



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ДИНАМИКА

О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела¹

З. Фаркаш, Г. Бартельс, Т. Унгер, Д. Э. Вольф

Редколлегия сочла полезным ввести в журнал данный раздел, предназначенный для публикации работ, в которых заметное место занимают экспериментальные исследования динамических явлений. Наиболее приветствуются работы, содержащие практическую проверку теоретических моделей, описание реализации экспериментов, подробный анализ экспериментальных данных и их возможное теоретическое объяснение.

В журнале значительное внимание уделяется освещению проблем динамики контактного взаимодействия. В частности, последние выпуски содержат активное обсуждение различных теорий динамического трения. Тем не менее, польза этой дискуссии в значительной мере снижается из-за отсутствия в ней должной экспериментальной составляющей.

В связи с этим мы приводим ниже теоретико-экспериментальную статью (перевод зарубежной работы), посвященную именно вопросам трения. Надеемся, что в последующих выпусках данный раздел будет представлен и работами отечественных механиков.

В статье рассматривается движение двух тел, имеющих плоскую площадку контакта. Предполагается, что относительное движение тел представляет собой композицию скольжения и верчения (качение отсутствует). В работе показано, что сила трения и ее момент взаимозависимы. Это демонстрируется на примере диска, скользящего и вращающегося на горизонтальной плоской поверхности. Движение диска определяется аналитически,

¹Farkas, Z., Bartels, G., Unger, T., and Wolf, D. E. Frictional Coupling between Sliding and Spinning Motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol. 90, no. 24, 248302. ©APS, 2003. Пер. с англ. Р. Р. Валиулина.

Зено Фаркаш
Гвидо Бартельс
Дитрих Э. Вольф
Institute of Physics, University Duisburg-Essen
D-47048 Duisburg, Germany

Тамаш Унгер
Department of Theoretical Physics, Budapest University of Technology and Economics
H-1111 Budapest, Hungary



а затем и экспериментально. Показано, что скольжение и верчение диска прекращаются одновременно. Рассматривается влияние взаимосвязи между силой трения и ее моментом на физику гранулированных материалов.

Представим себе два одинаковых диска, скользящих с одной и той же начальной скоростью по столу. Единственная разница состоит в том, что один из них совершает и вращательное движение. Что в этом случае следует ожидать: а) оба диска пройдут одинаковое расстояние (до полной остановки), б) вращающийся диск проскользит дальше или в) невращающийся диск проскользит дальше? Правильный ответ состоит в том, что вращающийся диск проскользит дальше, так как вращательное движение уменьшает силу трения скольжения. Кроме того, скольжение и вращение прекращаются одновременно, независимо от начальных условий. В настоящей статье дается количественная оценка данного феномена.

Важность подобных результатов выходит далеко за рамки рассмотренного примера. Рассмотрим такую характеристику сухого порошка из ограниченных частиц как пористость. Если порошку позволить свободно осесть или сжать его с помощью поршня, его пористость будет зависеть от коэффициента трения [1]. Дальнейшее уплотнение требует более сложного согласованного перемещения его частиц, например, за счет постукивания [2, 3]. При осаждении порошка в местах контакта возникнет момент сил трения, который играет существенную роль, если частицы порошка являются ограниченными и, следовательно, имеют большие области контакта. Мы покажем, что пористость порошка значительно переоценивается, если игнорируется взаимосвязь между моментом трения и трением скольжения (в рамках модели трения Кулона). В качестве второго примера можно привести горные лавины или поток сухого гранулированного материала по спускному желобу. Если не учитывать взаимосвязь между скольжением и верчением, то величина диссипации окажется сильно завышенной.

