



## НАУКА И МУЗЫКА. ГАРМОНИЯ ИЗ ХАОСА

# Хаос и самоподобие<sup>1</sup>

Г. Нирхаус

Теория хаоса стала чрезвычайно популярной в 1980-х годах благодаря широкому использованию некоторых явлений, описанных в трудах Эдварда Н. Лоренца<sup>2</sup> и Бенуа Мандельброта<sup>3</sup>, — так называемый «эффект бабочки», самоподобие графически красивых иллюстраций различных фракталов стали предметом широкого обсуждения не только в научной среде.<sup>4</sup> Независимо от того, идет ли речь об изображении формы береговых линий, ответвлений кровеносных сосудов или о сложном поведении динамических систем, теории хаоса иногда придается значение *deus ex machine* — она служит моделью объяснения сложных «природных» структур и процессов. Эйфорическое отношение к данной дисциплине отражено и в названии книги Джеймса Глейка «Хаос: создание новой науки» [1], где автор предсказал смену парадигм в физике под влиянием теории хаоса. Существенные части теории хаоса включают анализ поведения сложных систем, их аттракторов, а также различных форм самоподобных структур, прежде всего фракталов. Для моделирования самоподобных структур очень хорошо подходят системы Линденмайера (СЛ). Первоначально они были разработаны как формальный язык для описания процесса роста растений и являются эффективным средством создания музыкальной структуры в области алгоритмической композиции.

## 1. Теория хаоса

Термин «хаос» греческого происхождения и первоначально означал «пространство» или «бездна»; сегодня это слово в разговорном языке употребляется для обозначения беспорядка, причем такое значение данный термин приобрел в течение XVII века. Применительно к математике и физике «хаотическими» называются определенные состояния системы, трудно поддающиеся прогнозированию. В 1975 г. термин «хаос» был введен в области математики после публикации работы математиков Тьен-Йен Ли и Джеймса Йорка [2].

---

<sup>1</sup>Gerhard Nierhaus, *Algorithmic Composition: Paradigms of Automated Music Generation*, Springer, 2009, pp. 131–155 (Chapter 6) © Springer, 2009. Перевод с английского под редакцией А. Ю. Лоскутова (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет).

<sup>2</sup>Американский метеоролог (1917–2008).

<sup>3</sup>Французский математик польского происхождения, род. в 1924 г.

<sup>4</sup>Вообще говоря, у истоков теории хаоса стояли многие исследователи. См. по этому поводу обзор: А. Ю. Лоскутов. Успехи физ. наук, 2010, т. 180, с. 1305–1329. — *Прим. ред.*





Рис. 1. Жюль Анри Пуанкаре.

То, что даже небольшие изменения начальных условий могут вызвать непредвиденное поведение системы, уже показал Жюль Анри Пуанкаре<sup>5</sup> в своих исследованиях, посвященных небесной механике. В работе «Наука и метод» Пуанкаре пишет: «Очень малозначительная причина, ускользающая от нашего внимания, предопределяет следствие, которое мы не можем не увидеть, и тогда мы говорим, что следствие явилось результатом случайности. Если бы мы точно знали законы природы и состояние вселенной в первоначальный момент, мы могли бы точно предсказать состояние той же самой вселенной в последующий момент. Даже если бы мы раскрыли все секреты природы, мы смогли бы лишь приблизительно узнать, какова была ситуация в начальный момент. Если бы это позволило нам предсказать ситуацию с той же самой степенью приближенности, это все, что нам нужно, и мы бы сказали, что было предсказано явление, подчиняющееся определенным законам. Но это не всегда так; может случиться, что небольшие различия в начальных условиях вызовут очень большие различия в конечных явлениях» [3, с. 67–68].

Другой пример непредсказуемости хаотического поведения системы можно найти и в *логистическом уравнении* Пьера-Франсуа Ферхюльста<sup>6</sup>, выведенном им в 1837 г. Ферхюльст ввел это уравнение как демографическую модель, представляющую динамику численности популяции во времени под влиянием различных определяющих факторов.<sup>7</sup> Если продуктов питания достаточно, население растет до такой численности, при которой запасы этих продуктов истощаются, а часть населения умирает от голода. Для сократившегося населения продуктов питания снова становится достаточно, и оно снова начинает расти. Ферхюльст обозначает этот периодически повторяющийся цикл в уравнении, представляющем численность населения  $x$  при времени  $t + 1$  в зависимости от численности населения  $x$  при времени  $t$ . Устанавливаемое пороговое значение для ограничения  $x$  запасами продовольствия равно 1, а  $r$  является постоянной величиной — произведением темпа роста и значения, представляющего собой степень уменьшения численности населения в результате гибели от голода. Таким образом, можно записать:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Это уравнение представляет собой простую модель экосистемы, развитие которой определяется повторяющимся процессом. Если численность населения низка, множитель  $(1 - x_n)$

<sup>5</sup>Французский математик, физик и философ (1854–1912).

<sup>6</sup>Бельгийский математик (1804–1849).

<sup>7</sup>П.-Ф. Ферхюльст ввел дифференциальное уравнение  $dN/dt = rN(1 - N/K)$ . Однако далее речь идет об отображении. — *Прим. ред.*

примерно равен 1, благодаря чему обеспечивается экспоненциальный рост. Соответственно, при большей численности населения множитель  $(1 - x_n)$  будет приближаться к 0, население начнет уменьшаться. Поведение этой системы может быть проиллюстрировано с помощью *диаграммы Фейгенбаума*<sup>8</sup> (рис. 2), показывающей разные предельные значения численности населения в зависимости от  $r$ . Начиная со значения  $r > 3$ , происходит все большее удвоение точек накопления до тех пор, пока, наконец, не начнется хаотическое поведение со значениями  $r$ , находящимися в пределах 3,57 и 4.

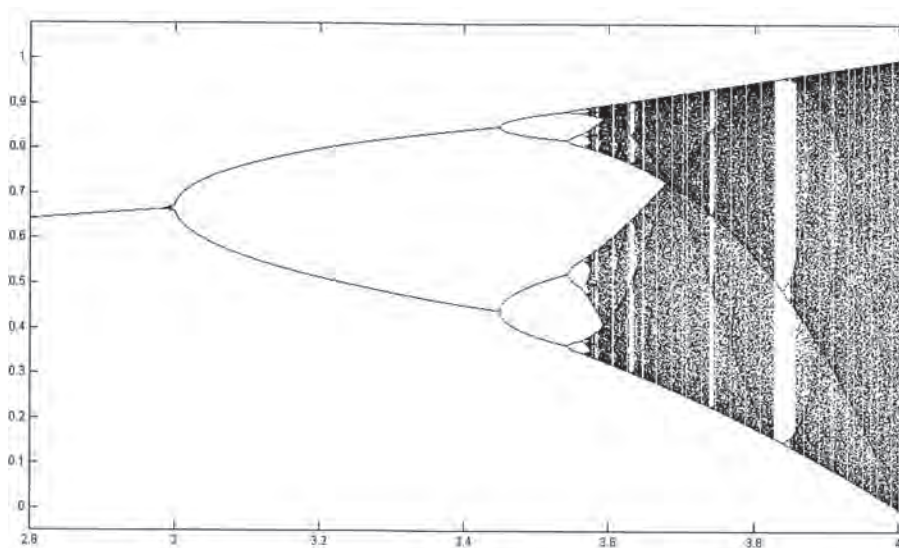


Рис. 2. Диаграмма Фейгенбаума для логистического уравнения.

Самый известный пример поведения сложной системы восходит к Лоренцу, который в 1963 г. разработал систему трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений как упрощенную модель атмосферного потока. Небольшие изменения значений переменных приводят к совершенно разным результатам. Эту высокую чувствительность так называемых *детерминированных хаотических систем* к малейшим изменениям начальных условий Лоренц иллюстрирует на примере<sup>9</sup> «эффекта бабочки»: один взмах крыльев бабочки вызывает минимальное возмущение, которое, однако, в ходе детерминированного хаотического развития системы, может привести к совершенно непредсказуемым метеорологическим последствиям, в том числе и в очень удаленных местах.

