МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвященная памяти

И. Г. ПЕТРОВСКОГО

(1901 — 1973)

23-е совместное заседание Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 29 мая – 4 июня 2011

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2011

Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского (23-е совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — 374 с.

Программный комитет

В. А. Садовничий, В. В. Козлов, Б. А. Дубровин, А. М. Ильин, С. П. Новиков, Я. Г. Синай, Д. В. Трещев, Л. Д. Фаддеев и руководители секций:

И. В. Асташова, Н. Х. Розов (*Обыкновенные дифференциальные уравнения*)

С. И. Похожаев, Е. В. Радкевич (*Уравнения с частными производными и математическая физика*)

Д. В. Аносов, В. М. Бухштабер, В. М. Закалюкин, Ю. С. Ильяшенко (*Динамические системы, солитоны и геометрия*)

В. Д. Степанов, А. А. Шкаликов (*Спектральная теория и функциональные пространства*)

В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий, А. С. Шамаев (*Асимптотические методы и усреднение*)

Организационный комитет

В. А. Садовничий (Председатель, Ректор МГУ)

В. В. Козлов (Сопредседатель, Директор Математического института В. А. Стеклова)

В. Н. Чубариков (Заместитель председателя)

А. С. Шамаев (Заместитель председателя)

А. А. Шкаликов (Заместитель председателя)

Секретариат конференции: И. В. Асташова, А. В. Боровских, В. В. Быков, А. А. Владимиров, А. Ю. Горицкий, И. А. Дынников, Т. О. Капустина, Е. С. Карулина, В. В. Палин, О. С. Розанова, М. С. Романов, А. М. Савчук, И. В. Филимонова, Г. А. Чечкин (ответственный секретарь), И. А. Шейпак

Конференция поддержана:
Российским фондом фундаментальных исследований
Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова
Механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова

ISBN

Классическая задача Ламба представляет собой линеаризованную задачу о свободных гравитационных волнах в однородной вязкой несжимаемой жидкости, граничащей с вакуумом и заполняющей нижнюю полуплоскость. Отметим, что Н.Н. Моисеев построил асимптотику указанной задачи для малой вязкости, применив метод Вишика-Люстерника. МГД аналоги задачи Ламба при наложении на систему стационарного однородного горизонтального магнитного поля рассмотрены нами для случаев $R_m = \infty, R_g$ - произвольно (1996), а также при $R_g = \infty, R_m$ - произвольно (2000), где R_g, R_m - гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса.

В настоящем докладе рассматривается модельная задача для общего случая наличия как гидродинамического, так и магнитного чисел Рейнольдса. Представляя вертикальную компоненту вектора напряженности, индуцированного движением жидкости, в виде $h_z(x,z,t) = Z(z)\exp(ix+\sigma t)$, равно как и аналогичным образом, остальные искомые величины, придем к следующей краевой задаче на собственные значения для ОДУ

$$(R_g \cdot R_m)^{-1} M^3[Z(z)] - \sigma\left({R_g}^{-1} + {R_m}^{-1}\right) M^2[Z(z)] + (\sigma^2 + A) M[Z(z)] = 0$$

где σ - искомый спектральный параметр, A - число Альфвена, $M = \frac{d^2}{dz^2} - 1$.

Сформулируем граничные условия:

$$(R_g \cdot R_m)^{-1}\left[Z^V(0) - 4Z'''(0) + 3Z'(0)\right] - {R_g}^{-1}\sigma\left[Z'''(0) - 3Z'(0)\right] -$$
$$-{R_m}^{-1}\{\left[Z'''(0) - Z'(0)\right] + \frac{1}{\sigma}\left[Z''(0) - Z(0)\right]\} + \sigma^2 Z'(0) + Z(0) + A\left[Z'(0) + Z\right] = 0$$

- условие непрерывности нормальной компоненты тензора полных, т.е. гидродинамических и магнитных, напряжений при переходе через границу раздела "жидкость-вакуум";

$${R_m}^{-1}\left[Z^{IV}(0) - Z(0)\right] - \sigma\left[Z''(0) + Z(0)\right] = 0$$

- условие отсутствия вязких касательных напряжений на свободной поверхности (СП). Условие непрерывности касательной составляющей тензора магнитных напряжений при переходе через СП носит двойственный характер , а именно: $a)Z''(0) - Z(0) = 0$- при наличии поверхностных токов, $b)Z'(0) + Z(0) = 0$ - при их отсутствии. При $z \to -\infty$ ставим условие $|Z(z)| \to -\infty$, т.е. затухания всех возмущений с глубиной.

Дальнейшее исследование проводится для частного случая $R_g = R_m = R$. Для малых вязкостей $R^{-1} = \epsilon^2, 0 < \epsilon << 1$, в соответствии с процедурой метода Вишика-Люстерника, строится разложение первого итерационного процесса и три члена типа пограничного слоя. В результате определяется асимптотическое выражение для собственного числа, характеризующего частоту и декремент затухания колебаний. Помимо этого найдено "точное"иррациональное уравнение частот, что позволяет сравнить асимптотические формулы с результатами численных расчетов.