Для объяснения взаимосвязи между скольжением и верчением рассмотрим диск, движущийся с ненулевой начальной линейной и угловой скоростью на горизонтальной плоской поверхности. Диск лежит на одной из своих сторон, и мы предполагаем, что во время движения эта сторона находится в полном контакте с поверхностью (см. рис. 1а). Сила трения и момент трения, действующие на диск, будут замедлять скольжение и верчение, пока диск не остановится. Мы рассмотрим два вопроса: (i) как сила трения и момент трения связаны друг с другом и (ii) как это влияет на зависимость между скольжением и верчением?

Сначала найдем силу и момент трения, действующие на диск, как функции его мгновенной линейной и угловой скорости. Для этого воспользуемся законом трения Кулона, гласящий, что величина силы трения пропорциональна нормальной силе, а ее направление противоположно направлению относительной скорости поверхностей.

Предполагая, что нормальная составляющая напряжений равномерно распределена и равна $F_n/\pi R^2$ во всей области контакта, получим для силы трения следующее выражение

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu F_n}{\pi R^2} \int_{\mathbf{r} \in A} \frac{\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|} d^2 r, \quad (1)$$

где R — радиус, \mathbf{v} — скорость, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость диска, μ — коэффициент трения, интегрирование ведется по основанию диска, а векторы \mathbf{r} откладываются от его центра. F_n — нормальная компонента силы, прижимающая объекты друг к другу в месте контакта; в нашем случае $F_n = mg$, где m — масса диска, а g — ускорение свободного падения. Поскольку сила трения зависит лишь от отношения v к ω , введем безразмерную величину

$\varepsilon = v/R\omega$ с $v = |\mathbf{v}|$ и $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, и тогда:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu F_n}{\pi} \int_{\tilde{\mathbf{r}} \in A_1} \frac{\varepsilon \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_\omega \times \tilde{\mathbf{r}}}{|\varepsilon \mathbf{e}_v + \mathbf{e}_\omega \times \tilde{\mathbf{r}}|} d^2 \tilde{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_v = \mathbf{v}/v$, $\mathbf{e}_\omega = \boldsymbol{\omega}/\omega$, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/R$, а A_1 — основание диска единичного радиуса. На ри-

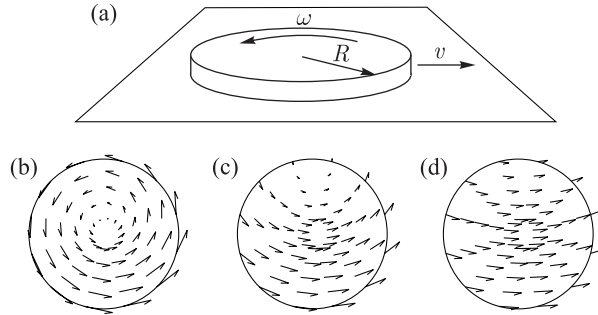


Рис. 1. (а) Скользящий и вращающийся диск на плоской горизонтальной поверхности. (b)–(d) Поле относительной скорости на поверхности диска при $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 5$ соответственно ($\varepsilon = v/R\omega$).

сунке 1b–d изображено поле относительных скоростей на поверхности диска при различных значениях ε . Отметим, что локально сила трения зависит не от абсолютного значения относительной скорости, а только от ее направления. Вычислив интеграл (2), получаем $\mathbf{F} = -\mu F_n \mathcal{F}(\varepsilon) \mathbf{e}_v$, где

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{(\varepsilon^2 + 1)E(\varepsilon) + (\varepsilon^2 - 1)K(\varepsilon)}{\varepsilon\pi}, & \varepsilon \leq 1 \\ \frac{4}{3} \frac{(\varepsilon^2 + 1)E(\frac{1}{\varepsilon}) - (\varepsilon^2 - 1)K(\frac{1}{\varepsilon})}{\pi}, & \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ и $E(\varepsilon)$ являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода соответственно [4]. Две части $\mathcal{F}(\varepsilon)$ гладко сшиваются при $\varepsilon = 1$, так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathcal{F}(\varepsilon) = 8/3\pi$, а $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \mathcal{F}'(\varepsilon) = 4/3\pi$ при стремлении слева и справа. Здесь штрих обозначает дифференцирование по ε . Предельными значениями являются $\mathcal{F}(0) = 0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varepsilon) = 1$. Отметим, что в случае чистого скольжения диск движется по прямой, так как сила трения коллинеарна скорости. Как будет показано ниже, это, вообще говоря, не так, если нормальная составляющая напряжения не равномерно распределена по области контакта.