## 2. Странные аттракторы

При наблюдении долговременных характеристик динамических систем состояния системы приближаются к частным возможным решениям. Другими словами, в *фазовом пространстве* траектории системы стремятся к сравнительно малой области, которое указывается *аттрактором*. С геометрической точки зрения простые аттракторы могут быть *неподвижными точками*, как, например, в маятнике, который стремится к состоянию покоя

<sup>8</sup>Диаграмма названа так в честь американского физика Митчелла Джея Фейгенбаума (род. в 1948 г.).

<sup>9</sup>Этот эффект впервые был описан в рассказе Р. Брэдбери «И грянул гром» (A Sound of Thunder, 1952 г.). — *Прим. ред.*



Рис. 3. Эдвард Лоренц.

в самой низкой точке траектории. Другой формой может быть *предельный цикл*, в котором пространство решений является последовательностью периодически меняющихся значений. Общим для этих простых аттракторов является то, что они имеют целочисленную *размерность* (см. ниже) в фазовом пространстве. Структура так называемых *странных аттракторов* отражает поведение хаотических систем — они не могут быть описаны с помощью простых геометрических форм и поэтому, так как они имеют нецелочисленную размерность, являются *фракталами* (см. ниже). Известными примерами странных аттракторов как представления предельных значений систем нелинейных уравнений являются аттрактор Эно, аттрактор Рёсслера и аттрактор Лоренца (рис. 4), форма которого напоминает бабочку.

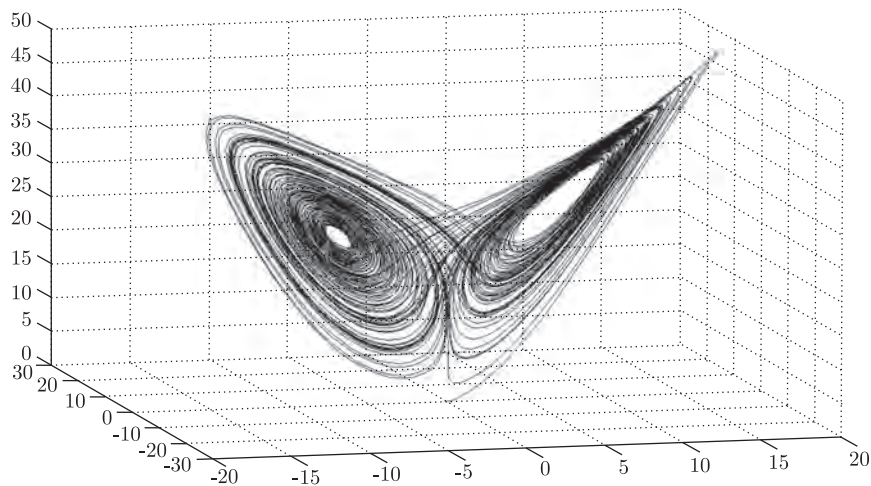


Рис. 4. Аттрактор Лоренца.

### 3. Фракталы

*Фракталы* — это геометрические формы, показывающие высокую степень самоподобия (также: *масштабной инвариантности*), подразумевающую, что частные графические схемы повторно встречаются в идентичных или очень похожих формах на нескольких различных порядках величины. Фрактальные структуры можно найти в таких процессах, как кристаллизация, форма береговых линий или в многочисленных проявлениях роста растений, например, в форме папоротников или конкретных разновидностей цветной капусты. Интересную трактовку самоподобных структур в области живописи можно найти в творчестве голландского художника Морица Корнелиса Эшера (1889–1972). Термин «фрактал» ввел Бенуа Мандельброт: «Я создал слово *fractal* от латинского прилагательного *fractus*. Соответствующий латинский глагол *frangere* означает «ломать»: создавать обломки неправильной формы. Поэтому вполне логично (и как это хорошо подходит для наших нужд!), что помимо значения «разбитый на куски» (как и в словах *fraction* и *refraction*), слово *fractus* имеет и значение «имеющий неправильную форму», причем и то, и другое значение сохраняется в слове *fragment*» [4, с. 4].

В 1980-х годах большой интерес к этим структурам вызвали прежде всего привлекательные графические изображения фракталов, особенно множества Мандельброта. Однако самоподобные формы в области математики были разработаны еще до Мандельброта. *Канторовское множество*<sup>10</sup> (рис. 6) является замкнутым подмножеством действительных чисел и по своему графическому представлению представляет собой фрактал с простой командой для его создания: удалить среднюю треть из множества отрезков прямой и выполнить этот шаг итерации на каждом вновь возникающем отрезке прямой.



Рис. 5. Бенуа Мандельброт.



Рис. 6. Шаги итерации канторовского множества.

Другим примером фрактала является *контур снежинки*, разработанный шведским математиком Хельге фон Кохом (1870–1924) еще в 1906 году.<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Данное множество получило свое название в честь немецкого математика Георга Кантора.

<sup>11</sup> См. раздел «Системы Линденмайера».

Общим свойством всех фракталов является их нарушенная размерность.<sup>12</sup> В математике термин «размерность» в целом относится к степеням свободы движения в пространстве. Соответственно, линия является одномерной, в то время как участок имеет два измерения. Однако фрактальная конфигурация линий в ходе процесса итерации может становиться все более и более похожей на плоскость; поэтому фрактальная размерность этой формы находится в пределах от 1 до 2.

Независимо от разновидности фрактальных форм именно *множество Мандельброта* проявляет чрезвычайную сложность в своем графическом представлении и, в связи с наличием целого ряда эстетически привлекательных вариантов, считается «прототипом» фрактала. Возможность классифицировать *множества Жюлиа*<sup>13</sup>, представляющие подмножества комплексных чисел, Мандельброт создал с помощью множества, названного его именем и нередко именуемого также «яблочник» («Apple Map»). Итеративное правило построения<sup>14</sup> данного множества с начальным условием  $z_0 = 0$ , представляющее  $z$  и  $c$  как комплексные числа, имеет следующий вид:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Множество Мандельброта представляет собой динамический расчет, основанный на итерации комплексных чисел. Для каждой позиции или числа определяется значение для конкретного количества итераций. Все позиции, значение которых остается конечным и после большого числа итераций, составляют множество Мандельброта и могут быть изображены, например, с помощью черных точек. В зависимости от количества итераций, дающих значение для  $z_n$ , которое выше, чем определенное предельное значение, соответствующие позиции могут быть также представлены разными цветами или затенением серым цветом. В соответствии с сегментом уровня числа можно увеличить масштаб сегментов множества Мандельброта, причем это изменение масштаба (рис. 7) постоянно делает видимыми новые самоподобные структуры.<sup>15</sup>

#### 4. Системы Линденмайера

*Системы Линденмайера (СЛ)*, или L-системы, названы так в честь ботаника Аристида Линденмайера (1925–1989), который в 1968 г. [6] разработал формальный язык для отображения роста водорослей. В 1974 г. Паулин Хогевег и Бен Хеспер расширили этот подход, введя систему графического представления [8]. Начиная с 1984 г., L-системы использует Алви Рей Смит для отображения процессов роста структур растений [9]. Другие работы по моделированию роста с помощью L-систем проведены математиком Гжегожем Розенбергом и ученым Пжемыславом Прусинкевичем<sup>16</sup>, занимающимся теорией вычислительных машин и систем.

Подобно грамматикам из иерархии Хомского, L-системы (также: *системы параллельной перезаписи*) работают с правилами перезаписи. На основе пускового элемента применя-

<sup>12</sup> Детальное описание *фрактальной размерности* см. в [4, с. 14 и далее].

<sup>13</sup> Названо в честь французского математика Гастона Мориса Жюлиа (1893–1978).

<sup>14</sup> Когда система состоит из нескольких итеративных уравнений, она также называется *системой итерированных функций* или *IFS*.

<sup>15</sup> Очень привлекательные графические изображения множеств Мандельброта и других фракталов можно найти в работе [5].

<sup>16</sup> Хорошее введение в теорию систем Линденмайера можно найти в работе Прусинкевича и Линденмайера «The Algorithmic Beauty of Plants» [7].

