РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Труды 39-й Всероссийской молодежной
конференции, 28 января - 1 февраля 2008 г.

ЕКАТЕРИНБУРГ
2008

У Д К 517

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ: Труды 39-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. ISBN 5-7691-1490-8.

Настоящее издание включает материалы 39-й Всероссийской конференции молодых ученых, состоявшейся с 28 января по 1 февраля 2008 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим вопросам: алгебра и топология, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, распознавание образов и математическое программирование, информатика и вычислительная техника, компьютерные науки и безопасность. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным разделам математики.

Конференция проведена при финансовой поддержке РФФИ, грант №08–01–06003 и Президиума УрО РАН.

Ответственные редакторы: чл.-корр. РАН В.И. Бердышев,
д.ф.-м.н. М.Ю. Филимонов.

Рецензенты:
чл.-корр. РАН В.В. Васин, чл.-корр. РАН А.А. Махнев,
чл.-корр. РАН Ю.Н. Субботин,, чл.-корр. РАН А.Г. Ченцов,
д.ф.-м.н. Б.И. Ананьев, д.ф.-м.н. А.Г. Бабенко,
д.ф.-м.н. В.А. Белоногов, д.ф.-м.н. М.И. Гусев,
д.ф.-м.н. В.В. Кабанов, д.ф.-м.н. А.С. Кондратьев,
д.ф.-м.н. А.И. Короткий, д.ф.-м.н. В.И. Максимов,
д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай, к.ф.-м.н. К.В. Емельянов,
к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов, к.ф.-м.н. А.В. Осипов,
к.ф.-м.н. В.С. Пацко, С.В. Шарф

Ответственные за выпуск:
к.ф.-м.н. Н.А. Ваганова,
к.ф.-м.н. О.Г. Вздорнова.

ISBN 5-7691-1490-8.

П $\frac{\text{ПРП-2004—13 (04)}}{\text{8П6 (03) 1998}}$ ПВ-2004

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Банников А.С.[1]
e-mail: bannikov_a_s@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей и m убегающих. Закон движения каждого из преследователей P_i, $i = 1, \dots, n$, имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = -a(t)x_i(t) + u_i(t),\ x_i(t_0) = x_i^0,\ u_i \in U.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j, $j = 1, \dots, m$, имеет вид:

$$\dot{y}_j(t) = -a(t)y_j(t) + v_j(t),\ y_j(t_0) = y_j^0,\ v_j \in U,$$

причем $x_i^0 \neq y_j^0$, для всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Здесь x_i, y_j, u_i, $v_j \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт, $a(t)$ — действительная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v_j(t)$, принимающие при $t \geqslant t_0$ значения из множества U.

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, m, z_0)$, где $z_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$.

Определим функцию v следующим образом. $v(\psi) = C'(U;\psi)$, где $C'(U;\psi)$ — градиент опорной функции $C(U;\psi)$.

Пусть $g(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds} d\tau$, $\lambda_0 = \inf\limits_{t > t_0} \frac{1}{g(t)} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{g(t)}$, H^+, H^- — открытые положительное и отрицательное полупространства, определяемые гиперплоскостью H.

Определение 1. Стратегией V_j убегающего E_j называется отображение $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^{k(n+m)+m} \to U$, ставящее в соответствие величинам

$$(t, x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_m(t),$$
$$\min_{i=1..n} \min_{\tau \in [t_0, t]} \|x_i(\tau) - y_1(\tau)\|, \dots, \min_{i=1..n} \min_{\tau \in [t_0, t]} \|x_i(\tau) - y_m(\tau)\|)$$

измеримую функцию $v_j(t)$, такую что $v_j(t) \in U$ для всех t.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 06-01-258 .

Определение 2. В дифференциальной игре $\Gamma(n, m, z_0)$ из состояния z_0 разрешима локальная задача уклонения, если существуют стратегии $V_1(t), \dots, V_m(t)$ убегающих $E_1, \dots, E_m$ такие что для любых траекторий $x_1(t), \dots, x_n(t)$ найдётся номер $s \in \{1, \dots, m\}$ что $y_s(t) \neq x_i(t)$ для всех $t \geqslant t_0$ и всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Определение 3. В дифференциальной игре $\Gamma(n, m, z_0)$ разрешима глобальная задача уклонения, если из любого начального состояния z_0 разрешима локальная задача уклонения.

