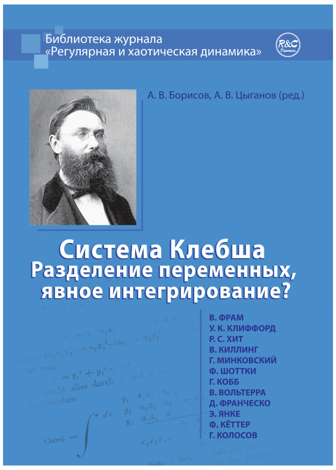
Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 1. С. 177–187.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

АКТУАЛЬНАЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

«Система Клебша. Разделение переменных, явное интегрирование?» (Сборник работ)

М.–Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2009 г.
Серия *Библиотека журнала «РХД»*
(Редколлегия серии: А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев)

Содержание сборника:



14. Г. Колосов, 1906
    О некоторых случаях движения твердого тела в бесконечной жидкости
15. Ф. Шоттки, 1926
    Об аналитической задаче о движении твердого тела в четырехмерном пространстве

Публикуется текст предисловия составителей сборника:

В сборнике собраны основные классические работы, посвященные задаче Клебша. Под этой задачей мы имеем ввиду найденный Клебшем общий случай явного интегрирования уравнений динамики твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости (уравнений Кирхгофа). Отметим, что имя Клебша носят и другие задачи, поскольку Клебш внес важный вклад во многие области математики и механики, включая теорию упругости, алгебраическую геометрию, абелевы функции и др.

Приводимые здесь работы ранее не переводились на русский язык и не были воспроизведены в том или ином виде в работах российских ученых. Ниже следует краткое введение в рассматриваемый здесь круг вопросов, а также обзор основного содержания сборника.

1. Интегрируемые случаи в уравнениях Кирхгофа и эквивалентные им системы. Задача Клебша. Система Клебша возникла при изучении уравнений Кирхгофа, описывающих движение односвязного твердого тела в бесконечном объеме идеальной безвихревой несжимаемой жидкости. В общем случае эти уравнения не являются интегрируемыми, а случай Клебша является одним из частных интегрируемых случаев. Используемые при исследовании уравнений Кирхгофа математические методы оказались очень разнообразными и интересными, в этих исследованиях объединились функциональный анализ, теория функций, алгебраическая, дифференциальная и пуассонова геометрии, теория групп и алгебр Ли.

Подробно уравнения Кирхгофа и родственные им проблемы динамики твердого тела рассмотрены в книге [3]. Там же указаны аналогии между уравнениями Кирхгофа и уравнениями, возникающими в различных областях теоретической физики. Уравнения типа Кирхгофа, в частности, возникают во многих задачах механики — это задача о движении твердого тела в нелинейных гравитационных полях, задача о движении твердого тела в пространстве постоянной кривизны, задача о движении заряженного твердого тела в магнитном поле, системы с неголономными связями и т. д. В теории солитонов некоторые решения уравнения Ландау–Лифшица также представляют собой систему Клебша, а в нанофизике эта же система служит моделью одномерных квантовых точек. Здесь мы воздержимся от перечисления и подробного обсуждения всех этих аналогий.

Мы остановимся подробнее на случае Клебша. Определим трехмерные вектора импульсивного момента M и импульсивной силы p в системе координат жестко связанной с твердым телом. Напомним, что фазовое пространство может быть отождествлено с дуальным пространством к алгебре Ли $e(3)$, и скобки Пуассона между элементами векторов имеют вид

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} l_k, \qquad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \qquad \{p_i, p_j\} = 0\,.$$

В лагранжевой форме уравнения движения твердого тела были получены Кирхгофом, годом позднее Томсоном, и в гамильтоновой форме — Клебшем:

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + p \times \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial M}. \tag{1.1}$$

Входящий в уравнения гамильтониан H является положительно определенной квадратичной формой переменных M и p

$$H = \frac{1}{2}\Big(AM, M\Big) + \Big(BM, p\Big) + \frac{1}{2}\Big(Cp, p\Big),$$

где матрицы A, C — симметрические, а матрица B произвольна. Интегралы импульсивного момента и импульсивной силы в современной терминологии функции Казимира были найдены Кирхгофом

$$I_1 = (M, p), \qquad I_2 = |p|^2 = (p, p).$$

Тем самым, для интегрируемости уравнений Кирхгофа, как и уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих движение твердого тела вокруг неподвижной точки в однородном поле тяжести, не хватает всего лишь одного интеграла. Поиск этого недостающего интеграла был одной из ключевых проблем классической механики XIX века. Задача формулируется таким образом: требуется указать еще одно условие на матрицы A, B и C, т. е. дополнительное ограничение на параметры системы и начальные данные, при котором этот недостающий интеграл существует.