Момент трения равен

$$\mathbf{T} = -\frac{\mu F_n}{R^2 \pi} \int_{\mathbf{r} \in A} \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|} d^2 r, \quad (3)$$

а после подсчета интеграла мы получим $\mathbf{T} = -\mu F_n R T(\varepsilon) \mathbf{e}_\omega$, где

$$T(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{4}{9} \frac{(4 - 2\varepsilon^2)E(\varepsilon) + (\varepsilon^2 - 1)K(\varepsilon)}{\pi}, & \varepsilon \leq 1, \\ \frac{4}{9} \frac{(4 - 2\varepsilon^2)E(\frac{1}{\varepsilon}) + (2\varepsilon^2 - 5 + \frac{3}{\varepsilon^2})K(\frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon\pi}, & \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

Обе части этой функции гладко сшиваются, так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} T(\varepsilon) = 8/9\pi$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} T'(\varepsilon) = -4/3\pi$ при стремлении слева и справа. Предельными значениями являются $T(0) = 2/3$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} T(\varepsilon) = 0$. На рисунке 2 показаны зависимости $\mathcal{F}(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$, а также график функции $\mathcal{F}(T)$. Эта функция существует и является обратимой, потому что как $\mathcal{F}(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ строго монотонны.

Теперь рассчитаем, как скользящий и вращающийся диск замедляет свое движение. Предполагая, что действуют только сила тяжести и сила трения, запишем скалярные уравнения движения в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg \mathcal{F}(\varepsilon), \quad (4)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\mu mg R T(\varepsilon), \quad (5)$$

где момент инерции диска равен $I = mR^2/2$. Вводя безразмерные скорости и время $v^* = v/\sqrt{Rg\mu}$, $\omega^* = \omega\sqrt{R/g/\mu}$ и $t^* = t\sqrt{g/R}$, перепишем уравнения (4) и (5) в виде

$$\frac{dv^*}{dt^*} = -\mathcal{F}(\varepsilon), \quad (6)$$

$$\frac{d\omega^*}{dt^*} = -2T(\varepsilon), \quad (7)$$

при $\varepsilon = v^*/\omega^*$. Так как $\mathcal{F}(\varepsilon)$ и $T(\varepsilon)$ положительны при $\varepsilon > 0$, скорость поступательного движения и угловая скорость, как и ожидалось, строго монотонно убывают со временем. Теперь возникает вопрос: возможно ли, что одна из них обратится в нуль раньше другой, то есть может ли случиться так, что первоначально скользящий и вращающийся диск через некоторое время будет только скользить или только вращаться? Обсудим возможные варианты развития событий. Если линейная скорость намного превосходит угловую скорость ($v \gg R\omega$, т.е. $\varepsilon \gg 1$), то момент трения ничтожно мал по сравнению с силой (см. рис. 2а). Поэтому скорость скольжения уменьшается быстрее, чем угловая скорость, и ε уменьшается. С другой стороны, если угловая скорость намного больше, чем линейная скорость ($\varepsilon \ll 1$), то момент трения преобладает над силой, а ε увеличивается. Таким образом, отрицательная обратная связь эффективно уравнивает скольжение и верчение. В самом деле, покажем, что ε всегда принимает одно и то же значение, $\varepsilon_0 \approx 0.653$, когда движение прекращается. Это означает, что при стремлении ω^* и v^* к нулю их отношение сохраняется, что означает, что *скольжение и верчение всегда прекращаются одновременно*.

