же $\lambda^2\gamma^3 > 1$, то момент $\mu_k^{het} = \mu_k^{**}$ отвечает «жесткому» слиянию двух гиперболических базисных множеств N_k и Ω_{k-1} .

Случай 1: $\lambda > 0, \gamma > 0, d < 0, c > 0$.

Напомним сначала один факт из теории гиперболических множеств. Пусть Λ — инвариантное замкнутое транзитивное гиперболическое множество двумерного отображения. Седловая периодическая точка $P \in \Lambda$ называется *s-граничной*, если отрезок $W_{loc}^s(P)$ ее устойчивого многообразия делит любую достаточно малую окрестность $V(P)$ точки P на два открытых диска V_1 и V_2 (т.е. $V = V_1 \cup V_2 \cup (W_{loc}^s \cap V)$), таких, что $V_1 \cap \Lambda = \emptyset$ и $V_2 \cap \Lambda \neq \emptyset$. Аналогично, точку будем называть *u-граничной*, если такое разделение имеет место для W_{loc}^u . Точку, которая является одновременно *s-граничной* и *u-граничной*, будем называть *(s, u)-граничной*.⁸

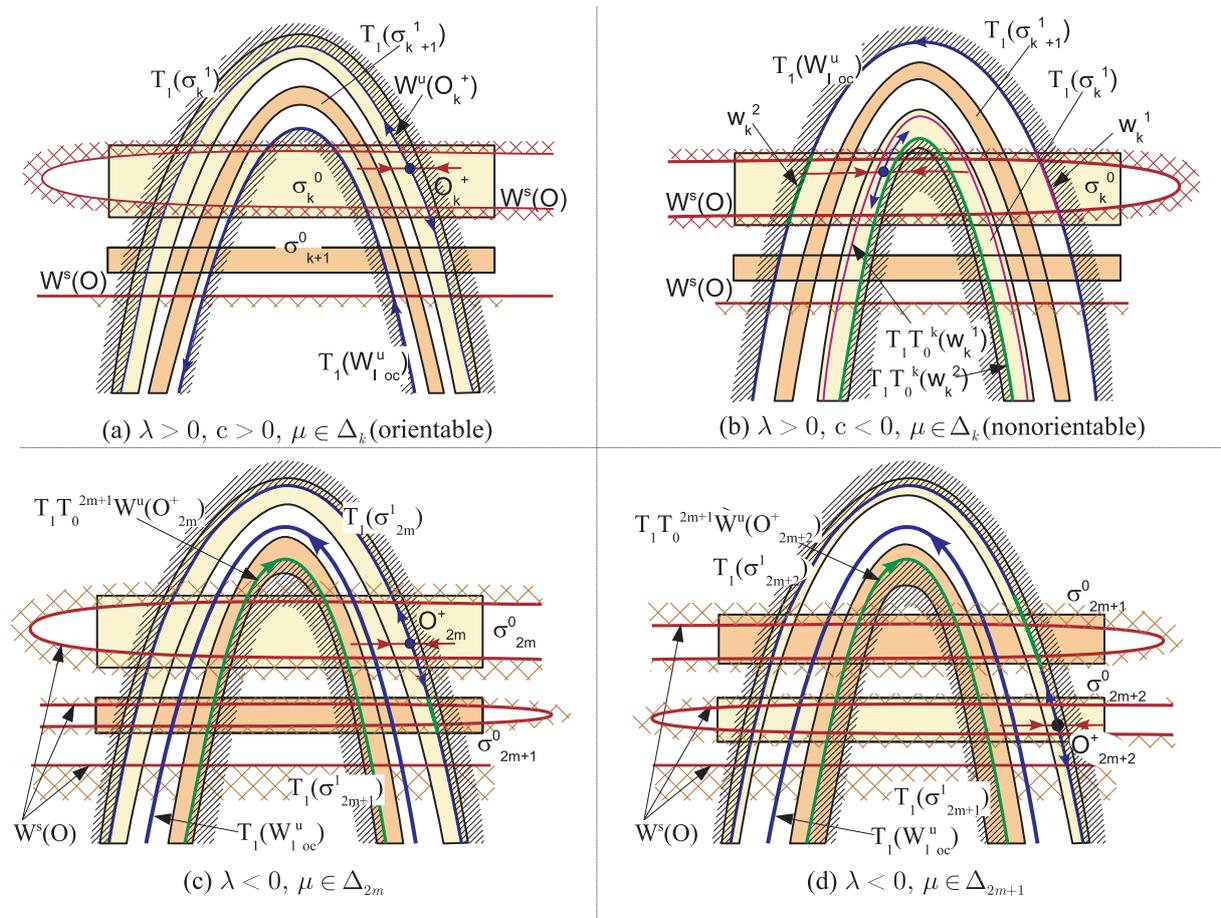


Рис. 9. При $\mu_k^* < \mu < \mu_k^{**}$ диффеоморфизм f_μ имеет гиперболическое множество N_μ , для которого многообразие $W^s(O)$ является граничным. Кроме того, в его границу входят: (а) $W^u(O)$ и $W^u(O_k^+)$ в случае $\lambda > 0, c > 0$; (б) $W^u(O)$ в случае $\lambda > 0, c < 0$; (с) и (д) в случае $\lambda < 0, c > 0$ либо $W^u(O_{2m}^+)$ при $\mu \in \Delta_{2m}$, либо $W^u(O_{2m+2}^+)$ при $\mu \in \Delta_{2m+1}$. На рисунке показано, что с одной стороны от этих многообразий, обозначенной штриховкой, нет точек гиперболического множества.