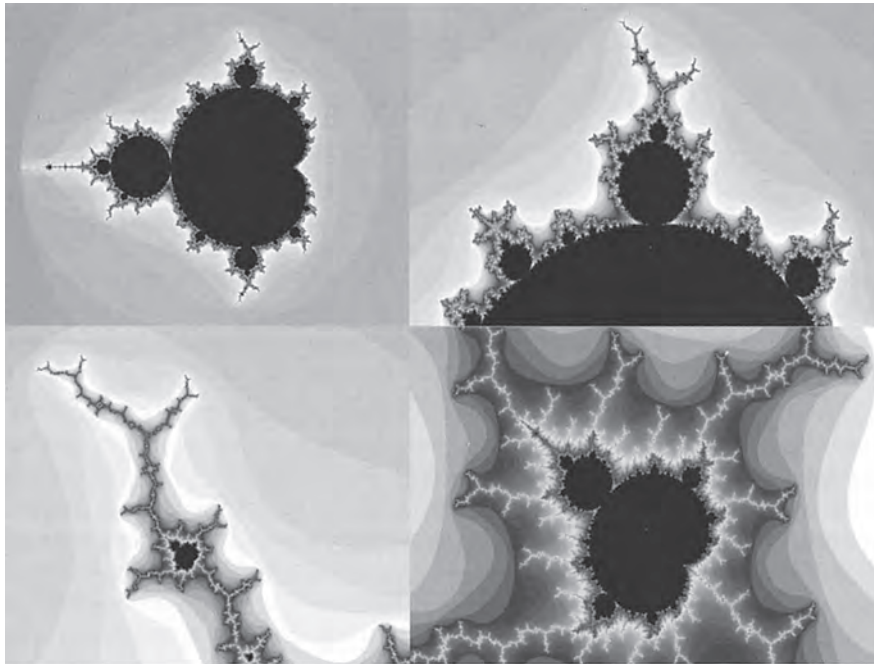


Рис. 7. Детализация изображения множества Мандельброта.

ются порождающие правила, выходные данные которых обычно представляются графически. В противоположность реализации грамматик, L-системы не различают терминальные и нетерминальные символы; кроме того, все порождающие правила и правила перезаписи применяются одновременно. В системе Линденмайера символы большей частью заменяются символьными цепочками, которые, в свою очередь, снова содержат эти символы. В результате в сравнении с генеративной грамматикой количество обрабатываемых символов значительно возрастает. Благодаря этим основным характеристикам системы Линденмайера также хорошо подходят для моделирования самоподобных структур и могут быть чрезвычайно просто представлены в виде триплета  $(\nu, \omega, P)$ , см. таблицу 1.

Таблица 1. Определения для системы Линденмайера.

$\nu$	алфавит: конечное множество символов, чаще всего обозначаемое строчными буквами: $\nu = \{a, b, c, d\}$
$\nu^*$	множество всех возможных символьных цепочек от $V$ : $abc aab aba acccc$ и т. д.
$\nu^+$	множество всех возможных символьных цепочек без пустого множества $\nu^* \setminus \{\emptyset\}$
$\omega$	аксиома, или <i>инициатор</i> ; применяется, где $\omega \in \nu^+$
$P$	конечное множество порождающих правил, или <i>генераторы</i> . Порождающие правила большей частью представлены через $\alpha \rightarrow \chi$ с предшественником $\alpha \in \nu$ и последующим элементом $\chi \in \nu^*$

Применение производной основано на аксиоме. Порождающие правила применяются путем замены одиночных предшествующих символов с их предшественниками. Если кон-

кретный предшественник не имеет предшественника, то применяется  $\alpha \rightarrow \alpha$ , что означает замену предшественника самим собой.



Рис. 8. Аристид Линденмайер [7].

#### 4.1. Формы систем Линденмайера

Можно выделить несколько основных типов L-систем:

- *контекстно-независимые и контекстно-зависимые L-системы,*
- *детерминированные и стохастические L-системы,*
- *параметрические и непараметрические L-системы.*

Чтобы графически представить<sup>17</sup> L-системы, большей частью используются символы, обозначающие движения с помощью графических средств. Этот стиль визуализации называется *графикой с использованием относительных команд*<sup>18</sup>, первоначально написанной на языке программирования LOGO. В самой простой форме черепаха имеет следующие команды (таблица 2):

Таблица 2. Команды черепахи.

$F$	переместить на один шаг вперед; прочерчивается линейный сегмент
$\varphi$	угол поворота черепахи
+	повернуть влево на угол $\varphi$
–	повернуть вправо на угол $\varphi$
[	сохранить текущие значения для позиции и угла
]	восстановить сохраненные значения
$I$	глубина итерации

<sup>17</sup>Все графические средства в следующих примерах разработаны с помощью программы «Виртуальная лаборатория» [10], которая, в противоположность большинству других сред программирования, делает возможным создание также стохастических и параметрических L-систем. Код для различных L-систем берется в модифицированной форме из [11].

<sup>18</sup>В оригинале turtle graphics — «черепашня графика», т. е. простые графические средства в виде черепашек, управляемых с помощью команд и оставляющих свой след на экране. — *Прим. ред.*



#### 4.1.1. Контекстно-независимые и контекстно-зависимые L-системы

Система Линденмайера называется контекстно-независимой L-системой (также: 0L-системой), если подстановка выполняется независимо от ее окружения. Вместе с детерминированной структурой для порождающих правил эти простые L-системы образуют класс детерминированных 0L-систем (D0L-систем). В контекстно-зависимой L-системе применение частного  $\chi$  зависит от окружения  $\alpha$ , которое должно быть подставлено. Возможная форма записи контекстно-зависимых порождающих правил могла бы быть следующей:

$$\begin{aligned} P_1 &= a > b \rightarrow aba, \\ P_2 &= a < b \rightarrow bab, \\ P_3 &= a < b > a \rightarrow baa, \end{aligned}$$

$P_1$ : Буква  $b$  заменяется на  $aba$ , когда она стоит перед  $a$ ,  
 $P_2$ : Буква  $b$  заменяется на  $bab$ , когда она стоит после  $a$ ,  
 $P_3$ : Буква  $b$  заменяется на  $baa$ , когда она стоит перед и после  $a$ .

Часто контекстно-зависимые L-системы также называются  $\Pi$ -системами. В пределах класса  $\Pi$ -систем 1L-системы рассматривают один, а 2L-системы — два соседних символа.<sup>19</sup>  $(k, l)$ -системы относятся к порождающим правилам, в которых левый контекст  $\alpha$  состоит из  $k$ , а правый контекст — из  $l$  символов.

Рисунок 9 показывает примеры кривой Коха<sup>20</sup>, создаваемой D0L-системой, с разной глубиной итерации и следующими правилами:

$$\begin{aligned} \varphi &= 60^\circ \\ \text{аксиома} &= F \\ P: F &\rightarrow F + F - -F + F \end{aligned}$$

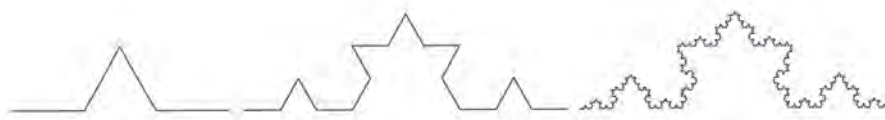


Рис. 9. Кривые Коха. Глубина рекурсии: 1, 2, 10.

Если множество правил расширяется символом  $f$ , который проходит расстояние, не черчивая линию, могут создаваться структуры, разграниченные друг от друга, как показано на рис. 10.

$$\begin{aligned} \varphi &= 90^\circ \\ \text{аксиома} &= F + F + F + F \\ P_1: F &\rightarrow F + f - FF + F + FF + Ff + FF - f + FF - F - FF - Ff - FFF \\ P_2: f &\rightarrow ffffff \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Пример:  $P_1$  и  $P_2$  для 1L, а  $P_3$  — для 2L-систем.

<sup>20</sup>Разработана шведским математиком Хельге фон Кохом примерно в 1906 г.

