ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 6, с. 899–912

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2011 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале "Дифференц. уравнения". 2010. Т. 46. № 11). С предложениями по участию обращаться к ученому секретарю семинара доценту Быкову Владимиру Владиславовичу, e-mail: vvbykov@gmail.com.

И. В. Асташова (Москва) "О существовании решения с заданной областью определения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка" (18 февраля 2011 г.).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' + p(x, y, y', y'')\,|y|^{k-1}y = 0. \tag{1}$$

Будем говорить, что решение $y(x)$ имеет *резонансную асимптоту* $x = x^*$, если

$$\varlimsup_{x\to x^*} y(x) = \infty, \qquad \varliminf_{x\to x^*} y(x) = -\infty.$$

Теорема 1. *Пусть $k > 1$, функция $p(x, y_0, y_1, y_2)$ непрерывна, удовлетворяет неравенствам*

$$0 < p_* \le p(x, y_0, y_1, y_2) \le p^* < \infty \tag{2}$$

и условию Липшица по последним трем аргументам. Тогда если $y(x)$ – решение уравнения (1), имеющее резонансную асимптоту $x = x^*$, то положение асимптоты $x = x^*$ непрерывно зависит от данных Коши решения $y(x)$ в любой точке его области определения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых конечных значений $x_* < x^*$ существует решение уравнения (1), определенное на (x_*, x^*), имеющее вертикальную асимптоту $x = x_*$ и резонансную асимптоту $x = x^*$.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого $x_* \in \mathbb{R}$ существует заданное на интервале (x_*, ∞) кнезеровское решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $x \to \infty$ и имеющее вертикальную асимптоту $x = x_*$.*

Следствие 2. *Для любого $x^* \in \mathbb{R}$ существует заданное на интервале $(-\infty, x^*)$ решение уравнения (1), имеющее резонансную асимптоту $x = x^*$ и стремящееся к нулю при $x \to -\infty$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых конечных или бесконечных значений $x_* < x^*$ существует непродолжаемое решение уравнения (1) с областью определения (x_*, x^*).*

Введем обозначение $\beta = (k-1)/3 > 0$.

Теорема 4. *Для любых констант $k > 1$, $0 < p_* < p^*$ и $h > 0$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $p(x, y, y', y'')$ с выполненным условием (2) любое решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $|y(x_0)| = h$ в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, не может быть продолжено на интервал $(x_0 - Ch^{-\beta}, x_0 + Ch^{-\beta})$.*

Теорема 5. *Для любых констант $k > 1$, $0 < p_* < p^*$ и $a > 0$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $p(x, y, y', y'')$ с выполненным условием (2) любое решение $y(x)$ уравнения (1), определенное на $[-a, a]$, удовлетворяет неравенству $|y(0)| \le (C/a)^{1/\beta}$.*

Теорема 6. *Для любых констант $k > 1$, $0 < p_* < p^*$ и $a < b$ существует такое $C > 0$, что для любой функции $p(x, y, y', y'')$ с выполненным условием (2) любое решение $y(x)$ уравнения (1), определенное на $[a, b]$, допускает оценку $|y(x)| \le C \min(x - a, b - x)^{-1/\beta}$.*

Приведенная теорема частично решает задачу [2] и усиливает результат [3].

Литература. 1. Хирш М. Дифференциальная топология. М., 1979. 2. Миллионщиков В.М. Нерешенная задача о генеральных показателях // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1095. 3. Миллионщиков В.М. Относительные показатели Боля и классы функций Бэра // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1087.

М. А. Луночкин (Кострома) "Об устойчивости генеральных показателей относительно случайных возмущений" (11 марта 2011 г.).

Дано ограниченное линейное однородное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

а также его случайное возмущение

$$\dot{y} = (a(t) + c(t, \omega))y. \tag{2}$$

Здесь $c(t, \omega)$ – случайный процесс, ω – точка вероятностного пространства Ω с вероятностью P. Случайный процесс $c(t, \omega)$ состоит из нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и является кусочно-постоянным, т.е. для некоторого $h > 0$ почти наверное выполняются равенства

$$c(t, \omega) = c([t/h]h, \omega), \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Случайные величины (3) обозначим через $c_i(\omega)$, где $i = [t/h]$, а их дисперсии представим в виде $\sigma_i = d_i / \ln i$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{i^{A^2/d_i^2} \ln i}. \tag{4}$$

Пусть $\varkappa_g$ и $\varkappa'_g$ – верхний и нижний генеральные показатели [1] уравнения (1), а $\varkappa_g(\omega)$ и $\varkappa'_g(\omega)$ – уравнения (2).

Теорема. *Равенства*

$$\varkappa_g(\omega) = \varkappa_g, \quad \varkappa'_g(\omega) = \varkappa'_g \tag{5}$$

выполняются почти наверное тогда и только тогда, когда существует такое число A, *что ряд (4) сходится.*

Следствие 1. *Если последовательность* d_i *равномерно ограничена сверху, то почти наверное выполняются равенства (5).*

Следствие 2. *Если* $d_i \to \infty$ $(i \to \infty)$, *то почти наверное имеют место равенства*

$$\varkappa_g(\omega) = \infty, \quad \varkappa'_g(\omega) = -\infty.$$

Следствие 3. *Существуют такие допустимые случайные возмущения [2] уравнения (1), относительно которых генеральные показатели неустойчивы.*

Литература. 1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 2. Нгуен Динь Конг. О стохастической устойчивости показателей Ляпунова уравнений произвольного порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 914.