Известно, что квадратичный интеграл движения для уравнений Кирхгофа может существовать для динамически симметричного тела вращения — этот случай был найден самим Кирхгофом — и еще двух случаев, первый из которых был указан А. Клебшем, а второй — В. А. Стекловым. В настоящее время второй интегрируемый случай называется системой Стеклова–Ляпунова (см. исторический комментарий в книге [3]).

Уравнения движения (1.1) в случае Клебша [35] имеют очень простой вид

$$\dot{M} = p \times Q\,p, \qquad \dot{p} = p \times M,$$

где Q — невырожденная симметрическая матрица. При этом функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Big(M, M\Big) + \frac{1}{2}\Big(Q\,p, p\Big) \tag{1.2}$$

и дополнительный квадратичный интеграл движения

$$\mathcal{K} = \Big(Q\,M, M\Big) - \Big(Q^{\vee}p, p\Big), \qquad Q^{\vee} = (\det Q)\,Q^{-1}$$

являются полиномами второй степени и по M, и по p. Задача об интегрировании данных уравнений движения кажется достаточно простой, так как оба интеграла квадратичны (известно, что в случае Ковалевской дополнительный интеграл был четвертой степени по M и Ковалевская смогла довести результат до конца). Тем не менее, эта задача, как выясняется, до сих пор полностью не решена. Этой проблематике посвящена обширная литература, часть работ приведена в этом сборнике

2. Родственные проблемы. Укажем, прежде всего, следующие три изоморфных интегрируемых случая:

1. интегрируемый случай Клебша в уравнениях Кирхгофа.
2. свободное движение четырехмерного волчка, которое мы будем называть случаем Шоттки или Шоттки–Фрама. Многомерное обобщение системы Шоттки обычно называют системой Шоттки–Манакова.
3. свободное движение трехмерного тела в трехмерном пространстве постоянной кривизны, которое мы будем называть случаем Клиффорда.

Изоморфизм первого и второго случаев был, по-видимому, известен достаточно давно; его современное изложение может быть найдено в работах [1, 28]. В первой из работ явно приведено соответствующее отображение, а во второй работе доказано, что это отображение является скрученным пуассоновым преобразованием. То, что третий случай сводится ко второму, является простым геометрическим фактом. В общем случае свободное движение N-мерного тела на N-мерной сфере сводится к вращению твердого тела размерности $N+1$ вокруг неподвижной точки. Впервые это заметил Клиффорд (см. вторую статью сборника).

Кроме этих эквивалентных интегрируемых систем, рассматриваемых в данном сборнике, нам бы хотелось также отметить классическую аналогию Стеклова, которая устанавливает изоморфизм между случаем Клебша и задачей Бруна–Тиссерана, а также изоморфизмы с задачей Гриоли (подробнее см. в [3]), с задачей Ковалевской [39], XYZ-двухузельным магнетиком Годена [40] и различными неголономными моделями [34]. В работах [38, 39] установлен траекторный изоморфизм между системой Клебша и гиростатом Ковалевской, который, однако, не является вещественным.

3. Основное содержание сборника. Настоящий сборник содержит основные классические работы по задаче Клебша. Мы при этом не приводим работы, посвященные частным случаям в задаче Клебша, например системе Неймана. Статьи в сборнике следуют в хронологическом порядке.

Первой идет работа **В. Фрама (1875)**, который развивает идеи Кэли об уравнениях Эйлера в случае произвольного числа переменных. В результате Фрам вывел уравнения движения по инерции N-мерного твердого тела вокруг неподвижной точки и, пользуясь свойствами определителей, также указал ряд интегралов, которых, к сожалению, не хватает для интегрируемости системы. Случай четырехмерного тела он рассмотрел более подробно и указал условия на коэффициенты задачи, при которых должен существовать дополнительный четвертый интеграл. Однако в явном виде этот интеграл не был выписан, хотя из данной работы его совсем не трудно извлечь, что и было сделано в работе Шоттки (1891).