⁸Заметим, что понятие граничных периодических точек было введено в работе В. З. Гринеса [28], в которой было показано, что множества таких точек служат инвариантами топологической сопряженности транзитивных гиперболических множеств. Очевидно также, что инвариантные многообразия граничных точек играют важную роль при бифуркациях рождения и кризиса соответствующих гиперболических множеств.

Из геометрии подков и полосок в случае $\lambda > 0, c > 0$ нетрудно увидеть, что у гиперболического множества N_μ при $\mu \in \Delta_k$ граничными периодическими точками являются два седла O и O_k^+ . При этом точка O является (s, u) -граничной, а O_k^+ — u -граничной (см. рис. 9а).⁹ Это означает, что кризисы в самом гиперболическом множестве могут начинаться не иначе, как только через первичное появление нетрансверсальных пересечений многообразия $W^s(O)$ с $W^u(O)$ или $W^u(O_k^+)$ (если только в N_μ не появятся раньше какие-нибудь неседловые точки). Теперь появление гомоклинического касания второго класса при $\mu = \mu_k^*$ кажется вполне очевидным (см. рис. 10а). Действительно, кусок многообразия $T_1(W_{loc}^u) \cap \sigma_k^0$ является самым нижним из всех неустойчивых многообразий (точек из множества N_μ) и, соответственно, гомоклиническое касание (кривых $W_{loc}^s(O)$ и $T_1 T_0^k T_1(W_{loc}^u)$) будет последним на этапе развития гиперболического множества N_μ при $\mu \in \Delta_k$.