В. А. Зайцев, Е. Л. Тонков (Ижевск) "Равномерная экспоненциальная стабилизируемость семейства управляемых систем" (18 марта 2011 г.).

Доклад посвящен обсуждению результатов работы [1]. Пусть (Σ, h^t) – топологическая динамическая система с компактным фазовым пространством Σ, $f(\sigma, x, u)$ – заданная функция переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Предполагаем далее, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функция $f(h^t\sigma, x, u)$ переменных (t, x, u) кусочно-непрерывна по t и имеет непрерывные частные производные по переменным x и u на множестве $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Будем рассматривать семейство управляемых систем

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U, \quad U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с параметром $\sigma \in \Sigma$, где U – заданное множество в $\mathbb{R}^m$. Напомним

Определение 1. Функция $t \mapsto \widehat{\varphi}(t,\sigma) := (\widehat{x}(t,\sigma), \widehat{u}(t,\sigma)) \in \mathbb{R}^n \times U$ называется *допустимым процессом* системы (1), если она определена и ограничена на множестве $\mathbb{R}$, функция $t \mapsto \widehat{u}(t,\sigma)$ интегрируема в смысле Лебега на каждом отрезке прямой $\mathbb{R}$, а функция $t \mapsto \widehat{x}(t,\sigma)$ является решением (на всей оси $\mathbb{R}$) в смысле Каратеодори системы уравнений

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, \widehat{u}(t,\sigma)). \tag{2}$$

Определение 2. Допустимый процесс $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ системы (1) будем называть *равномерно экспоненциально стабилизируемым с показателем* $\alpha > 0$, если найдутся не зависящие от σ (но, вообще говоря, зависящие от α) числа $N > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ такие, что для всякого $\sigma \in \Sigma$ существует локально интегрируемое по t в смысле Лебега и непрерывное по x управление $u(t,x,\sigma)$, удовлетворяющее при всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times O_\delta(\widehat{x}(t,\sigma))$ следующим трем условиям:

1) $u(t, \widehat{x}(t,\sigma), \sigma) = \widehat{u}(t,\sigma)$;

2) выполнено неравенство $|u(t,x,\sigma) - \widehat{u}(t,\sigma)| \le \gamma$;

3) любое решение $t \mapsto x(t,\sigma)$ системы уравнений (1) с выбранным управлением $u = u(t,x,\sigma)$ и с начальным условием $x(0,\sigma) \in O_\delta(\widehat{x}(0,\sigma))$ удовлетворяет при всех $t \ge 0$ неравенству

$$|x(t,\sigma) - \widehat{x}(t,\sigma)| \le Ne^{-\alpha t}.$$

По допустимому процессу $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ и системе (2) построим *систему первого приближения*

$$\dot{y} = A(t,\sigma)y + B(t,\sigma)v, \quad A(t,\sigma) := \frac{\partial f(h^t\sigma, x, u)}{\partial x}\bigg|_{\widehat{\varphi}(t,\sigma)}, \quad B(t,\sigma) := \frac{\partial f(h^t\sigma, x, u)}{\partial u}\bigg|_{\widehat{\varphi}(t,\sigma)}. \tag{3}$$

Напомним [2], что система (3) называется *равномерно вполне управляемой (на Σ),* если найдутся такие числа $\vartheta, \ell > 0$, что для любой точки $(y_0, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma$ существует такое измеримое по $t \in [0, \vartheta]$ и непрерывное по (y_0, σ) управление $v(t, y_0, \sigma)$, переводящее решение $y(t,\sigma)$ уравнения (3) из точки $y(0,\sigma) = y_0$ в точку $y(\vartheta, \sigma) = 0$, что неравенство $|v(t, y_0, \sigma)| \le \ell |y_0|$ выполнено при всех $t \in [0, \vartheta]$.

С помощью метода поворотов В.М. Миллионщикова и распространения теорем А.М. Ляпунова, И.Г. Малкина и Х.Л. Массера об устойчивости системы по первому приближению найден алгоритм построения управления, решающего задачу стабилизации заданного допустимого процесса управляемой системы (1).

Теорема. *Пусть заданы допустимый процесс $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ системы (1) и константа $\alpha > 0$. Если функция $(x,u) \mapsto f(\sigma, x, u)$ дважды непрерывно дифференцируема, а система (3) равномерно вполне управляема, то существует управление $u(t,x,\sigma)$, решающее задачу равномерной экспоненциальной стабилизации процесса $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ с показателем $\alpha > 0$.*

Литература. 1. Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л. Экспоненциальная стабилизируемость нелинейных управляемых систем // Вестн. Удмур. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 25–29. 2. Тонков Е.Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости рекуррентной системы // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 290–294.

Л. И. Родина (Ижевск) “Статистически инвариантные с вероятностью единица множества управляемых систем со случайными параметрами” (25 марта 2011 г.).

Используя результаты работ [1, 2], будем рассматривать задачу управления, заданную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, управляемой системой

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

определяющей динамику процесса, множеством M, содержащим дополнительные ограничения задачи, и множеством U в $\mathbb{R}^m$, определяющим геометрические ограничения на допустимые управления. В ряде задач управления разрешается на некоторое время нарушать заданные ограничения на множество допустимых управлений, но в общем надо управлять таким образом, чтобы относительная частота попадания траектории в данное множество равнялась