Те же самые уравнения годом позже были получены **У. К. Клиффордом (1876)** при изучении движения твердого тела в пространствах постоянной кривизны. В современной терминологии эти уравнения представляют собой уравнения Эйлера на алгебрах Ли $so(N)$. В приведенной нами работе Клиффорд сосредоточился на одном частном решении и проинтегрировал уравнения движения N-мерного твердого тела при некоторых частных условиях, как говорят сейчас, на сингулярной орбите алгебры Ли $so(N)$. Отметим, что результаты Клиффорда до сих пор нуждаются в некоторой дополнительной интерпретации и осмыслении, так как в духе своего времени Клиффорд был весьма краток в изложении.

Фактически данное частное решение Клиффорда более подробно изучено в работе **Р. С. Хита (1884)**. Работа Хита носит обзорный и обобщающий характер. В ней, следуя работам Кэли и Клиффорда, систематически описывается геометрия, кинематика и динамика в пространствах постоянной кривизны с неевклидовой метрикой. Хит получает уравнения Клиффорда как частный случай более общих уравнений и проводит их решение через тэта-функции. Вследствие изоморфизма интегрируемых систем в случае Клебша этому решению отвечает случай нулевой константы площадей, т. е. сингулярная орбита алгебры $e(3)$. Данный частный случай в задаче Клебша сводится к задаче Неймана — это классический пример, который легко интегрируем и в тэта-функциях, и в явном виде.

Метод, который предлагает Хит, не основан на разделении переменных, хотя это разделение и не сложно найти. Он базируется на использовании различных свойств тэта-функций, теория которых в то времена очень активно развивалась и была чрезвычайно популярна. Об этом свидетельствуют представленные в сборнике статьи **Янке (1899, 1902)**, который, распознав в уравнениях движения уравнения для тэта-функций, использует этот факт для исследований соответствующих динамических систем. Кстати, таким же образом, не используя разделение переменных и пользуясь лишь явной подстановкой, можно решить и задачу Неймана (см. современное изложение в [5]).

Совершенно независимо от предшествующих работ, **В. Киллинг (1885)** анализирует кинематику и динамику в неевклидовых пространствах. Последняя часть его обширного мемуара посвящена динамике твердого тела. Он получает уравнения свободного движения трехмерного тела по трехмерной сфере и отмечает, что ему не удалось проинтегрировать эти уравнения, поскольку ему не хватило знания одного дополнительного интеграла. Таким образом, для задачи движения четырехмерного волчка дополнительный интеграл не был известен вплоть до 1891 года, когда он был найден Шоттки (1891).

В работе **Г. Минковского (1888)** рассмотрена общая аналогия между задачей о движении точки по эллипсоиду и уравнениями Кирхгофа при нулевой константе площадей $(M, p) = 0$. Кроме этого, данная работа интересна тем, что дает представление о работах Г. Лэмба и Т. Крейга по динамике твердого тела. Эта замечательная аналогия позволяет говорить об изоморфизме между интегрируемой задачей Якоби о движении трех частиц на линии, задачей Якоби о геодезических на эллипсоиде и случаем Клебша на нулевой константе площадей. Работу Минковского существенно дополняет более поздняя работа Колосова [8], в которой явно описан изоморфизм между этими случаями (современное изложение может быть найдено в [3, 6, 33]).

Далее следует работа **Шоттки (1891)** «Об аналитической задаче вращения твердого тела в четырехмерном пространстве», где впервые в явной форме приведен дополнительный квадратичный интеграл в задаче о движении четырехмерного твердого тела. В качестве исходной точки исследований Шоттки использует работы Кёттера 1892 года [36] и пишет, что он сам только слегка изменил рассуждения Кёттера для интегрируемого случая Клебша. С современной точки зрения задача Клебша и задача Шоттки изморфны друг другу [1, 28] и мы оставляем за читателем право судить о том, знал ли Шоттки об этом изоморфизме.