Для доказательства того, что ε принимает одно и то же значение, когда движение прекращается, мы выведем автономное дифференциальное уравнение для ε из уравнений (6) и (7). Положим $x = -\ln \omega^*$, тогда

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \varepsilon - \frac{\mathcal{F}(\varepsilon)}{2T(\varepsilon)} \equiv f(\varepsilon). \quad (8)$$

Отметим, что при замедлении диска $\omega^* \rightarrow 0$ и при этом $x \rightarrow \infty$ (за исключением чистого скольжения). Для малых ε правая часть уравнения (8) асимптотически равна $f(\varepsilon) \approx \varepsilon/4$, в то время как при $\varepsilon \rightarrow \infty$ мы имеем $f(\varepsilon) \approx -\varepsilon$. Для некоторого промежуточного ε_0 правая часть меняет знак (рис. 3). Поэтому уравнение (8) имеет три неподвижные точки: две из них, $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \infty$, тривиальны и соответствуют чистому верчению или чистому скольжению. Для всех остальных начальных условий ($0 < \varepsilon < \infty$) с ненулевыми скоростями

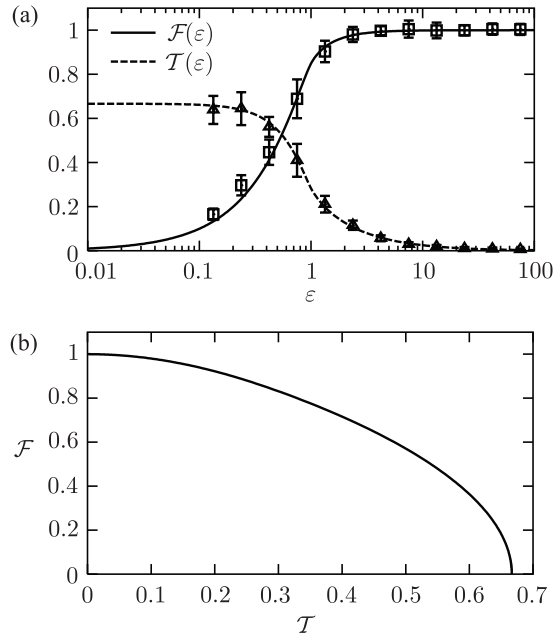


Рис. 2. (а) Безразмерная сила трения и момент трения, \mathcal{F} и \mathcal{T} , как функции безразмерного параметра ε . Данные экспериментов изображены прямоугольниками, в которые отрезками изображена возможная погрешность (см. пояснения в основном тексте). (б) Сила трения и момент трения взаимосвязаны, на рисунке изображены возможные значения $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$.

скольжения и верчения ε_0 является притягивающей неподвижной точкой, что означает, что ε принимает это значение непосредственно перед остановкой диска, что и требовалось доказать.

Для проверки гипотезы, что для вращающегося диска сила трения Кулона зависит от скорости, мы провели эксперимент для измерения силы трения и момента трения, действующих на скользящий и вращающийся диск. Мы несколько раз вручную запускали пластмассовый диск, радиусом 8 см и толщиной 2 см, по горизонтальной поверхности из полиамидной ткани и снимали его движение с помощью цифровой видеокамеры Sony DCR-VX2000E PAL (25 кадров в секунду), что позволило получить зависимость положения и ориентации диска от времени. Благодаря специфической окраске верхней части диска обработку видеоматериала удалось выполнить почти полностью автоматически. При каждом запуске диска его координаты x , y и угол поворота для первых 11 кадров аппроксимировались многочленами третьей степени. Производные этих многочленов вычислялись в геометрическом центре 6-го кадра, что позволило в данный момент времени вычислить приближенно линейную и угловую скорость и ускорение. Полученные в результате измерений линейные скорости варьировались от 0,1 до 2,2 м/с, а угловые скорости изменялись в пределах 0,002–37,1 Гц.