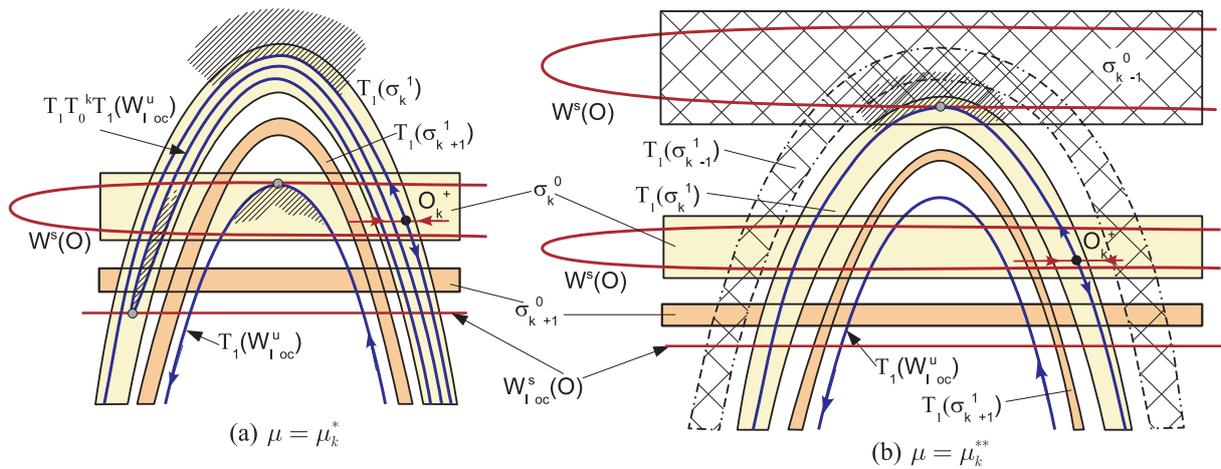


Рис. 10. Случай 1. На рисунке показано: (а) момент $\mu = \mu_k^*$, когда касаются кривые $W_{loc}^s(O)$ и $T_1 T_0^k T_1(W_{loc}^u)$; (б) момент $\mu = \mu_k^{**}$ при $\lambda \gamma^{3/2} < 1$, когда возникает гетероклиническое касание (первое на σ_{k-1}^0) между многообразиями $W^u(O_k^+)$ и $W^s(O) \cap \sigma_{k-1}^0$ — образовавшийся при этом гетероклинический контур имеет тот же тип, что и на рисунке 1а.

При увеличении μ вершина неустойчивого многообразия $W^u(O)$, и вместе с ней вершина подковы $T_1(\sigma_i^1)$, поднимаются вверх. И в этом случае просматриваются *a priori* два возможных варианта достижения границы $\mu = \mu_k^{**}$ интервала $\Delta_k(\mu)$. Первый из них связан с возникновением на полоске σ_{k-1}^0 квадратичного гетероклинического касания многообразий $W^u(O_k^+)$ и $W^s(O)$. Причем в этом случае образуется негрубый гетероклинический контур такого же типа, как на рисунке 1а, и переход через данное касание будет сопровождаться гетероклиническим Ω -взрывом, в результате которого появится бесконечно много неблуждающих траекторий с точками на σ_{k-1}^0 . Во втором варианте на полоске σ_{k-1}^0 при $\mu = \mu_k^{**}$ рождается седло-узловая однообходная периодическая траектория (т. е. у отображения первого возвращения $T_{k-1} = T_1 T_0^{k-1}$ появится неподвижная точка типа седло-узел). На рисунке 10б показан момент образования гетероклинического касания многообразий $W^u(O_k^+)$ и $W^s(O)$. Однако даже здесь не ясно, не развилась ли прежде динамика у отображения $T_{k-1} = T_1 T_0^{k-1}$, — во всяком случае, мы видим, что здесь $T_1(\sigma_{k-1}^1) \cap \sigma_{k-1}^0 \neq \emptyset$.

⁹Точка O_k^+ — это, как известно, (s, u) -граничная точка ориентируемой подковы Смейла Ω_k . Однако, как видно из геометрии гиперболического множества N_μ , многообразие $W^s(O_k^+)$ уже не является граничным в N_μ ; таким s -граничным многообразием здесь (и во всех случаях) является $W^s(O)$.

Таким образом, нужно выяснить, при каких условиях какой из указанных двух вариантов реализуется. Для этого оценим значения μ , при которых возникает касание $W^u(O_k)$ и $W^s(O)$, а затем те, при которых рождается седло–узел у T_{k-1} .