В работе Шоттки, кроме того, сделана попытка проинтегрировать уравнения движения с помощью (как это сейчас можно было бы назвать) комплексных методов алгебраической геометрии. По-видимому, анализ и результаты Шоттки не были понятны даже его современникам, да и на сегодняшний день для специалистов они выглядят несколько загадочно. Через тридцать с лишним лет, будучи уже в преклонном возрасте, Шоттки опубликовал практически под тем же названием еще одну работу о той же задаче, где и привел более детальные вычисления. Эта работа **Шоттки (1926)** также включена в сборник. Современное изложение результатов Шоттки может быть найдено в [1, 31].

Независимо от Шоттки недостающий интеграл для уравнений Эйлера для четырехмерного волчка был получен **Д. Франческо (1902)** при исследовании движения твердого тела в пространствах постоянной кривизны. Помимо того, что Франческо явно указывает сам интеграл, он также приводит метод интегрирования уравнений движения. Отметим, что целью автора является не получение решения в тэта-функциях, а сведение уравнений движения к уравнению Гамильтона–Якоби и получение решения в квадратурах. Это решение он находит явно, но, к сожалению, полученные им квадратуры требуют обращения к уравнению четвертой степени, которое нельзя привести к замкнутому виду, так как скобка Пуассона для соответствующих переменных разделения не является канонической. Франческо развивает идеи Волтерра относительно явного интегрирования, основанные на метода характеристик. Перевод цитируемой им статьи Вольтерра (1897) также приводится в этом сборнике.

Результаты Франческо о сведении уравнений движения четырехмерного волчка к уравнению Гамильтона–Якоби полностью согласуются с результатами **Г. Кобба (1895)**, который также свел задачу к уравнениям Гамильтона–Якоби, получил квадратуру, которая, хотя и имеет вещественный вид, также требует обращения к уравнению четвертой степени. Квадратуры, полученные Франческо и Коббом не дали до сих пор возможности ответить на вопрос об однозначности общего решения уравнений Кирхгофа в случае Клебша.

Здесь можно отметить следующую интересную деталь: если сопоставить работы Кобба и Франческо, то очевидно, что Кобб явно понимает и использует тот факт, что уравнения Кирхгофа являются гамильтоновыми, и что за ними стоит (пуассонова) гамильтонова структура; в литературе этот результат, как правило, связывают с работой С. П. Новикова [13]. С другой стороны, Франческо явно понимает и использует тот факт, что фазовое пространство для уравнений динамики четырехмерного твердого тела представляет собой алгебру $so(4)$. По крайней мере, он, пользуясь прямым разложением алгебры $so(4)$ на сумму подалгебр $so(3)$, ввел канонические переменные, которые и использовал затем для интегрирования.

В сборник не вошли статьи Кёттера о системе Клебша [36], так как они практически полностью воспроизведены в книге Стеклова [22] и современных работах [5, 38]). Вместо этих двух наиболее известных его работ мы приводим здесь работу **Кёттера (1900)** о случаях интегрируемости движения твердого тела в жидкости, открытых Стекловым и Ляпуновым. Хотя это довольно краткая статья, но из нее можно извлечь явные квадратуры, правда, у самого Кёттера все также приводятся довольно громоздкие комплексные формулы. Эта работа послужила толчком к, на наш взгляд, наиболее изящному решению для явного интегрирования случая Стеклова–Ляпунова [43]. При интегрировании уравнений движения А. В. Цыганов пользуется изоморфизмом между случаем Стеклова–Ляпунова и движением точки по сфере в потенциале, допускающем разделение переменных в эллиптических координатах.

В этом сборнике мы также приводим статью **В. Вольтерра (1897)**. Классические работы Вольтерра, переведенные на русский язык, в основном посвящены интегро-дифференциальным уравнениям и математической теории борьбы за существование. Исследования Вольтерра по динамике твердого тела, несомненно, так же заслуживают самого пристального внимания. В данной работе, в основном изучавшейся специалистами по неголономной механике (см., например, [12]), Вольтерра выводит свои знаменитые уравнения неголономной механики, пользуясь квази-скоростями и квази-координатами. С другой стороны, он предлагает общий метод интегрирования так называемого спонтанного движения твердого тела. Отметим, что Франческо (по-видимому, один из учеников Вольтерра) исследует движение четырехмерного волчка, основываясь именно на методе Вольтерра и постоянно обращаясь к его статье.

В сборнике также приведена работа **Колосова (1906)**, на которой мы еще остановимся подробнее.