Равномерная экспоненциальная стабилизация семейства нелинейных управляемых систем

Зайцев В. А. (verba@udm.ru, Удмуртский государственный университет, Россия),
Тонков Е. Л. (eltonkov@udm.ru, Удмуртский государственный университет, Россия)

Пусть (Σ, h^t) — топологическая динамическая система с компактным фазовым пространством Σ. Пусть задана функция $(\sigma, x, u) \to F(\sigma, x, u) \in \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывная вместе со своими частными производными F'_x, F'_u на множестве $\Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Рассматривается семейство управляемых систем

$$\dot{x} = F(h^t\sigma, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

зависящих от параметра $\sigma \in \Sigma$. *Допустимым управляемым процессом* системы (1) называется всякая функция $t \to \widehat{\varphi}(h^t\sigma) := \big(\widehat{x}(h^t\sigma), \widehat{u}(h^t\sigma)\big)$, равномерно непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$, такая что $\widehat{x}(h^t\sigma)$, $t \in \mathbb{R}$ является решением системы (1) при $u = \widehat{u}(h^t\sigma)$. Рассмотрим допустимый процесс $t \to \widehat{\varphi}(h^t\sigma)$ для каждого $\sigma \in \Sigma$. Получим семейство $(\widehat{\varphi}, \Sigma) := \{t \to \widehat{\varphi}(h^t\sigma),\, \sigma \in \Sigma\}$ допустимых процессов. Будем говорить [1], что семейство допустимых процессов $(\widehat{\varphi}, \Sigma)$ *равномерно экспоненциально стабилизируемо с показателем* $\alpha > 0$, если найдутся числа $N > 0$, $\varkappa > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любого $\sigma \in \Sigma$ найдется непрерывное управление $(t, x) \to u(t, x, \sigma) \in \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times O_\delta\big(\widehat{x}(h^t\sigma)\big)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) выполнено неравенство $|u(t, x, \sigma) - \widehat{u}(h^t\sigma)| \leqslant \varkappa$; 2) $u(t, \widehat{x}(h^t\sigma), \sigma) \equiv \widehat{u}(h^t\sigma)$; 3) любое решение $t \to x(t, \sigma)$, $t \in \mathbb{R}_+$ системы (1) с выбранным управлением $u = u(t, x, \sigma)$ и начальным условием $x(0, \sigma) \in O_\delta(\widehat{x}(\sigma))$ удовлетворяет при всех $t \geqslant 0$ неравенству

$$|x(t, \sigma) - \widehat{x}(h^t\sigma)| \leqslant N|x(0, \sigma) - \widehat{x}(\sigma)| \exp(-\alpha t).$$

Построим систему линейного приближения в окрестности допустимого процесса

$$\dot{y} = A(h^t\sigma)y + B(h^t\sigma)v, \quad (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где $A(h^t\sigma) := \frac{\partial F(h^t\sigma, x, u)}{\partial x}\Big|_{\widehat{\varphi}(h^t\sigma)}$, $B(h^t\sigma) := \frac{\partial F(h^t\sigma, x, u)}{\partial u}\Big|_{\widehat{\varphi}(h^t\sigma)}$. Семейство линейных управляемых систем (2) (зависящее от параметра $\sigma \in \Sigma$) называется *равномерно вполне управляемым* [2], если существуют константы $\vartheta > 0$ и $\ell > 0$ такие, что для любого $\sigma \in \Sigma$ и для любого $y_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое управление $t \to v(t, y_0, \sigma)$, $t \in [0, \vartheta]$ такое, что решение $y(t, \sigma)$ уравнения (2) с управлением $v = v(t, y_0, \sigma)$ с начальным условием $y(0, \sigma) = y_0$ удовлетворяет условию $y(\vartheta, \sigma) = 0$, при этом выполнено неравенство $|v(t, y_0, \sigma)| \leqslant \ell |y_0|$, $t \in [0, \vartheta]$.

Теорема 1. *Пусть семейство систем* (2) *равномерно вполне управляемо. Тогда для любого* $\alpha > 0$ *семейство допустимых процессов* $(\widehat{\varphi}, \Sigma)$ *равномерно экспоненциально стабилизируемо с показателем* α.

Работа поддержана грантом научных исследований Правительства РФ (программа № 11.G34.31.0039) и грантом РФФИ (программа 11-01-00380-а).

Список литературы

[1] *Зайцев В. А., Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Экспоненциальная стабилизируемость нелинейных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. №3. С. 25–29.

[2] *Тонков Е. Л.* Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости рекуррентной системы // ДАН СССР. 1981. Т. 256. №2. С. 290–294.

Об асимптотической эквивалентности систем с неограниченными коэффициентами

Залыгина В. И. (vizalygina@mail.ru, Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Россия)