



---

**КОММЕНТАРИИ. ДИСКУССИЯ. КРИТИКА**

---

**Отклик на работу В. В. Козлова  
«Лагранжева механика и сухое трение»  
(НД, 2010, Т. 6, № 4)**

**В. Ф. Журавлёв**

Автором предпринята попытка построения новой феноменологии закона сухого трения, включающая закон Кулона в качестве простейшего частного случая. Необходимость подобного обобщения стала очевидной только в последние десятилетия. Одним из первых, кто обратил внимание на то, что применение идей одномерного закона Кулона к задачам качения твердых тел с одной точкой контакта приводит к недопустимо грубым ошибкам, был французский механик П. Контенсу. В частности выяснилось, что известное неголономное условие в виде отсутствия проскальзывания в точке контакта не может быть реализовано никакими силами сухого трения, если помимо качения наличествует еще и верчение. Поэтому и постановка неголономных задач качения твердых тел может рассматриваться в лучшем случае как приближенная при некоторых специальных условиях.

В. В. Козлов фактически в форме серии постулатов расширил одномерную модель трения на общий пятимерный случай. Модель очень хорошо формализована, благодаря чему корректно решаемые задачи механики систем с трением переходят с уровня инженерных задач на уровень лагранжевой механики с ее мощными и эффективными методами. Представляется уместным сделать следующие замечания.

1. Феноменологический характер модели В. В. Козлова может рассматриваться и как достоинство, и как недостаток (вспомним Ньютона «*hypotheses non fingo* — гипотез не выдвигаю»). Достоинство состоит в том, что вместо громоздкого и кропотливого применения закона Кулона в дифференциальной форме для распространения его на общий случай принимается волевое постулирование его в кажущейся приемлемой общей форме. Недостаток состоит в том, что феноменология в механике обычно не принята, и все, что может быть

---

Получено 2 февраля 2011 года

---

Публикуется в авторской редакции

---

Журавлёв Виктор Филиппович  
[zhurav@ipmnet.ru](mailto:zhurav@ipmnet.ru)

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН  
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1

получено из фундаментальных законов с помощью логики и математики, так и должно быть получено.

2. Между тем, помимо критериев внутренней строгости и стройности, феноменология, ориентированная на практическое применение, должна удовлетворять и внешним критериям адекватности экспериментальной практики. Похоже, с этим в предложенной модели не все обстоит благополучно. Например, в разделе, где рассматривается задача о качении однородного шара, получена формула для момента трения верчения. Поскольку формула никак не зависит от радиуса пятна контакта, то она должна быть верна и для нулевого радиуса, т. е. для точечного контакта. Но в случае точечного контакта моменту неоткуда взяться, он точно равен нулю. Тот же момент, который получается из обсуждаемой модели, будет в этом случае представлять собой ее чистую погрешность. Если уж без феноменологии обойтись трудно, то она непременно должна сопровождаться достаточным экспериментом. Тем более, когда из нее следуют новые законы природы, например, такие, как утверждение, что «сила трения и момент уменьшаются с увеличением угловой скорости качения». А что если эксперимент это опровергнет?

3. Утверждение, что «сухое трение по В. Ф. Журавлёву не зависит от угловой скорости качения»<sup>1</sup>, неверно. В моей модели все определяется первыми четырьмя моментами распределения нормальных напряжений в пятне контакта. А это распределение зависит от угловой скорости качения (А. Ю. Ишлинский, И. Г. Горячева, J. Svendenius). Более того, учет угловой скорости качения в случае скольжения и верчения был осуществлен в задаче о шимми переднего колеса самолета, опубликованной недавно мною совместно с Д. М. Климовым [1]. О том, что в модели К.–Ж. трение качения легко учитывается, пишет и А. В. Карапетян [2]. Нетрудно учесть деформацию распределения нормальных напряжений в случае вращения и в упомянутой В. В. Козловым задаче о качении однородного шара. Именно эта деформация и приводит к появлению момента трения качения. Все эти обстоятельства освещены в [3].

4. Нельзя согласиться и с утверждением, что «в формулах Контенсу–Журавлёва» не учитывается факт убывания коэффициента трения с ростом скорости скольжения.

Во-первых, в современных технических справочниках приводятся зависимости коэффициента трения от скорости, как убывающие, так и возрастающие, так и с точками максимума и минимума [4]. Это было установлено, в частности, Мореном задолго до публикаций Зоммерфельда.

Во-вторых, учет зависимости коэффициента трения от скорости в «формулах Контенсу–Журавлёва» был выполнен моим учеником в [5].

5. Нельзя согласиться с утверждениями типа: «Имеется только продвинутый анализ трения верчения, находящийся в качественном согласии с экспериментом» или «не приходится надеяться, что после интегрирования по пятну контакта получится результат, хорошо согласующийся с экспериментом количественно».

Во-первых, качественное согласие — это уже неплохо, поскольку ранее известные решения игрушечных задач типа волчок тип-топ, кельтский камень и др. даже качественно не соответствовали эксперименту.

Во-вторых, точный анализ эксперимента на уровне точности, принятом в гироскопической технике, был проведен Контенсу над корабельной гировертикалью Флерие, и он показал блестящее количественное согласие с экспериментом. Также уже появились эксперименты, количественно подтверждающие модель шимми с поликомпонентным трением.

<sup>1</sup>Редакция «НД»: цитируемый В. Ф. Журавлёвым текст в печатном варианте обсуждаемой статьи отсутствует.

То упрощение формул Контенсу, которое достигается с помощью аппроксимаций Паде, обладает контролируемой точностью. Помимо дробно-линейной аппроксимации, упомянутой В. В. Козловым, нами использовались и дробно-билинейные и дробно-трилинейные. Заметим, что в то же время вопрос о точности новой феноменологии пока что остается открытым.

6. Не думаю, что «такой подход проясняет парадоксы сухого трения Пенлеве». Ведь Пенлеве ставил свои вопросы в рамках другой феноменологии, к тому же не очень хорошо ее понимая. В тех рамках и надо было бы «прояснить».

7. И, наконец, чисто метафизическое замечание. Точные науки после Декарта пронизаны картезианским духом, рекомендуящим разбивать сложное на детали, их исчерпывающе изучать, после чего из них составлять целое. В модели К.–Ж. так и делается. Вначале добавляется только верчение при симметричной площадке контакта (двумерное трение), затем отказ от симметрии (трехмерное трение), затем учитывается трение качения (полное пятимерное трение) и т. д. В модели В. В. Козлова сразу описывается предельно общая ситуация. Конечно, в наше время апелляции к Декарту, возможно, и устарели.

## Список литературы

- [1] Климов Д. М., Журавлёв В. Ф. Теория явления шимми // Изв. РАН, МТТ, 2010, № 3, с. 22–29.
- [2] Карапетян А. В. Новая модель трения и ее приложение к задаче динамики бильярдного шара // XI междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 1–4 июня 2010).
- [3] Андронов В. В., Журавлёв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 185 с.
- [4] Крагельский И. В. Трение и износ. М.: Машгиз, 1962. 384 с.
- [5] Киреевков А. А. Закон Кулона в обобщенной дифференциальной форме в задачах динамики твердых тел с комбинированной кинематикой // Изв. РАН, МТТ, 2010, № 2, с. 15–26.

## Comments on “Lagrangian mechanics and dry friction” by V. V. Kozlov

Viktor Ph. Zhuravlev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences  
pr. Vernadskogo 101, block 1, Moscow, 119526 Russia  
zhurav@ipmnet.ru

Received February 2, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 147–149 (Russian)