4. Краткий обзор других работ, посвященных задаче Клебша. Прежде всего следует отметить, что значительные достижения в изучении уравнений Кирхгофа и, в частности, системы Клебша, принадлежат таким российским ученым, как Ляпунов, Стеклов, Чаплыгин и Колосов.

Магистерская диссертация В. А. Стеклова «О движении твердого тела в жидкости» [22], напечатанная в 1893 году, дает весьма существенное дополнение к результатам Клебша и представляет собой наиболее подробное и полное изложение ранее найденных результатов; в этой работе были указаны два новых случая интегрируемости уравнений. Кроме того, Стеклов систематически, в существенно более простом виде изложил результаты Кёттера, так что фактически для русского читателя работы Кёттера стали доступны именно после выхода диссертации Стеклова. Интересно отметить, что на полях одного из экземпляров диссертации, хранящегося в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова, один из редакторов данного сборника обнаружил замечательные комментарии, в которых был дан блестящий анализ результатов Кёттера о разделении переменных в модели Клебша. Оказалось, что этот экземпляр принадлежал А. М. Ляпунову, а комментарии, к сожалению теперь частично утраченные после реставрации, были написаны его рукой. Конечно же, Ляпунов не был удовлетворен результатами Кёттера. Он попытался найти свой путь решения. В своих исследованиях Ляпунов практически воспроизвел результаты Франческо и Кобба о частичном разделении переменных, но, видимо, узнав об этих результатах, оставил свои собственные выводы неопубликованными. В настоящее время в издательстве «Регулярная и хаотическая динамика» ведется работа по подготовке наборного издания этих и ряда других неопубликованных работ А. М. Ляпунова по движению твердого тела, хранящихся в рукописном виде в Санкт-Петербургском Архиве Российской академии наук. Кроме того, готовится к изданию сборник переводов статей В. А. Стеклова по динамике твердого тела на французском языке.

В книге В. А. Стеклова [22] отмечены также некоторые частные случаи, для которых решение может быть найдено в явном виде. Эти случаи более детально изучены в работах Г. В. Колосова [7, 37]. В наших обозначениях эти случаи отвечают совпадению двух из трех собственных значений матрицы Q (1.2), и поэтому система обладает дополнительным линейным интегралом движения, который Колосов обозначает Γ_1. Все эти частные случаи можно рассматривать как обобщенный квадратичный волчок Лагранжа, интегрирование которого можно провести в полной аналогии с обычным волчком Лагранжа с линейным потенциалом. Колосов также нашел новые частные решения задачи Клебша. Небольшая статья [37] приведена в этом сборнике (более детальное изложение см. в его работе [8]). Интересно, что все движения в случаях, указанных Колосовым, являются периодическими. Это связано с наличием не только линейного интеграла типа Лагранжа, но и дробно-рационального интеграла.

Следует также отметить работы С. А. Чаплыгина [30], которому, по словам Н. Е. Жуковского «удалось в случаях Клебша и Кирхгофа дать такие же простые геометрические интерпретации, какие дал Пуансо для движения по инерции в пустоте». В качестве примера такой «простоты» приведем еще один отрывок из отзыва Жуковского на эти работы: «для случая Клебша доказано, что, отбросив некоторое постоянное винтовое движение относительно оси импульсов, можно все движение тела получить через его соединение с некоторым эллипсоидом, который катится без скольжения по краям винтового желоба, образованного двумя геликоидальными поверхностями прямоугольного образования, оси которых совпадают с осью импульса». Первая из этих работ «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости» была написана во время подготовки к магистерскому экзамену, напечатана в 1893 году и удостоена премии имени профессора Н. Д. Брашмана. Вторая работа на ту же тему «О некоторых случаях движения твердого тела» была напечатана в 1897 году и была защищена С. А. Чаплыгиным как магистерская диссертация. В этой работе дана полная геометрическая интерпретация движения тела в случае Вебера и изучены случаи, в которых задача допускает один или несколько линейных интегралов движения. В своей неопубликованной при жизни работе «Характеристическая функция в динамике твердого тела» [30] (она была подготовлена к печати Л. Н. Сретенским) Чаплыгин снова возвращается к системе Клебша и детально изучает случай Неймана, т. е. случай, когда один из геометрических интегралов движения равен нулю.