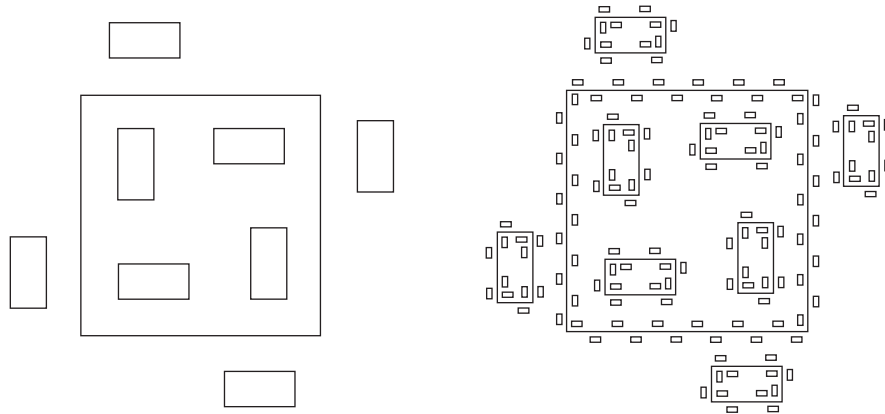


Рис. 10. Структура с глубиной рекурсии 1 и 2.

Пример DOL-системы приводится посредством графического представления кривой дракона<sup>21</sup>, которая в этом случае может быть создана с помощью правил подстановки для двух расстояний « $F$ » и « $G$ » одной и той же длины, а также следующих правил:

$$\varphi = 45^\circ$$

0 аксиома:  $F$

$$P_1: F \rightarrow -F ++G$$

$$P_2: G \rightarrow F --G+$$

Благодаря параллельным подстановкам производные *глубин рекурсии* 1–3 на кривой дракона следующие (скобки указывают замененные выражения):

$$RT_1: -F ++G,$$

$$RT_2: -(-F ++G) ++(F --G+),$$

$$RT_3: -(-(-F ++G) ++(F --G+)) ++((-F ++G) --(F --G+)).$$

На рисунке 11 показаны кривые дракона с глубинами рекурсии 1, 2, 3, 5, 13.

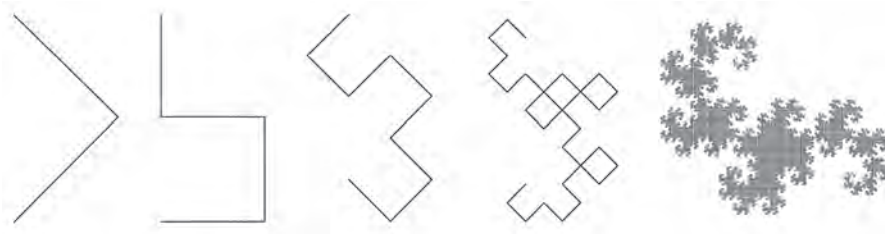


Рис. 11. Кривые дракона с разными глубинами рекурсии.

<sup>21</sup> Данная кривая называется также «драконом Хартера–Хейтуэя», была создана в 1960-х годах Джоном Хейтуэем, Брюсом Бэнксом и Уильямом Хартером.

#### 4.1.2. Детерминированные и стохастические L-системы

В *детерминированной L-системе* есть только одно  $\chi \in V^*$  для каждого  $\alpha \in V$ . Если  $\chi$  может быть выбрано с определенной степенью свободы, система называется *стохастической L-системой*, обозначаемой в виде четверки  $\{V, \omega, P, \pi\}$ . Функция  $\pi$  отображает соответствующего предшественника ( $\alpha$ ) на вероятностях предшественника ( $\chi$ ). Общая сумма всех вероятностей  $\chi$ , присваиваемых конкретному  $\alpha$ , должна быть равна 1. Правила подстановки могут быть обозначены следующим образом:

$$\begin{aligned} P_1 &= a \rightarrow^2 aba, \\ P_2 &= a \rightarrow^3 bab, \\ P_3 &= a \rightarrow^5 abb. \end{aligned}$$

Соответственно, подмена  $a$  выполняется, например, с вероятностью 20% по  $P_1$ , с вероятностью 30% по  $P_2$  и вероятностью 50% по  $P_3$ .

На рис. 12 показан наглядный пример разных структур стохастической L-системы, основанной на следующих правилах<sup>22</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi &= 45^\circ \\ \text{аксиома: } &F \\ P_1: F &\rightarrow F[+FF]F[-F]F : 1/3 \\ P_2: F &\rightarrow F[+F]F : 1/3 \\ P_3: F &\rightarrow F[-FF]F : 1/3 \end{aligned}$$

#### 4.1.3. Параметрические и непараметрические L-системы

В *параметрической L-системе* (также: *параметризованной L-системе*) применение правил подстановки может осуществляться при выполнении конкретных условий. В этой системе порождающее правило состоит из предшествующего элемента, условия и последующего элемента. Символы могут изменять свои значения в процессе подстановки, заставляя выбирать разные порождающие правила. Значения, которые принимают последующие символы, могут быть сделаны зависимыми друг от друга с помощью параметрической L-системы. В музыкальном контексте эти возможности позволяют сформулировать правила, например, такие: «переместить предшествующий звук на один полутон» или «если звук достигается с помощью большого шага интервала, сделать возможной только вторую прогрессию».

На рис. 13 показан наглядный пример параметрической L-системы. Здесь указаны переменные, приведено начальное значение для  $F$  и сформулировано условие преждевременного прекращения выполнения:<sup>23</sup>

$$\begin{aligned} a &= 86; \quad p = 0.3; \quad q = (1 - p); \quad h = ((p * q)^{0.5}); \quad \text{Аксиома: } F(0.8) \\ F(x) &: x > 0.03 \rightarrow F(x * p) + (a)F(x * h) - (a + a)F(x * h) + (a)F(x * q). \end{aligned}$$

L-системы могут также применяться для манипулирования символьными цепочками, так что количество символов не обязательно увеличивается в каждом процессе подстановки.

<sup>22</sup>Дроби после двоеточия указывают вероятности выбора порождающего правила.

<sup>23</sup>Синтаксис «виртуальной лаборатории» представлен здесь в упрощенном виде.

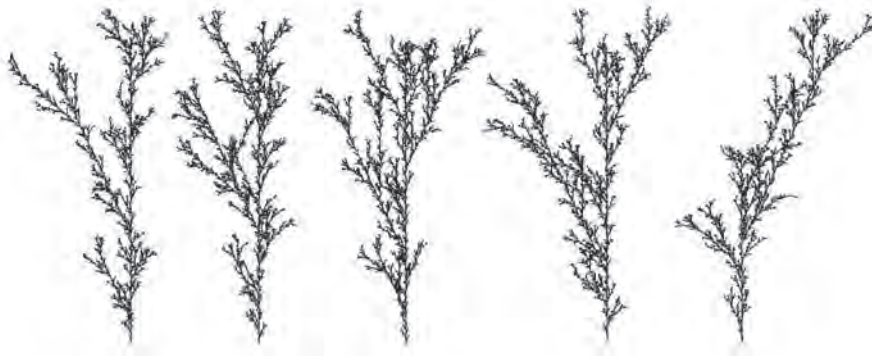


Рис. 12. Разные генерации стохастической L-системы с глубиной рекурсии, равной 7.

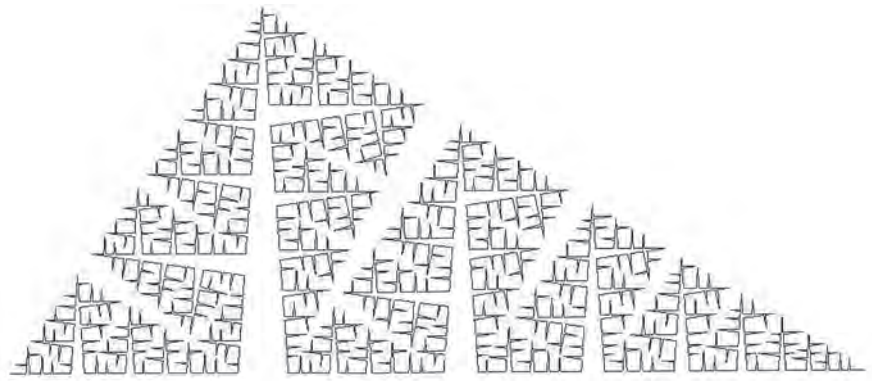


Рис. 13. Пример генерации параметрической L-системы.