Как показано на рисунке 2а, сила трения мало отличима от своего максимального значения (как при чистом скольжении) при $\varepsilon \approx 10$. Поэтому в (4) удалось подобрать множитель μg таким образом, чтобы значения правой части (4) хорошо согласовывались с вычисленными экспериментально ускорениями при $\varepsilon > 10$ (в 68 из 530 экспериментальных точек). Мы получили $\mu g = 3.60 \pm 0.01$ м/с², что соответствует коэффициенту трения скольжения $\mu = 0.37 \pm 0.01$ ($g = 9.81$ м/с²). Дело в том, что в экспериментах с $\varepsilon > 10$ первоначально

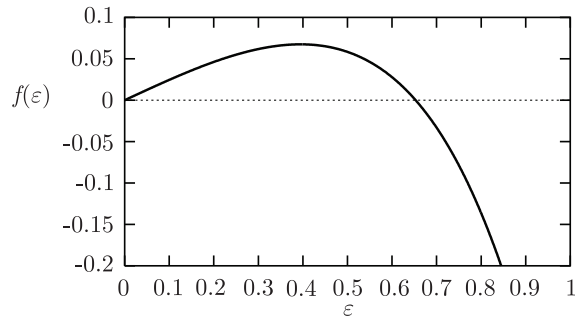


Рис. 3. График функции и $f(\varepsilon) = \varepsilon - \mathcal{F}(\varepsilon)/2\mathcal{T}(\varepsilon)$ (правая часть дифференциального уравнения (8)). Функция обращается в нуль при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \approx 0.653$, положительна при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и отрицательна при $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

мы наблюдали некоторые отклонения в ту или иную сторону ускорения поступательного движения, что, по-видимому, явилось следствием износа, изменившего коэффициент трения. Однако после 200 бросков эти отклонения уже не наблюдались, что позволило достаточно точно определить μ вышеописанным способом. Мы использовали остальные данные для получения \mathcal{F} и \mathcal{T} как функций от ε с помощью уравнений (4) и (5). Графики (рис. 2а) получены осреднением результатов 530 бросков. Величины ошибок были получены путем усреднения данных на гистограмме с логарифмической шкалой по оси ε . Каждый интервал на этой оси содержал данные, полученные при различных линейных скоростях (и соответствующих им угловых скоростях). Таким образом, эксперимент подтверждает, что при различных скоростях, но с одним и тем же ε сила и момент трения одни и те же. Кроме того, данные, показанные на рисунке 2а, согласуются с аналитически полученным утверждением, что эффективный коэффициент трения скольжения динамически уменьшается за счет вращательного движения. Эксперимент также подтвердил, что скольжение и верчение прекратились одновременно (результаты здесь не представлены).

На простом и наглядном примере скользящего и вращающегося диска мы показали, что сила трения и момент трения связаны друг с другом. В этом случае мы смогли получить все результаты аналитически, так как давление в области контакта везде одно и то же. Однако в общем случае распределение давления в области контакта будет неравномерным. Например, если мы заменим плоский диск цилиндром (стоящим на своем основании), то сила трения создаст ненулевой момент относительно центра масс. При условии, что цилиндр не опрокинется, этот момент должен быть компенсирован в передней (в направлении скорости v) части основания за счет увеличения давления и уменьшения его в направлении, обратном к v (см. рис. 4). Поэтому вращательное движение приводит к возникновению силы, направленной ортогонально поступательному движению, в направлении $\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_\omega$. Следовательно, в отличие от вращающегося диска, движущегося всегда прямолинейно, траектория цилиндра будет отклоняться в указанном направлении. Это напоминает эффект Магнуса [5], хотя физическое происхождение совершенно иное. Для оценки величины этой отклоняющей силы в случае однородного цилиндра высотой H будем считать, что давление распределено линейно, добавив к постоянному давлению слагаемое вида $\Delta p = \alpha \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_v$. Это слагаемое войдет как множитель в подынтегральное выражение в (1). В силу симметрии величина $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_v = -\mu F_n \mathcal{F}(\varepsilon)$ останется прежней. Поэтому α может быть найдено из того условия, что момент трения $FH/2$ равен моменту сил реакции опоры (тогда цилиндр не опрокинется). Получаем $\alpha = 2FH/\pi R^4$. Вычислив интеграл в (1) с учетом ли-