Современные авторы также неоднократно обращались к исследованию задачи Клебша и системы Шоттки. К сожалению, полученные результаты зачастую лишь уточняют результаты классиков и не могут считаться принципиально новыми. Так, в работе [27] получены квадратуры, построенные Франческо–Коббом, а в работе [10] предложен более общий подход к этим квадратурам.

Интегрирование уравнений динамики в тэта-функциях для данных интегрируемых систем обсуждается, например, в работах [5, 31, 32, 34]. В современном подходе используется представление Лакса и новые алгебро-геометрические методы интегрирования уравнений движения. Однако, так как итоговые результаты полностью повторяют уже полученные классиками (например, результаты Янке), и в этом случае остаются открытыми те же проблемы, связанные с вещественностью решения и явным определением периодов, входящих в решение тэта-функций.

Многомерные обобщения системы Клебша были получены Переломовым [15], а системы Шоттки были построены Манаковым [9], используя матрицы Лакса для интегрируемых систем на алгебрах Ли. В результате сравнения матриц Лакса для обобщенных систем Манакова и Переломова в работе Федорова [23] доказан изоморфизм их инвариантных торов и получены формулы пересчета друг в друга констант первых интегралов. В работе [41] получены многомерные обобщения системы Клебша с добавленным к ней спином. Системы Клебша и Шоттки на решетке и их интегрируемые обобщения обсуждаются в книге [42].

Построенные различными методами матрицы Лакса можно использовать для построения переменных разделения и разделенных уравнений (см., например [4, 29]). Напомним, что в методе Склянина переменные разделения определяются как полюса функции Бейкера–Ахиезера, собственной функции оператора Лакса, нормированной «подходящим» образом, и эти переменные разделения лежат на спектральной кривой матрицы Лакса. Однако, в случаях Клебша и Шоттки использование стандартной постоянной нормировки приводит к тому, что эти полюса не коммутируют друг с другом и их число больше числа степеней свободы. Эти проблемы неинволютивности и избыточности переменных разделения решены в работе Склянина [40] для системы Шоттки (двухузельного эллиптического магнетика Годена) с помощью введения динамической нормировки функции Бейкера–Ахиезера.

Используя результаты Склянина и изоморфизм между данными интегрируемыми системами, мы можем построить соответствующие переменные разделения и для случая Клебша. В обоих случаях переменные разделения будут комплексными функциями исходных физических переменных, которые, возможно, удобно использовать в квантовой механике, но совершенно невозможно использовать, например, для качественного анализа уравнений движения. Заметим, что для системы Стеклова–Ляпунова в работе Цыганова [43] предложена динамическая нормировка функции Бейкера-Ахиезера, которая приводит к вещественным переменным разделения, но за это приходится заплатить тем, что эти переменные практически невозможно использовать в квантовом случае.

В работе [10] предложено вещественное, так называемое «частичное» разделение переменных для волчка Клебша и высказано предположение, что это «частичное» разделение переменных лучшее, на что можно рассчитывать для моделей, где род соответствующей алгебраической кривой больше, чем число степеней свободы. Однако это разделение не может рассматриваться как альтернатива классическому методу разделения, поскольку, в отличие от последнего, из него нельзя фактически ничего извлечь для исследования динамики и, как правило, оно имеет комплексную форму.