Пусть $y_1 = \varphi_1(x_1)$ и $y_0 = \varphi_0(x_0)$ — нижние следы устойчивого многообразия $W^s(O)$ на полосках σ_{k-1}^1 и σ_{k-1}^0 соответственно. Из (2.1) находим, что кривая $T_1^{-1}W^s(O)$ имеет на Π^- следующее уравнение:

$$x_1 = -\frac{d}{c}(y_1 - y^-)^2 - \frac{\mu}{c} + \dots \quad (3.1)$$

Так как $\gamma^{-k}y^-(1 + \dots) < \mu < \gamma^{-k-1}y^-(1 + \dots)$ при $\mu \in \Delta_k$ и $x_1 = O(\lambda^k)$ на полоске σ_{k-1}^1 , то из (3.1) получаем, что кривая $y_1 = \varphi_1(x_1)$ имеет уравнение

$$y_1 = y^- - \sqrt{\frac{\mu}{|d|}}(1 + \dots),$$

тогда из (1.3) выводим, что кривая $y_0 = \varphi_0(x_0)$ на σ_{k-1}^0 имеет такое уравнение:

$$y_0 = \gamma^{-k+1}y^- - \gamma^{-k+1}\sqrt{\frac{\mu}{|d|}}(1 + \dots). \quad (3.2)$$

Из (1.3) и (2.1) получаем такую оценку для ординаты вершины многообразия $W^u(O_k^+)$:

$$y_{\max} = \mu + cx^+\lambda^k(1 + \dots). \quad (3.3)$$

Обозначим через μ_{tan} то значение μ , при котором f_μ имеет негрубый гетероклинический контур, такой, как на рисунке 10b. Из (3.2)–(3.3) получаем, что

$$\mu_{tan} = \gamma^{-(k-1)}y^- - cx^+\lambda^k - \gamma^{-3(k-1)/2}\sqrt{\frac{y^-}{|d|}}(1 + \dots). \quad (3.4)$$

С другой стороны, седло–узел на полоске σ_{k-1}^0 появляется при

$$\mu_{k-1}^{+1} = \gamma^{-(k-1)}y^- - cx^+\lambda^{k-1} + \frac{1}{4d}\gamma^{-2(k-1)}(1 + \dots) \quad (3.5)$$

(см., например, [18, 21, 23]). Поскольку $\lambda < \gamma^{-1}$, то из (3.4)–(3.5) вытекает, что $\mu_{tan} > \mu_{k-1}^{+1}$ только лишь в том случае, когда $\lambda^k\gamma^{3k/2} > 1$, т. е. при $\lambda^2\gamma^3 > 1$.

Случай 2. Заметим, что в случае $\lambda > 0$, $c < 0$ кусок $T_1^{-1}(W_{loc}^s(O))$ устойчивого многообразия точки O при $\mu = 0$ не имеет точек пересечения ни с одной из полосок σ_i^1 для $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$. Однако при $\mu \in \Delta_k$ кусок $T_1^{-1}(W_{loc}^s(O))$ устойчивого многообразия будет пересекать каждую из полосок σ_i^1 для номеров $i = m(k), m(k) + 1, \dots$, где $m(k) \sim k \cdot (-\ln \lambda / \ln \gamma) \gg k$, по двум кривым вида

$$|x_1 - \lambda^i x^+| \leq \lambda^i \varepsilon_1, y_1 - y^- = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{|d|}}(1 + \dots). \quad (3.6)$$

Действительно, для кривой $T_1^{-1}W^s(O)$ на Π^- имеет место уравнение (3.1). Так как μ есть величина порядка γ^{-k} при $\mu \in \Delta_k$, то формула (3.6) будет иметь место для таких i , при которых $\lambda^i < \gamma^{-k}$; отсюда находим, что $i \geq m(k)$.



Заметим, что гиперболическое множество N_μ в случае $c < 0$ имеет единственную граничную точку O , которая является здесь (s, u) -граничной. Поэтому значения $\mu = \mu_k^*$ и $\mu = \mu_k^{**}$ должны отвечать гомоклиническим касаниям второго и первого класса (последнее — такого же типа, как и исходное) соответственно. На рисунке 11 изображены соответствующие бифуркационные моменты. В первом случае самый нижний на Π^+ кусок многообразия $W^u(O)$ касается самого верхнего следа $W^s(O) \cap \sigma_k^0$. Это, очевидно, гомоклиническое касание второго класса. Во втором случае, наоборот, самый верхний на Π^+ кусок многообразия $W^u(O)$ касается самого нижнего следа $W^s(O) \cap \sigma_{k-1}^0$. Это, очевидно, гомоклиническое касание первого класса.