нейной добавки к давлению, получаем, что составляющая силы в направлении $\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_\omega$ равна $\mu^2 F_n \mathcal{F}(\varepsilon)(H/R) \mathcal{F}_M(\varepsilon)$. Функция $\mathcal{F}_M(\varepsilon)$ аналогична $\mathcal{T}(\varepsilon)$, ее частные значения — $\mathcal{F}_M(0) = 2/3$, $\mathcal{F}_M(1) = 64/45\pi \approx 0.45$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathcal{F}_M(\varepsilon) = 0$. Таким образом, составляющая силы, перпендикулярная скорости, равна произведению составляющей силы вдоль v , коэффициента трения, соотношения H/R и функции $\mathcal{F}_M(\varepsilon)$.¹

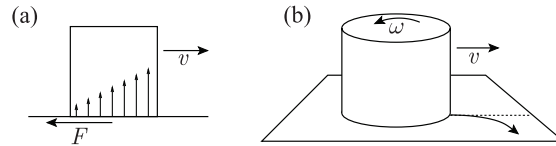


Рис. 4. (а) Нормальное давление, действующее на цилиндр, не может быть распределено равномерно, так как оно должно уравнивать момент, создаваемый силой трения F (в противном случае цилиндр опрокинется). Для вращающегося цилиндра (из-за неравномерности нормального давления) сила трения уже не будет коллинеарна его линейной скорости, что приведет к искривлению траектории.

Распределение давления также может зависеть от формы и упругих свойств скользящего тела. Например, для сферы, как следует из решения соответствующей задачи линейной упругости, давление имеет радиальное распределение $\sqrt{1 - r^2/R^2}$ [6]. Для этого случая мы численно построили кривые $\mathcal{F}(\varepsilon)$ и $\mathcal{T}(\varepsilon)$ и установили, что качественно они имеют тот же вид.² Поэтому взаимосвязь между силой трения и моментом трения по-прежнему имеет место: для больших ε трение вращения «подавляется» скольжением; для малых ε как раз наоборот (быстрое вращение уменьшает силу трения вдоль v). Поэтому скорость поступательного движения быстро вращающегося волчка убывает сравнительно медленно.

Теперь вернемся к упомянутым в начале примерам осаждения сухого порошка и транспортировки вниз по спускному желобу. Типичные скорости скольжения — величины порядка ωR_p , так что $\varepsilon \approx R_p/R$, где R_p обозначает радиус частицы, а R — радиус пятна контакта. Следовательно, для ограниченных частиц $\varepsilon \approx 1$. Как показано на рисунке 2b, игнорирование взаимосвязи между моментом и силой трения (т. е. если положить $\mathcal{F} = 1$ и $\mathcal{T} = 2/3$ независимо от значения ε) приведет к их переоценке не менее чем на 30%–50%. Это означает, что уплотнение порошка фактически осуществляется легче, чем можно было бы ожидать. Аналогичным образом диссипация в лавине, вызванная трением частиц друг о друга, равна $\mu F_n v \mathcal{F}(\varepsilon) + \mu F_n R \omega \mathcal{T}(\varepsilon) = \mu F_n v [\mathcal{F}(\varepsilon) + \mathcal{T}(\varepsilon)/\varepsilon]$. Если не принимать во внимание указанную взаимосвязь, то мы получили бы $\mu F_n v (1 + 2/3\varepsilon)$, что (при $\varepsilon \approx 1$) примерно на 30% больше. Однако для твердых сферических частиц $\varepsilon \gg 1$, так что в случае скольжения трение вращения уменьшает силу трения незначительно.