В этом смысле, например, следующий набор правил заставляет букву  $a$  «перемещаться по» символьной цепочке:

Аксиома:  $aXXXX$ ,

$P_1: a < X : X \rightarrow a$ ,

$P_2: a \rightarrow X$

(если  $X$  расположено после  $a$ , подставить  $a$  вместо  $X$ , подставить  $X$  вместо  $a$ ),

Результаты:  $aXXXX$ ;  $XaXXX$ ;  $XXaXX$ ;  $XXXaX$ ;  $XXXXa$ ;  $XXXXX$ .

## 5. Хаос и самоподобие в алгоритмической композиции

В контексте разнородной области теории хаоса алгоритмической композиции часто присваиваются разные подходы, связанные с музыкальной реализацией *дробного шума*, отображением фракталов и аттракторов, а также с различными аспектами самоподобия. Не рассматривая теорию хаоса в целом, самоподобные структуры в области алгоритмической композиции можно очень хорошо смоделировать с помощью систем Линденмайера, которые, аналогично генеративной грамматике, делают возможной реализацию сложных композиционных решений.

### 5.1. Дробный шум

Часто применяемая форма генерации музыкальной структуры из области теории хаоса использует различные формы того, что известно как дробный шум.<sup>24</sup> Данный термин описывает различные формы шума, различающиеся по своей *спектральной плотности*, выражая распределение мощности шума с частотой. *Белый шум* (рис. 14, сверху) характеризуется здесь отношением  $1/f^0$  и описывает стохастический процесс *некоррелированных* случайных значений. Как и в случае с повторно бросаемыми костями, числа на сторонах костей никак не связаны друг с другом. Высоко *коррелированным* вариантом, означающим, что значения в последовательности сильно зависят друг от друга, является *броуновский шум* (рис. 14, в середине), показывающий спектральную плотность  $1/f^2$ . Здесь, например, только граничащие численные значения могут следовать друг за другом. Наиболее интересной формой, касающейся генезиса музыкальной структуры, является *розовый шум*, также называемый  *$1/f$ -шумом* (рис. 14, внизу), поведение которого находится где-то между вышеупомянутыми крайними значениями.

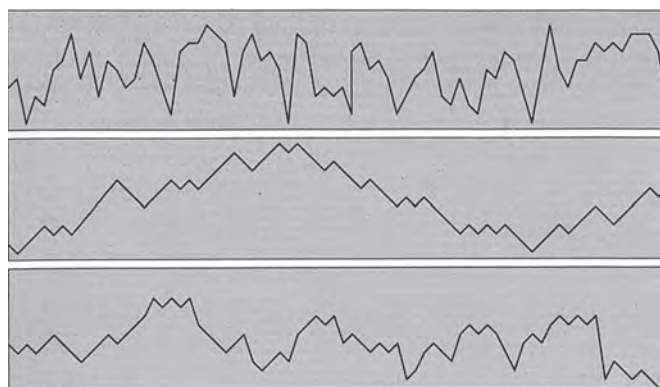


Рис. 14. Характеристики белого, броуновского и розового шума.

При музыкальном отображении, например по высотам звука, характеристики розового шума представлены в виде прогрессии, в которой ступенчатое движение и мелодичные скачки находятся в сбалансированном соотношении.

Рихард Ф. Фосс и Джон Кларк описали характеристики спектральной плотности в записях различных музыкальных жанров и показали их параллели с особенностями  $1/f$ -шума: «Наблюдения за музыкой указывают на то, что  $1/f$ -шум является хорошим выбором для стохастической композиции. Композиции, в которых частота и длительность каждой ноты определялись источниками  $1/f$ -шума, имели приятное звучание. Композиции, которые создавались источниками белого шума, звучали слишком беспорядочно и хаотично, в то время как те, что создавались  $1/f^2$ -шумом, звучали слишком коррелированно» [13]. Фосс и Кларк распространили свою одномерную модель на двухголосовую структуру, которая является частично коррелированной и ритмическая форма которой также может быть разработана с использованием  $1/f$ -шума.<sup>25</sup> На основе трудов Фосса и Кларка Чарлз Додж и Томас А. Джерс [15, с. 368 и далее] описали генерацию  $1/f$ -последовательностей и привели примеры музыкальных отображений этих различных форм шума.

<sup>24</sup>Термин «дробный шум» был введен Мандельбротом и математиком Джоном Ван Нессом в 1968 г., ср. [12]. «Дробный шум» часто называется также «фрактальным шумом».

<sup>25</sup>Что касается музыкального смысла  $1/f$ -шума, см. также [4, с. 374–375]; распространение подхода Фосса и Кларка в отношении возможностей вмешательства см. также [14].

Додж [16] описал музыкальную структуру, состоящую из трех мелодических строк (голосов) на основе  $1/f$ -шума. Для каждой строки определяется конкретное число разных классов высоты звука, которые должны быть произведены выходом  $1/f$ -шума. Это означает, что новые классы высоты звука производятся до тех пор, пока не будет достигнуто требуемое количество разных значений. После того как таким образом будет генерирована первая строка, программа создаст вторую строку с помощью той же процедуры: для каждой ноты в первой строке производится последовательность нот второй строки, пока не будут генерированы все ноты второй строки. Этот процесс осуществляется также для генерации третьей строки путем создания последовательности нот третьей строки для каждой ноты во второй строке. Результатом является трехголосовая структура возрастающей плотности. Для определения текущих длительностей создается четвертая строка, ноты которой, однако, не включены в партитуру, но определяют ритмическую длину для каждой ноты третьей строки. Если, например, первой ноте третьей строки будут присвоены четыре ноты четвертой строки, а второй ноте — восемь нот, то в результате мы получим двойную длительность второй ноты, и т. д. Следовательно, данный процесс будет продолжаться до первого голоса, пока не будут получены все ритмические значения. Результатом является самоподобная структура, ритмическая тонкая сегментация которой создается в зависимости от достижения конкретного «тонального разнообразия».<sup>26</sup>

## 5.2. Хаотические системы

Джефф Прессинг [18] отобразил *орбиту* систем нелинейных уравнений (также называемых нелинейными отображениями) на музыкальные параметры. Вывод отображения используется для регулирования высоты звука, длительности, времени обработки входного воздействия, динамики, структурной плотности и времени между нотами отдельных событий синтезированных звуков. Так, например, объем совокупности (вывод) логистического уравнения преобразуется в соответствующий диапазон высот звука через  $F = 2^{(cx+d)}$ , где постоянная  $c$  равна диапазону в октавах, а  $2^d$  — самой низкой высоте производимого звука (в Гц). Так как значение объема совокупности находится в диапазоне между 0 и 1, оно также непосредственно используется для выражения времени между нотами. Другие параметры, такие как динамика и обработка входного воздействия, также вытекают из получающихся значений, подвергаясь различным арифметическим операциям. Чтобы получить разные, но тем не менее скоррелированные значения для музыкальных параметров, указываются сложные стратегии отображения для систем уравнений с размерами до четырех. На рисунке 15 показана музыкальная структура, получающаяся из четырехмерного отображения.

Рикк Бидлак [19] также отобразил орбиту систем двумерных, трехмерных и четырехмерных уравнений на музыкальные параметры. Музыкальные текстуры, которые, например, могут быть получены с помощью уравнения Эно, для Бидлака, однако, не представляют определенных музыкальных результатов<sup>27</sup>: «Вместо того, чтобы рассматривать решения хаотических систем как музыку в собственном смысле слова, все-таки, вероятно, лучше всего полагать такой вывод сырым материалом определенной и потенциально полезной музыкальности. Конечно, будет столько же способов применить хаос к музыкальному решению, сколько есть композиторов, заинтересованных в том, чтобы делать это» [19, с. 2]. Та-

<sup>26</sup>Исчерпывающий подход к самоподобным редукциям комбинаций интервалов можно найти в теоретической работе композитора Бернхарда Ланга, см. [17].