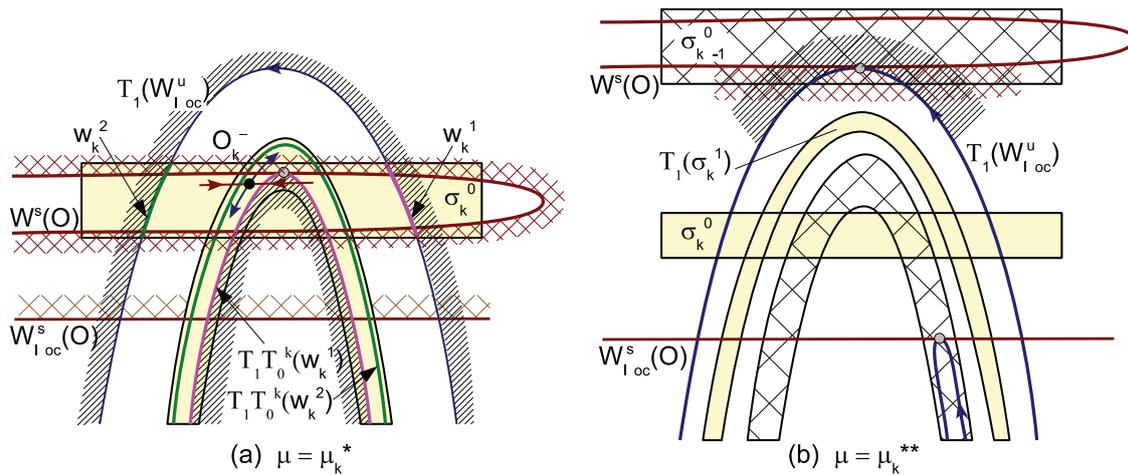


Рис. 11. Случай 2. (а) Показан момент $\mu = \mu_k^*$, когда возникает гомоклиническое касание (между кривыми $W^s(O) \cap \sigma_k^0$ и $T_1 T_0^k T_1(W_{loc}^u)$). Это касание второго класса, и после его прохождения множество N_μ становится гиперболическим. (б) Показан момент $\mu = \mu_k^{**}$, когда первый раз касаются кривые $T_1(W_{loc}^u)$ и $W^s(O) \cap \sigma_{k-1}^0$.

Случай 3. Поскольку здесь $\lambda < 0$, то точка O не может быть u -граничной, но она является s -граничной, так же как и во всех предыдущих случаях.

(i) Пусть $\mu \in \Delta_{2m}$. Из рисунка 9с видно, что u -граничной точкой для N_{2m} должна быть u -граничная точка подковы Смейла Ω_{2m} . Эта подкова ориентируемая (так как $bc < 0$, т.е. глобальное отображение T_1 — ориентируемое, и, следовательно, отображение первого возвращения $T_{2m} = T_1 T_0^{2m}$ также является ориентируемым). Поэтому седловая точка O_{2m}^+ (с положительными мультипликаторами) является u -граничной. Кроме того, связный кусок многообразия $W^u(O_{2m}^+)$ на $T_1(\sigma_{2m}^1)$, содержащий точку O_{2m}^+ , является самым верхним следом на Π^+ неустойчивых многообразий (точек из множества N_μ). Соответственно, самым нижним таким следом является одна из кривых $T_1 T_0^{2m+1}(W^u(O_{2m}^+))$ на подкове $T_1(\sigma_{2m+1}^1)$. При этом подкова $T_1(\sigma_{2m-1}^1)$ лежит «далеко ниже» своей полоски σ_{2m-1}^0 . Поэтому значения $\mu = \mu_k^*$ и $\mu = \mu_k^{**}$ должны отвечать гетероклиническим касаниям многообразий $W^u(O_{2m}^+)$ и $W^s(O)$ — «последнему» на σ_{2m}^0 и «первому» на σ_{2m-1}^0 соответственно (см. рис. 12).