На основании проведенных экспериментов можно утверждать, что, по-видимому, аналогичная связь между силой и моментом сохраняется и в статике: момент трения, который слишком мал для того, чтобы заставить диск вращаться, все же снижает пороговую силу, необходимую для возникновения скольжения, и наоборот. Следовательно, игнорирование отмеченной связи приводит к ошибкам также и при определении статических характеристик порошковых сред.

¹Для диска, использовавшегося в эксперименте, отношение было $1=4$, а движение отличалось от прямолинейного лишь незначительно.

²В случае сферы следует также учитывать качение, что приводит к дополнительным сложностям. Здесь мы ради простоты качением пренебрегли.

В настоящей статье главное внимание уделено взаимосвязи между линейной скоростью и нормальной угловой скоростью в пятне контакта. В гранулированных средах имеет место также диссипация, связанная с двумя другими видами относительного движения: движением вдоль общей нормали (normal restitution mode) и качением частиц друг по другу. Значит, может быть поставлен вопрос о существовании взаимосвязи и между ними. В самом деле, есть явные признаки такой взаимосвязи для вязкоупругих частиц [7–9]; однако ее влияние на динамику практически не изучено. Кроме того, при столкновении быстро движущихся частиц следует учитывать и пластическую деформацию; в этом случае взаимосвязь между движением по нормали и качением не изучалась совсем. При рассмотрении фрикционного «эффекта Магнуса» мы выяснили, что в общем случае все четыре вида относительного движения (скольжение, верчение, качение и движение вдоль общей нормали) могут влиять друг на друга.

Список литературы

- [1] Kadau D., Bartels G., Brendel L., Wolf D. E. Pore stabilization in cohesive granular systems // *Phase Transit. Crit. Phenom.*, 2003, vol. 76, pp. 315–331.
- [2] Knight J. B., Fandrich C. G., Lau C. N., Jaeger H. M., Nagel S. R. Density relaxation in a vibrated granular material // *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, pp. 3957–3963.
- [3] Nicodemi M., Coniglio A., Herrmann H. J. Frustration and slow dynamics of granular packings // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, pp. 3962–3969.
- [4] Handbook of mathematical functions / M. Abramowitz, I. A. Stegun (Eds.). New York: Dover, 1965. 1006 p.
- [5] Gerhart P. M., Gross R. J., Hochstein J. I. Fundamentals of fluid mechanics. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1992.
- [6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10-ти тт.: Т. 7: Теория упругости. 5-ое изд. М.: Физматлит, 2001. 259 с.
- [7] Brilliantov N. V., Pöschel Th. Rolling friction of a soft sphere on a hard plane // *Europhys. Lett.*, 1998, vol. 42, pp. 511–516.
- [8] Pöschel Th., Schwager Th., Brilliantov N. V. Rolling of a hard cylinder on a viscous plane // *Eur. Phys. J. B*, 1999, vol. 10, pp. 169–174.
- [9] Ramírez R., Pöschel T., Brilliantov N. V., Schwager Th. Coefficient of restitution of colliding viscoelastic spheres // *Phys. Rev. E*, 1999, vol. 60, pp. 4465–4472.

Frictional coupling between sliding and spinning motion

Zénó Farkas¹, Guido Bartels², Tamás Unger³, Dietrich E. Wolf⁴

^{1,2,4}Institute of Physics, University Duisburg-Essen, D-47048 Duisburg, Germany

³Department of Theoretical Physics, Budapest University of Technology and Economics, H-1111 Budapest, Hungary

The tangential motion at the contact of two solid objects is studied. It consists of a sliding and a spinning degree of freedom (no rolling). We show that the friction force and torque are inherently coupled. As a simple test system, a sliding and spinning disk on a horizontal flat surface is considered. We calculate, and also measure, how the disk slows down and find that it always stops its sliding and spinning motion at the same moment. We discuss the impact of this coupling between friction force and torque on the physics of granular materials.

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 139–146 (Russian)

Originally published in: *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 90, no. 24, 248302.