<sup>27</sup>В этом контексте см. также работу Майкла Гогинса [20], который интерпретирует представления IFS как музыкальные партитуры.



Рис. 15. Музыкальное отображение системы четырех уравнений, созданное Прессингом [18, с. 43] (©1988 Массачусетский технологический институт).

кая интерпретация данных структурообразующего алгоритма делает возможным (не только при использовании теории хаоса) творческий подход к реализации отдельных композиционных решений.

Другой интересный подход, примененный Джереми Личем и Джоном Фитчем [21], позволяет вывести древовидную структуру из орбиты хаотической системы. Конструкция древовидной структуры, навеваемая работами Лердаля и Джэккендоффа (см. главу 4), состоит из иерархической конфигурации масштабов, значений нот и результатов интерпретации значений орбиты как иерархических позиций узлов, как показано на рис. 16а. Конкретные значения нот производятся путем интерпретации узлов более высокого иерархического порядка как высот звука, структурирующих мелодическую прогрессию. Эти высоты звука служат поворотными пунктами получающейся мелодической прогрессии. Кроме того, в зависимости от их расстояния до следующего сегмента (т.е. поддерева), они указывают разный размер для сегмента интервала (рис. 16b).

## 6. Системы Линденмайера в алгоритмической композиции

В одной из своих ранних работ Пжемыслав Прусинкевич [22] описал простое отображение генерации значений нот от «черепашьей» интерпретации систем Линденмайера на примере кривой Гильберта. На графике ноты изображены следующими друг за другом горизонтальными линейными сегментами; длины сегментов интерпретируются как длительности тонов. Высоты звука проистекают из вертикальной позиции сегментов и отображаются на ступенях С мажорной гаммы (рис. 17).<sup>28</sup>

<sup>28</sup> Но это фактически представляет лишь музыкальное отображение графической интерпретации L-системы.

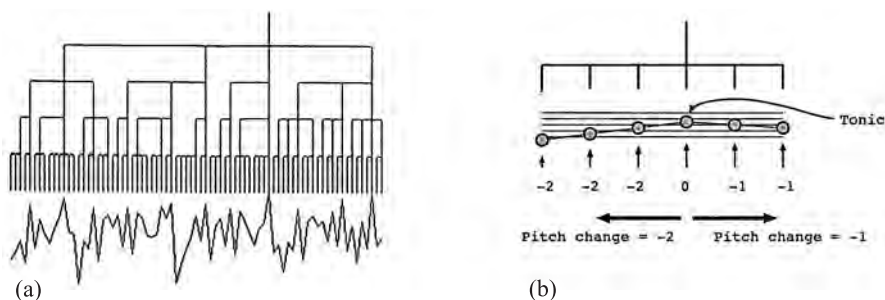


Рис. 16. Хаотическая последовательность с соответствующей древовидной структурой (а); мелодическая прогрессия в поддереве (b) [21, с. 31, 29] (©1995 Массачусетский технологический институт).

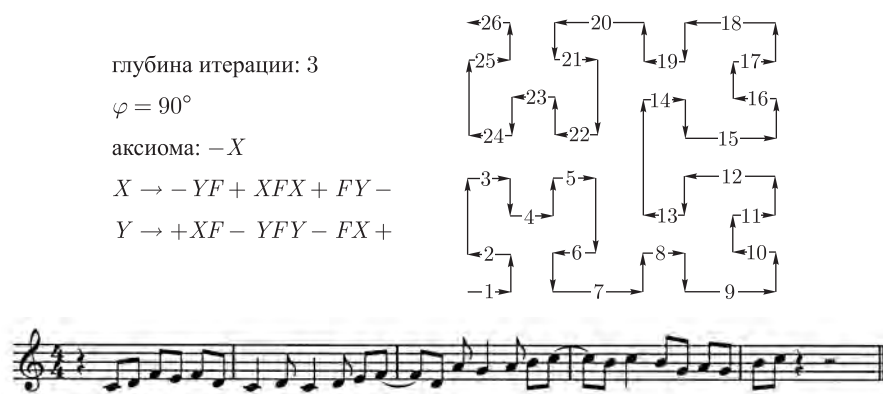


Рис. 17. Отображение кривой Гильберта на тонах гаммы.

Джон Маккормак [23] сравнил стохастические подходы, модели Маркова, разные варианты генеративной грамматики и системы Линденмайера с точки зрения их пригодности для создания музыки. В конструкции растяжимой системы Маккормак вводит программную архитектуру для алгоритмической композиции. Система предусматривает возможность применения контекстно-независимых и параметрических L-систем; при использовании иерархически структурированных грамматик предусматриваются изменяющиеся возможности генезиса музыкальной структуры.

Иерархические грамматики построены подобно D0L-системам; однако целые грамматики могут использоваться для отдельных символов последующего элемента. Хотя каждая из различных грамматик расширяется независимо, можно установить структурные отношения между отдельными системами перезаписи посредством параметризации. Система Маккормака использует понятие «виртуальных игроков», модулей, ответственных за голос или инструмент и каждый из которых регулируется своей собственной системой перезаписи. Схема обработки показана на рис. 18: чтение и синтаксический анализ, применение аксиомы к текущей символьной цепочке, рекурсивное применение подстановок на текущей символьной цепочке и, наконец, вывод результатов как значений MIDI.

В этой системе такие параметры, как высота звука, длительность, тембр и различные управляющие устройства могут регулироваться внутри полифонической структуры. Для этого определяются дополнительные символы в рамках правил перезаписи, которые, в зависимости от позиции, могут выражать контекстуальные зависимости, характерные для музыки. В этом смысле, например, выражение « $(CE)|(GC) \rightarrow D(CE)$ » означает: ес-



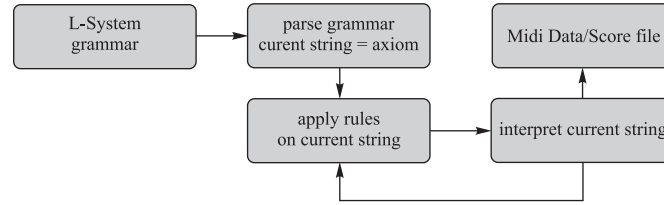


Рис. 18. Стадии обработки в системе Маккормака.

ли текущая гармония состоит из нот  $G$  и  $C$ , проигрываемых одновременно, и им предшествовали  $C$  и  $E$ , проигрывавшиеся одновременно, то необходимо проиграть  $D$  текущей длительности, после чего следуют  $C$  и  $E$ , проигрываемые одновременно.

### 6.1. Методики отображения различных систем Линденмайера

В своей диссертации Роджер Лук Дюбуа [24] описал разные возможности отображения систем Линденмайера на музыкальные параметры и, следовательно, разработал прикладную систему реального времени, в которой музыкант выполняет ввод оперативных данных. Дюбуа проводит различие между своим подходом и методиками отображения, основанными на реализации «черепаших» графиков. В этой системе «черепахи» графики служат только для визуализации структуры L-системы; L-системы отображаются на музыкальные параметры с помощью символов отображения L-систем на музыкальные элементы. Пример такого представления приведен с помощью следующей системы перезаписи, в которой число конкретных музыкальных событий может быть присвоено каждому символу L-системы в отдельности:

Аксиома:  $X$ ,

Глубина итерации: 5,

$$P_1: X \rightarrow F - [[X] + cX] + F[+FcX] - X,$$

$$P_2: F \rightarrow FF.$$

Следующий раздел показывает символьную цепочку, возникающую в пятом шаге итерации:

$$\begin{aligned}
 & FFFFFFFFFFFFFFFFFF - [[FFFFFFFF - [[FFFF - [[FF - [[F - [[X] + cX] + F[+FcX] - \\
 & - X] + cF - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] + FF[+FFcF - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] - F - \\
 & - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] + cFF - [[F - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] + cF - [[X] + cX] + \\
 & + F[+FcX] - X] + FF[+FFcF - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] - F[[X] + cX] + F[+FcX]X + \\
 & + FFFF[+FFFFcFF - [[F - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] + cF - [[X] + cX] + F[+FcX] - \\
 & - X] + FF[+FFcF - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] - F - [[X] + cX] + F[+FcX] - X] \dots
 \end{aligned}$$

Последующий элемент правила перезаписи  $p1$  четко представлен в полученной символьной цепочке; по этой причине Дюбуа применяет изменяющееся отображение, которое в разных формальных сегментах композиции создает разные характерные последовательности высот звука, как показано в таблице 3. На рис. 19 показано музыкальное отображение цепочки  $F - [[X] + cX] + F[+FcX] - X$ ; « $X$ » интерпретируется как остаток в сегментах  $A$  и  $F$  (рис. 19, вверху), а также  $B$  и  $H$  (рис. 19, внизу). Хотя в результате этих различных представлений последовательная музыкальная интерпретация системы Линденмайера

отменяется, тем не менее, можно вполне узнать характерные символьные цепочки в различных музыкальных сегментах через аналогичные мелодические контуры.