(ii) Пусть $\mu \in \Delta_{2m+1}$. Из рисунка 9д видно, что u -граничной точкой для N_{2m+1} будет u -граничная точка подковы Смейла Ω_{2m+2} , т.е. точка O_{2m+2}^+ . Тогда многообразие $W^u(O_{2m+2}^+)$ формирует на подковах $T_1(\sigma_{2m+2}^1)$ и $T_1(\sigma_{2m+1}^1)$ самый верхний и, соответственно, самый нижний следы на Π^+ неустойчивых многообразий траекторий из N_μ . Однако

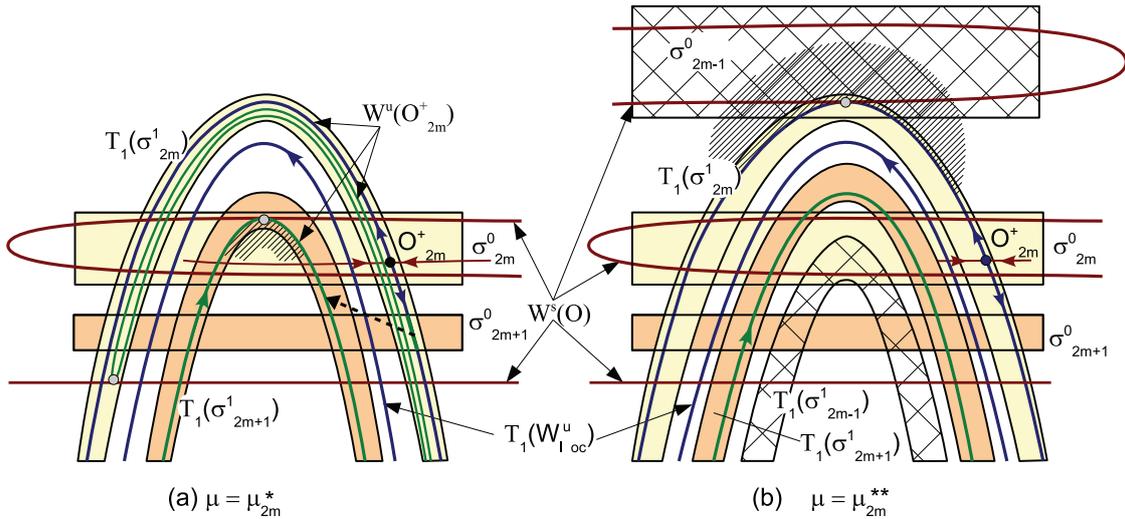


Рис. 12. Случай 3(i): (а) показан момент $\mu = \mu_{2m}^*$, когда возникает гетероклиническое касание (между кривыми $W^s(O) \cap \sigma_{2m}^0$ и $T_1 T_0^{2m-1} T_1(W^u(O_{2m}^+))$ — последнее на полоске σ_{2m}^0 ; (б) показан момент $\mu = \mu_{2m}^{**}$, когда первый раз касаются кривые $T_1(W^u(O_{2m}^+))$ и $W^s(O) \cap \sigma_{2m-1}^0$.