Лемма 1. *Пусть в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ существует гиперплоскость H такая, что $x_i^0 \in \overline{H^-}$, $i = 1, \dots, n$, $y_j^0 \in \overline{H^+}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ разрешима локальная задача уклонения.*

Лемма 2. *Пусть в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ существуют гиперплоскости H_1, H_2, множества $I \subset \{1, \dots, n\}$, $J \subset \{1, \dots, m\}$, такие, что выполнены следующие условия:*

1. $H_1 \parallel H_2$, $H_2^+ \subset H_1^+$, *q — единичный вектор нормали гиперплоскости H_1, направленный в H_1^+,*
2. $|J| \geqslant |I| + 1$,
3. $x_i^0 \in \overline{H_2{}^+}$, $i \in I$, $x_i^0 \in \overline{H_1{}^-}$, $i \notin I$,
4. $y_j^0 \in H_1{}^+ \cap H_2{}^-$, $j \in J$,
5. *для любой пары индексов $i,j \in J$, $i \neq j$, начальные позиции убегающих удовлетворяют условию $y_i^0 - y_j^0 \nparallel v(q) - v(-q)$.*

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ разрешима локальная задача уклонения.

Лемма 3. *Пусть в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ $\lambda_0 = 0$, существуют гиперплоскости H_1, $H_2, \dots$, H_{2l}, множества I_1, I_2, $\dots$, I_l, J_1, J_2, $\dots$, J_l, такие, что выполнены следующие условия:*

1. $H_1 \parallel H_2 \parallel \dots \parallel H_{2l}$, $H_j^+ \subset H_{j-1}^+, j = 2, \dots, 2l$,
   q — единичный вектор нормали гиперплоскости H_1, направленный в полупространство H_1^+,
2. $I_s \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $J_q \subset \{1, 2, \dots, m\}$, s, $q = 1, \dots, l$,
   $I_q \cap I_p = \emptyset$, $p \neq q$, $J_q \cap J_p = \emptyset$, $p \neq q$,

3. $x_i^0 \in \overline{H_1^{\,-}}$, $i \notin \bigcup\limits_{s=1}^{l} I_s$,

4. $x_i^0 \in \overline{H_{2p}^+} \cap \overline{H_{2p+1}^-}$, $i \in I_p$, $p = 1, \ldots, l-1$, $x_i^0 \in \overline{H_{2l}^+}$, $i \in I_l$,

5. $y_j^0 \in H_{2p-1}^+ \bigcap H_{2p}^-$, $j \in J_p$, $p = 1..l$,

6. $|J_1| + [|J_2| - |I_1|]^+ + \cdots + [|J_l| - (|I_1| + |I_2| + \cdots + |I_{l-1}|)]^+ \geqslant$ $\geqslant |I_1| + |I_2| + \cdots + |I_l|$, *где* $a^+ = \max(a, 0)$,

7. *для любой пары индексов* $i, j \in \bigcup\limits_{r=1}^{l} J_r$, $i \neq j$, *начальные позиции убегающих удовлетворяют условию* $y_i^0 - y_j^0 \nparallel v(q) - v(-q)$.

Тогда в игре $\Gamma(n, m, z_0)$ *разрешима локальная задача уклонения.*

Теорема. *Пусть* $\lambda_0 = 0$, U *— строго выпуклый компакт с гладкой границей. Тогда для любых натуральных* p, m, *таких, что* $m \geqslant p2^p+2$ *в игре* $\Gamma(2^p+1, m, z_0)$ *разрешима глобальная задача уклонения.*

Список литературы

[1]. *Пшеничный Б.Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.

[2]. *Петров Н.Н., Петров Н. Никандр.* О дифференциальной игре "казаки-разбойники"// Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1366–1374.

[3]. *Чикрий А.А.* Конфликтно-управляемые процессы. — Киев.: Наукова думка, 1992. 384 с.