Таким образом, задача нахождения корректного разделения переменных для системы Клебша пока остается нерешенной. В связи с этим можно высказать предположение, основанное на наблюдениях и пока никак не формализованное, что это разделение невозможно при применении какого-то подходящего, достаточно простого класса функций. Эта гипотеза о существовании препятствий полноценному вещественному разделению переменных, конечно, вызывает сожаление, так как решение с разделением переменных обладает очевидным преимуществом, давая явные формулы для топологического анализа задачи, построения переменных действие–угол, процедуры квантования и пр. Другая точка зрения, в пользу которой говорят современные топологические и компьютерные исследования, состоит в том, что явное разделение переменных не так уж и незаменимо при анализе интегрируемых систем. И для случаев, когда разделение переменных оказывается неизвестным, возможно детальное топологическое исследование интегрируемых систем. Именно задача Клебша и послужила толчком для разработки топологических методов, не опирающихся на разделение переменных. Идея такого анализа была предложена и развита в работах М. П. Харламова и Т. И. Погосяна [16–21, 24–26], в которых для задачи Клебша была получена полная топологическая картина, т. е. найдены слоения торов Лиувилля при различных константах энергии площадей и дополнительных интегралов, указаны критические уровни и т. д. Более общий топологический подход к задаче Клебша и к волчку Шоттки был предложен А. А. Ошемковым [14]. В работе Морозова [11] детально вычислены инварианты Фоменко–Цишанга для интегрируемого случая Клебша в динамике твердого тела и полностью описана структура слоений Лиувилля, возникающих на изоэнергетических поверхностях этой интегрируемой гамильтоновой системы. Эти методы топологического анализа получили широкое развитие; в частности, недавно они были применены Харламовым для анализа задачи с тремя степенями свободы. Очевидно, что разделение переменных все же представляет собой, вообще говоря, достаточно редкий феномен, и необходимо дальнейшее развитие методов анализа, не «зацикленных» на его использовании. В частности, в случае системы Гаффэ получение интеграла шестой степени методом разделяющей переменной представляется весьма трудновыполнимой задачей. В недавней работе Болсинова, Борисова и Мамаева [2] результаты топологического анализа, которые ранее носили чисто теоретический характер и практически имели малое влияние на динамические системы, рассматриваются в применении к анализу устойчивости всех частных решений, встречающихся в системах с двумя степенями свободы. В частности, в [2] подробно рассмотрен случай Клебша и введено новое понятие бифуркационного комплекса.

В заключение отметим, что случай Клебша, действительно, является некой центральной системой, своего рода полигоном, при исследовании различных механизмов явного интегрирования гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. С одной стороны, эта задача стимулирует исследователей на дальнейшие развитие методов разделения переменных; с другой стороны, она способствует развитию новых альтернативных, качественных и топологических, методов исследования интегрируемых систем, не зависящих от проблемы разделения. Как мы видим, этой задачей занимались многие выдающиеся математики. Подтверждением этого служат собранные здесь классические работы. Хотелось бы надеяться, что данный сборник сможет поспособствовать привлечению бóльшего внимания к этой проблеме со стороны современных специалистов. Мы особенно рекомендуем его молодым исследователям в надежде, что они смогут внести в эти вопросы новые, свежие идеи.

А. В. Борисов
А. В. Цыганов

Список литературы

[1] А. И. Бобенко, Уравнения Эйлера на алгебрах $e(3)$ и $so(4)$. Изоморфизм интегрируемых случаев, *Функц. анализ и его прил.*, 1986, т. 20, № 1, с. 64—66.

[2] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Топология и устойчивость интегрируемых систем, 2010, *Успехи мат. наук*, в печати.

[3] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, М., Ижевск: Изд-во РХД, ИКИ, 2005, 576 с.

[4] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, М., Ижевск: Изд-во РХД, ИКИ, 2003, 296 с.

[5] Б. А. Дубровин, Тэта-функции и нелинейные уравнения, *Успехи мат. наук*, 1981, т. 36, №2(218), с. 11–80.

[6] В. В. Козлов, Две интегрируемые задачи классической динамики, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1981, № 4, с. 80–83.

[7] Г. В. Колосов, О некоторых частных решениях задачи о движении твердого тела в несжимаемой идеальной жидкости *Сб. иснт. инж. путей сообщения*, СпБ, 1899, L, с. 89–106.

[8] Г. В. Колосов, *О некоторых видоизменениях начала гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела*, С.-Пб., 1908, 76 с.

[9] С. В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, *Функц. анализ и его прил.*, 1976, т. 10, №4, с. 93—94.

[10] В. Г. Марихин, В. В. Соколов., О приведении пары квадратичных по импульсам гамильтонианов к канонической форме и о вещественном частичном разделении переменных для волчка Клебша, *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 3, с. 313–322.

[11] П. В. Морозов, Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша, *Матем. сб.*, 2002, т. 193, № 10, с. 113–138.

[12] Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, *Динамика неголономных систем*, М.: Наука, 1967.

[13] С. П. Новиков, Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса, *Успехи мат. наук*, 1982, т. 37, № 5, с. 3–49.

[14] А. А. Ошемков, Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$, *Успехи мат. наук*, 1987, т. 42, № 6(258), с. 199–200.

[15] А. М. Переломов, Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости, *Функц. анализ и его прил.*, 1981, т. 15, № 2, с. 83–85.