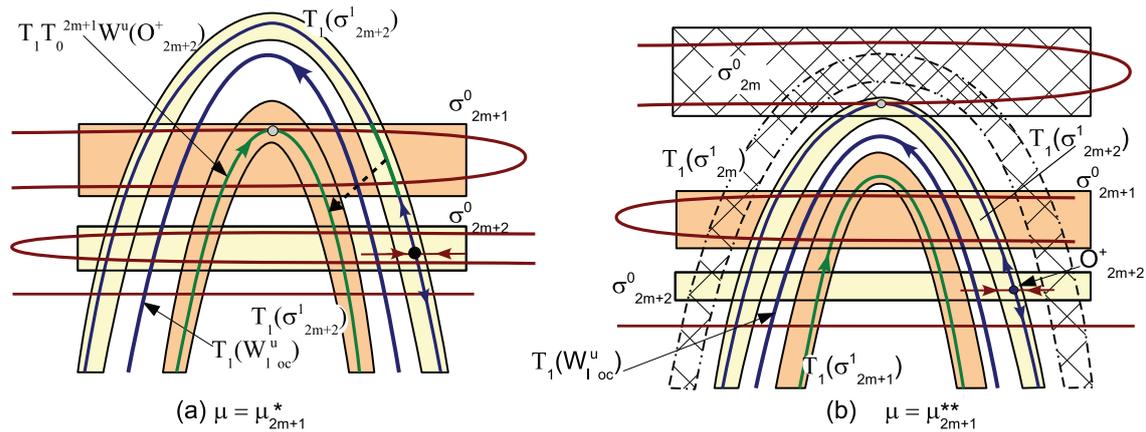


Рис. 13. Случай 3(ii): (а) показан момент $\mu = \mu_{2m+1}^*$, когда возникает гетероклиническое касание (между кривыми $W^s(O) \cap \sigma_{2m+1}^0$ и $T_1 T_0^{2m+2} T_1(W^u(O_{2m+2}^+))$ — последнее на полоске σ_{2m+1}^0 ; (б) показан момент $\mu = \mu_{2m+1}^{**}$, когда первый раз касаются кривые $T_1(W^u(O_{2m+2}^+))$ и $W^s(O) \cap \sigma_{2m}^0$.

подкова $T_1(\sigma_{2m}^1)$ может *a priori* пересекать свою полоску σ_{2m}^0 . Поэтому, как и в случае $\lambda > 0, c > 0$, при $\lambda^2 \gamma^3 > 1$ значение $\mu = \mu_{2m+1}^{**}$ отвечает моменту возникновения седлоузла \tilde{O}_{2m} на σ_{2m}^0 . Значение $\mu = \mu_{2m+1}^*$ отвечает гетероклиническому касанию многообразий $W^u(O_{2m+2}^+)$ и $W^s(O)$ — «последнему» на σ_{2m+1}^0 (см. рис. 13а). Если $\lambda^2 \gamma^3 < 1$, то значение $\mu = \mu_{2m+1}^{**}$ отвечает касанию многообразий $W^u(O_{2m+2}^+)$ и $W^s(O)$ — «первому» на σ_{2m}^0 (см. рис. 13б).

Это завершает доказательство. \square

В заключение, авторы благодарят Л. П. Шильникова и Д. В. Тураева за полезные обсуждения.