Таблица 3. Отображение символов Линденмайера по высоте звука.

Pitch Class	A	B	C	D	E	F	G	H	I
C0	F	[	[	-	(P)	F	c	[	
C#/Db1		]						]	
D2	]			+	+	]	[		+
D#/Eb3	(P)	F		]			(P)	F	
E4			-		-	(P)	F		-
F5	+	-	+		[	+		-	[
F#/Gb6		+					]	+	
G7	-		(P)	F	c	-	+		c
G#/Ab8		(P)	F	[					
A9	c		c	(P)	F	c	-	(P)	F
A#/Bb10	[	c	]	c	]	[		c	]
B11									



Рис. 19. Отображение на высоты тонов и остатки в различных сегментах.

Другую форму символического отображения для генерации полифонической структуры Дюбуа демонстрирует следующий пример с помощью контекстно-зависимой системы Линденмайера:

Аксиома:  $bab$ ,

$P_1: A < B > B \rightarrow BA$ ,

$P_2: A < A > B \rightarrow AB$ ,

$P_3: A < B > B \rightarrow B$ ,

$P_4: B < A > \rightarrow AA$ .

Для первых подстановок мы получаем следующие символьные цепочки:

$BAB$  (аксиома),

$BAAB$ ,

$BAAABV$ ,

*ВААВВВВВ,*  
*ВАААВВВВВВВВВВ,*  
*ВААВВВВВВВВВВВВВВВВВВ.*

Дюбуа интерпретирует каждый символ как последующий шаг полутона через лежащий в основе корневой тон; но так как буква *В* представляет собой набор нот, *А* выполняет функцию хроматического «промежутка», пропуская соответствующую ноту на этой позиции (рис. 20).



Рис. 20. Отображение для полифонической структуры.

Генерированные аккорды могут мелодично отображаться на монофоническую ритмическую структуру (рис. 21), в то время как *В* определяет 1/16 ноту, а *А* указывает 1/16 фермату, например, *ВА* от аксиомы *ВВВ* становится 1/16 нотой с 1/16 ферматой, как можно увидеть на иллюстрации, где первая нота с получает длительность 1/8.



Рис. 21. Отображение аккордов на монофоническую мелодию.

Для другой формы музыкального представления применяется контекстно-зависимая L-система, создающая символьные цепочки одинаковой длины во всех генерациях:

Аксиома:  $39 * W, B, 40 * W,$

$P_1: B < B > B \rightarrow W,$

$P_2: B < B > W \rightarrow W,$

$P_3: B < W > B \rightarrow W,$

$P_4: B < W > W \rightarrow B,$

$P_5: W < B > B \rightarrow W,$

$P_6: W < B > W \rightarrow W,$

$P_7: W < W > B \rightarrow B,$

$P_8: W < W > W \rightarrow W.$

Очевидно, что эта структура также может быть представлена клеточным автоматом в форме:

состояния	111 110 101 100 011 010 001 000
следующие состояния	1 0 1 1 0 1 1 1

Вот почему система Линденмайера этого типа может равняться одномерному клеточному автомату. Эти порождающие правила генерируют форму «треугольника Серпинского».<sup>29</sup> В системе Дюбуа отображение производится с помощью представления системы Линденмайера в решетке; высоты тонов, повышающихся справа налево полутоновыми шагами, присваиваются клеткам оси X. На рис. 22 представлен фрагмент музыкального результата.



Рис. 22. Отображение «треугольника Серпинского» на полифонических структурах.

Для отображения параметрических систем Линденмайера Дюбуа ставит последующие подстановки в контекст предшествующих музыкальных событий. Символы правил перезаписи отображаются соответственно на предшествующее событие, так что могут быть применены, например, такие правила, как «переместить следующую ноту на одну треть» или «уменьшить текущую длительность на конкретное значение». Представление высот звуков может быть основано на классах высот звуков или на шагах интервалов. Длительность каждого музыкального события представляет собой относительное значение, которое может быть пропорционально укорочено или удлинено за счет применения специальных правил. Это означает, что, например, если имеется текущее значение четверти, после конкретного символа, все следующие значения будут иметь длительность одной восьмой ноты. Следовательно, поскольку музыкальные параметры, такие как высота звука и длительность, всегда будут определяться в зависимости от предшествующих событий, одни и те же символы системы Линденмайера с течением времени будут также создавать разные музыкальные результаты.

Дюбуа указывает следующую систему Линденмайера в качестве интересного примера обработки высот тонов, которые в ходе подстановок сокращаются до нескольких тональных центров:

$P1: 0 \rightarrow 0$	$P4: 3 \rightarrow 3$	$P7: 6 \rightarrow 3$	$P10: 9 \rightarrow 2$
$P2: 1 \rightarrow 0$	$P5: 4 \rightarrow 7$	$P8: 7 \rightarrow 3$	$P11: 10 \rightarrow 11$
$P3: 2 \rightarrow 8$	$P6: 5 \rightarrow 5$	$P9: 8 \rightarrow 11$	$P12: 11 \rightarrow 5$

Применительно к хроматическому масштабу количество высот тонов сокращается до пяти значений после третьего процесса подстановки, как показано на рис. 23.

## 7. Синописис

Структуры, которые могут быть присвоены области теории хаоса, в большинстве случаев музыкально представляются с помощью отображения траекторий фазового простран-

<sup>29</sup>Треугольник, который делится на четыре других треугольника с помощью рекурсивной сегментации предшествующего треугольника. Эта самоподобная структура также может быть генерирована одномерным клеточным автоматом.



Рис. 23. Система Линденмайера, производящая тональные центры.

ства на музыкальные параметры. Так как поведение хаотических систем трудно предвидеть и оно реагирует с высокой степенью чувствительности на происходящие изменения начальных условий, музыкальное отображение может обеспечить широкий диапазон результатов. Главная проблема при реализации отдельных композиционных намерений с помощью хаотических систем проистекает от недостатка возможностей вмешательства и структурирования — как только выбрана лежащая в основе система уравнений и заданы начальные значения, система непрерывно будет порождать новые события, последовательность которых не может больше регулироваться. Конечно, этот принцип можно найти также в большинстве других процедур алгоритмической композиции, генерирующих ту или иную музыкальную структуру на основе системы правил любого рода. Однако формулирование таких правил, например, в рамках системы перезаписи, обеспечивает высокую предсказуемость музыкальных результатов, а следовательно, и реализацию конкретных музыкальных концепций. Но именно это сложное поведение детерминированных хаотических систем может быть большим стимулом для их использования в задачах алгоритмической композиции: «Самая большая привлекательность нелинейных динамических систем для композиционных целей состоит в их естественном родстве с характером явлений в реальном мире наряду с механической эффективностью их вычисления и регулирования. Хаотические системы позволяют генерировать множество сырых материалов в условиях, которые, тем не менее, в глобальном смысле являются единообразными. Хаотические последовательности олицетворяют процесс трансформации, внутренняя связь которых обеспечивается правилами, закодированными в уравнениях» [19].