[16] Т. И. Погосян, М. П. Харламов, Бифуркационное множество и интегральные многообразия задачи о движении твердого тела в линейном поле сил, *Прикл. мат. мех.*, 1979, т. 43, № 3, с. 419–428.

[17] Т. И. Погосян, Построение бифуркационных множеств в одной задаче динамики твердого тела, *Механика твердого тела. Вып. 12*, 1980, с. 9–16.

[18] Т. И. Погосян, Области возможности движения в задаче Клебша. Критический случай. *Механика твердого тела. Вып. 15*, 1983, с. 3–23.

[19] Т. И. Погосян, Области возможности движения и интегральные многообразия в задаче Клебша. Регулярный случай. *Механика твердого тела. Вып. 16*, 1984, с. 12–19.

[20] Т. И. Погосян, Области возможности движения в задаче Клебша. *Механика твердого тела. Вып. 16*, 1984, с. 19–24.

[21] Т. И. Погосян, Критические интегральные поверхности задачи Клебша, *Механика твердого тела. Вып. 16*, с. 19–24.

[22] В. А. Стеклов, *О движении твердого тела в жидкости*, Харьков, 1893, 234 с.

[23] Ю. Н. Федоров, Представления Лакса со спектральным параметром, определенным на накрытиях гиперэллиптических кривых, *Матем. заметки*, 1993, т. 54, № 1, с. 94–109.

[24] М. П. Харламов, Фазовая топология одного интегрируемого случая движения твёрдого тела, *Механика твердого тела. Вып. 11*, 1979, с. 50–64.

[25] М. П. Харламов, Фазовая топология одной задачи о движении гироскопа, *Механика твердого тела. Вып. 13*, 1981, с. 14–23.

[26] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, ЛГУ, Л., 1988.

[27] Е. И. Харламова, О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновксом поле сил, *Изв. СО АН СССР*, 1959, № 6, с. 7–17.

[28] А. В. Цыганов, Об изоморфизме интегрируемых случаев уравнений Эйлера на би-гамильтоновых многообразиях $e(3)$ и $so(4)$, *Записки научн. семинаров ПОМИ*, 2004, т. 317, с. 200–212.

[29] А. В. Цыганов, *Интегрируемые системы в методе разделения переменных*, М., Ижевск: Изд-во РХД, ИКИ, 2005, 384 с.

[30] С. А. Чаплыгин, *Собрание сочинений*, тт. I—IV, М., Гостехиздат, 1948—1949.

[31] M. Adler, P. van Moerbeke, P. Vanhaecke, *Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras*, Springer, 2004.

[32] E. P. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolski, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer, 1994.

[33] O. I. Bogoyavlensky, Integrable Cases of a Rigid Body Dynamics and Integrable Systems on the Ellipsoids *Comm. Math. Phys.*, 1986, vol. 103, no. 2, pp. 305–322.

[34] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, Conservation Laws, Hierarchy of Dynamics and Explicit Integration of Nonholonomic Systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[35] A. Clebsch, Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, *Math. Annalen*, 1870, vol. 3, pp. 238–262.

[36] F. Kötter, Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit. I. II, *J. Reine und Angew. Math.*, 1892, vol. 109, pp. 51–81, 89–111.

[37] G. Kolossoff, On Some Cases of Motion of a Solid in Infinite Liquid, *Amer. J. Math.*, 1906, vol. 28, no. 4, pp. 367–376.

[38] I. V. Komarov, A. V. Tsiganov, On Integration of the Kowalevski Gyrostat and the Clebsch Problems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 169–189.

[39] I. V. Komarov, A. V. Tsiganov, On a Trajectory Isomorphism of the Kowalevski Gyrostat and the Clebsch Problem, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2005, vol. 38, pp. 2917–2927.

[40] E. K. Sklyanin, T. Takebe, Separation of Variables in the Elliptic Gaudin Model, *Comm. Math. Phys.*, 1999, vol. 204, pp. 17–38.

[41] T. Skrypnyk, Spin Generalizations of Clebsch and Neumann Integrable Systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2003, vol. 36, no. 15, pp. 4407–4416.

[42] Yu. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, Vol. 219. Basel: Birkhöser, 2003.

[43] A. V. Tsiganov, On the Steklov–Lyapunov Case of the Rigid Body Motion, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 77–91.