Список литературы

- [1] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой: I // Матем. сб., 1972, т. 88, № 4, с. 475–492;
Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой: II // Матем. сб., 1973, т. 90, № 1, с. 139–157.
- [2] Newhouse S., Palis J. Cycles and bifurcation theory // Trois études en dynamique qualitative. (Astérisque, vol. 31.) Paris: Soc. Math. France, 1976. P. 44–140.
- [3] Шильников Л. П. Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем // Докл. АН СССР, 1969, т. 182, № 1, с. 53–56.
- [4] Афраймович В. С., Шильников Л. П. О достижимых переходах от систем Морса–Смейла к системам со многими периодическими движениями // Изв. АН СССР, Сер. матем., 1974, т. 38, вып. 6, с. 1248–1288.
- [5] Шильников Л. П. О рождении периодических движений из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло–седло в него же // Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 1, с. 49–52.
- [6] Palis J. A note on Ω -stability // Global Analysis: Proc. Symp. in Pure Math. (Berkeley, Cal., 1968): Vol. 14. Providence, R.I.: AMS, 1970. P. 221–222.
- [7] Гаврилов Н. К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур // Матем. заметки, 1973, т. 14, № 5, с. 687–696.
- [8] Гонченко С. В. Модули Ω -сопряженности двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром // Матем. сб., 1996, т. 187, № 9, с. 3–24.
- [9] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Тр. МИАН, 1997, т. 216, с. 76–125.
- [10] Palis J., Takens F. Cycles and measure of bifurcation sets for two dimensional diffeomorphisms // Invent. Math., 1985, vol. 82, pp. 397–422.
- [11] Palis J., Takens F. Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbit // Ann. of Math. (2), 1987, vol. 125, pp. 337–374.
- [12] Palis J., Takens F. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: Fractal dimensions and infinitely many attractors. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 35.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. 234 p.
- [13] Alligood K., Sander E., Yorke J. Explosions: Global bifurcations at heteroclinic tangencies // Ergodic Theory Dynam. Systems, 2002, vol. 22, pp. 953–972.
- [14] Стенькин О. В., Шильников Л. П. Гомоклинический Ω -взрыв и области гиперболичности // Матем. сб., 1998, т. 189, № 4, с. 125–144.
- [15] Гонченко С. В., Шильников Л. П. Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической траекторией // Укр. матем. журн., 1987, т. 39, № 1, с. 21–28.
- [16] Гонченко С. В., Гонченко В. С. О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // Тр. МИАН, 2004, т. 244, с. 87–114.
- [17] Гонченко С. В., Шильников Л. П. Об инвариантах Ω -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // Укр. матем. журн., 1990, т. 42, № 2, с. 153–159.
- [18] Гомоклинические касания: Сб. ст. / С. В. Гонченко, Л. П. Шильников. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 524 с.
- [19] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions: I // Nonlinearity, 2008, vol. 21, pp. 923–972.
- [20] Гонченко С. В., Шильников Л. П. О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Изв. РАН, Сер. матем., 1992, т. 56, вып. 6, с. 1165–1197.
- [21] Gonchenko S. V., Sten'kin O. V., Turaev D. V. Complexity of homoclinic bifurcations and Ω -moduli // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1996, vol. 6, no. 6, pp. 969–989.



- [22] Гонченко С. В. Нетривиальные гиперболические подмножества систем с негрубой гомоклинической кривой // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1984. С. 89–102.
- [23] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 1999, т. 67, с. 69–128.
- [24] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб., 1967, т. 74(116), с. 378–397.
- [25] Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: In 2 vols. Singapore: World Sci., 1998; 2001. 957 p.
- [26] Enrich H. A heteroclinic bifurcation of Anosov diffeomorphisms // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1998, vol. 18, pp. 567–608.
- [27] Hoensch U. A. Some hyperbolic results for Hénon-like diffeomorphisms // Nonlinearity, 2008, vol. 21, pp. 587–611.
- [28] Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах: Ч. 1 // Тр. ММО, 1975, т. 32, с. 35–61;
Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах: Ч. 2 // Тр. ММО, 1977, т. 34, с. 243–252.

Homoclinic Ω -explosion: hyperbolicity intervals and their boundaries

Sergey V. Gonchenko¹, Oleg V. Sten'kin²

^{1,2}Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod State University
Ul'yanova st. 10, Nizhny Novgorod, 603605 Russia

¹gosv100@uic.nnov.ru, ²ostenkin@mail.ru

It has been established by Gavrilov and Shilnikov in [1] that, at the bifurcation boundary separating Morse-Smale systems from systems with complicated dynamics, there are systems with homoclinic tangencies. Moreover, when crossing this boundary, infinitely many periodic orbits appear immediately, just by “explosion”. Newhouse and Palis have shown in [2] that in this case there are infinitely many intervals of values of the splitting parameter corresponding to hyperbolic systems. In the present paper, we show that such hyperbolicity intervals have natural bifurcation boundaries, so that the phenomenon of homoclinic Ω -explosion gains, in a sense, complete description in the case of two-dimensional diffeomorphisms.

MSC 2010: 37E30, 37Gxx, 37G25

Keywords: homoclinic tangency, heteroclinic cycle, Ω -explosion, hyperbolic set

Received October 3, 2010, accepted February 2, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 3–24 (Russian)