Системы Линденмайера представляют собой системы перезаписи, подобные генеративным грамматикам, и генерируют символьные цепочки, применяя порождающие правила; первоначально они были разработаны для моделирования процессов роста. В противоположность генеративным грамматикам, где в общем требуемый вывод производится только после выполнения всех подстановок, в традиционной системе Линденмайера отдельные терминалы заменяются большим числом терминалов. Следовательно, после каждого процесса подстановки имеются символы для музыкального отображения. Вследствие этого, с одной стороны, число произведенных символов обычно значительно увеличивается в каждой генерации<sup>30</sup>; с другой стороны, система Линденмайера подвержена также развитию во времени и, следовательно, может отражать процессоподобные композиционные подходы. Благодаря этой главной особенности система Линденмайера также очень хорошо подходит для представления самоподобных структур и позволяет эффективно отображать фрактальные концепции на музыкальные параметры.

Представление музыкальной интерпретации результатов системы Линденмайера имеет большое значение. Однако стратегии, основанные на музыкальной интерпретации «чере-

<sup>30</sup>Это свойство может быть легко модифицировано соответствующими правилами перезаписи, ср. с представленной Дюбуа системой Линденмайера, порождающей символьные цепочки одной длины в каждой генерации и равной одномерному клеточному автомату.

пашьих» графиков, т. е. на использовании уже выполненного отображения как отправной точки для дальнейшего отображения, в общем не способны полностью отражать специфичное поведение системы Линденмайера в музыкальном отображении. Работа Дюбуа показывает ряд альтернативных стратегий, в которых разные формализмы системы Линденмайера используются для музыкального отображения. Именно это разнообразие возможных форм системы Линденмайера открывает широкое поле генезиса музыкальной структуры для алгоритмической композиции. Генерация музыкальной структуры может применяться как для простого музыкального представления самоподобия, так и для создания сложных музыкальных структур в рамках современного музыкального творчества.<sup>31</sup>

Для большинства вышеупомянутых подходов понятие масштаба является важным аспектом генерации музыкальной структуры. Данный термин получает новое интересное измерение у Мандельброта, который проводит различие между скейлингом и структурами, связанными масштабированием [26]. Структуры, связанные масштабированием, независимо от того, являются ли они искусственными или естественными, характеризуются несколькими доминирующими элементами масштаба. Это различие также могло бы быть использовано при классификации музыкальной структуры, которая может быть создана с использованием нескольких доминирующих формальных принципов, таких, как строгий самоподобный принцип (по аналогии с объектом, связанном масштабированием), или возникает в результате различных решений, стохастических принципов и т. п. (по аналогии с объектом масштабирования). Часто характер композиции изменяется на различных стадиях создания: начинаясь как «объект, связанный масштабированием» с помощью формального принципа, возникшая структура меняется в соответствии с личными эстетическими предпочтениями и в силу этого постепенно трансформируется в «объект масштабирования». Помимо различных структурирующих элементов композиции, «успешное» музыкальное произведение всегда будет показывать феномен возникновения<sup>32</sup>, и поэтому будет казаться, что оно преодолевает ограничения своих формальных принципов, или, как указывает Мандельброт, приводя пример из области визуального искусства: «Между прочим, в то время как максимальный размер картины равен размеру всего полотна, многим художникам удается производить такое впечатление, будто она изображает объекты большего размера. Аналогичным образом мазок кистью определяет минимальный размер, но многие шедевры портретной живописи как будто включают детали, которые физически невозможно изобразить при данном масштабе изображения» [26, с. 46, 47].

## Список литературы

- [1] Gleick J. Chaos: Making a new science. New York: Penguin books, 1987. 352 p.
- [2] Yorke J. A., Li T. Y. Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly, 1975, vol. 82, no. 10, pp. 985–992.
- [3] Poincaré H. Science and method. New York: Dover, 1952. 288 p.
- [4] Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Co., 1982. 480 p. [Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.]
- [5] Peitgen H.-O., Richter P. H. The beauty of fractals: Images of complex dynamical systems. Berlin: Springer, 1986. 200 p.

<sup>31</sup>Так, например, современный композитор Ханспетер Кибурц разработал сложные формализмы системы Линденмайера для генезиса музыкальной структуры, см. [25].

<sup>32</sup>См. раздел «Агенты» в главе 10.



- [6] Lindenmayer A. Mathematical models for cellular interaction in development // J. Theoret. Biol., 1968, vol. 18, pp. 280–315.
- [7] Prusinkiewicz P., Lindenmayer A. The algorithmic beauty of plants (The Virtual Laboratory). New York: Springer, 1990. 230 p.
- [8] Hogeweg P., Hesper B. A model study on biomorphological description // Pattern Recognition, 1974, vol. 6, nos. 3–4, pp. 165–179.
- [9] Smith A. R. Plants, fractals, and formal languages // Computer Graphics, 1984, vol. 18, pp. 1–10.
- [10] Prusinkiewicz P. Algorithmic Botany. <http://algorithmicbotany.org/>
- [11] Mech R. CPGF Version 4.0 User's Manual based on the CPGF Version 2.7 User's Manual by Mark James, Mark Hammel, Jim Hanan, Radomir Mech, Przemyslaw Prusinkiewicz with contributions by Radoslaw Karwowski. (Cited 11 Nov 2004) <http://algorithmicbotany.org/lstudio/CPFGman.pdf>
- [12] Mandelbrot B. B., van Ness J. W. Fractional brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Rev., 1968, vol. 10, no. 4, pp. 422–437.
- [13] Voss R. F., Clarke J.  $1/f$  noise in music: music from  $1/f$  noise // J. Acoust. Soc. Am., 1978, vol. 63, no. 1, pp. 258–261.
- [14] Bolognesi T. Automatic composition: Experiments with self-similar music // Computer Music Journal, 1983, vol. 7, no. 1, pp. 25–36.
- [15] Dodge Ch., Jerse Th. A. Computer music: Synthesis, composition, and performance. 2nd ed. New York: Schirmer Books, 1997. 480 p.
- [16] Dodge C. Profile: A musical fractal // Computer Music Journal, 1988, vol. 12, no. 3, pp. 10–14.
- [17] Lang B. Diminuendo: Über selbstähnliche Verkleinerungen // Beiträge zur Elektronischen Musik: Vol. 7 / Institut für Elektronische Musik (IEM) an der Universität für Musik und darstellende Kunst in Graz. Graz, 1996.
- [18] Pressing J. Nonlinear maps as generators of musical design // Computer Music Journal, 1988, vol. 12, no. 2, pp. 35–46.
- [19] Bidlack R. Chaotic systems as simple (but complex) compositional algorithms // Computer Music Journal, 1992, vol. 16, no. 3, pp. 33–47.
- [20] Gogins M. Iterated functions systems music // Computer Music Journal, 1991, vol. 15, no. 1, pp. 40–48.
- [21] Leach J., Fitch J. Nature, music, and algorithmic composition // Computer Music Journal, 1995, vol. 19, no. 2, pp. 23–33.
- [22] Prusinkiewicz P. Score generation with L-systems // Proc. of the International Computer Music Conference (1986) / Intern. Computer Music Ass. San Francisco, 1986. P. 455–457.
- [23] McCormack J. Grammar based music composition // Complex systems '96: From local interactions to global phenomena / R. Stocker, H. Jelinek, B. Durnota, T. Bossomaier (Eds). Amsterdam: ISO Press, 1996. P. 321–336.
- [24] DuBois R. L. Applications of generative string-substitution systems in computer music: Dissertation. Columbia University, 2003.
- [25] Supper M. A few remarks on algorithmic composition // Computer Music Journal, 2001, vol. 25, no. 1, pp. 48–53.
- [26] Mandelbrot B. B. Scalebound or scaling shapes: A useful distinction in the visual arts and in the natural sciences // Leonardo, 1981, vol. 14, pp. 45–47.

## Chaos and self-similarity

Gerhard Nierhaus

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 153–175 (Russian)

Originally published in: G. Nierhaus, *Algorithmic Composition: Paradigms of Automated Music Generation*, Chapter 6, Springer, 2009.

