ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2011, том 47, № 6, с. 899–912

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2011 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале "Дифференц. уравнения". 2010. Т. 46. № 11). С предложениями по участию обращаться к ученому секретарю семинара доценту Быкову Владимиру Владиславовичу, e-mail: vvbykov@gmail.com.

И. В. Асташова (Москва) "О существовании решения с заданной областью определения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка" (18 февраля 2011 г.).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' + p(x, y, y', y'')\,|y|^{k-1}y = 0. \qquad (1)$$

Будем говорить, что решение $y(x)$ имеет *резонансную асимптоту* $x = x^*$, если

$$\varlimsup_{x\to x^*} y(x) = \infty, \qquad \varliminf_{x\to x^*} y(x) = -\infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $k > 1$, *функция* $p(x, y_0, y_1, y_2)$ *непрерывна, удовлетворяет неравенствам*

$$0 < p_* \le p(x, y_0, y_1, y_2) \le p^* < \infty \qquad (2)$$

и условию Липшица по последним трем аргументам. Тогда если $y(x)$ *– решение уравнения (1), имеющее резонансную асимптоту* $x = x^*$, *то положение асимптоты* $x = x^*$ *непрерывно зависит от данных Коши решения* $y(x)$ *в любой точке его области определения.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых конечных значений* $x_* < x^*$ *существует решение уравнения (1), определенное на* (x_*, x^*), *имеющее вертикальную асимптоту* $x = x_*$ *и резонансную асимптоту* $x = x^*$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого* $x_* \in \mathbb{R}$ *существует заданное на интервале* (x_*, ∞) *кнезеровское решение уравнения (1), стремящееся к нулю при* $x \to \infty$ *и имеющее вертикальную асимптоту* $x = x_*$.

Следствие 2. *Для любого* $x^* \in \mathbb{R}$ *существует заданное на интервале* $(-\infty, x^*)$ *решение уравнения (1), имеющее резонансную асимптоту* $x = x^*$ *и стремящееся к нулю при* $x \to -\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых конечных или бесконечных значений* $x_* < x^*$ *существует непродолжаемое решение уравнения (1) с областью определения* (x_*, x^*).

Введем обозначение $\beta = (k-1)/3 > 0$.

Теорема 4. *Для любых констант* $k > 1$, $0 < p_* < p^*$ *и* $h > 0$ *существует такое* $C > 0$, *что для любой функции* $p(x, y, y', y'')$ *с выполненным условием (2) любое решение* $y(x)$ *уравнения (1), удовлетворяющее условию* $|y(x_0)| = h$ *в некоторой точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, *не может быть продолжено на интервал* $(x_0 - Ch^{-\beta}, x_0 + Ch^{-\beta})$.

Теорема 5. *Для любых констант* $k > 1$, $0 < p_* < p^*$ *и* $a > 0$ *существует такое* $C > 0$, *что для любой функции* $p(x, y, y', y'')$ *с выполненным условием (2) любое решение* $y(x)$ *уравнения (1), определенное на* $[-a, a]$, *удовлетворяет неравенству* $|y(0)| \le (C/a)^{1/\beta}$.

Теорема 6. *Для любых констант* $k > 1$, $0 < p_* < p^*$ *и* $a < b$ *существует такое* $C > 0$, *что для любой функции* $p(x, y, y', y'')$ *с выполненным условием (2) любое решение* $y(x)$ *уравнения (1), определенное на* $[a, b]$, *допускает оценку* $|y(x)| \le C \min(x - a, b - x)^{-1/\beta}$.

Определение 1. Функция $t \mapsto \widehat{\varphi}(t,\sigma) := (\widehat{x}(t,\sigma), \widehat{u}(t,\sigma)) \in \mathbb{R}^n \times U$ называется *допустимым процессом* системы (1), если она определена и ограничена на множестве $\mathbb{R}$, функция $t \mapsto \widehat{u}(t,\sigma)$ интегрируема в смысле Лебега на каждом отрезке прямой $\mathbb{R}$, а функция $t \mapsto \widehat{x}(t,\sigma)$ является решением (на всей оси $\mathbb{R}$) в смысле Каратеодори системы уравнений

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, \widehat{u}(t,\sigma)). \tag{2}$$

Определение 2. Допустимый процесс $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ системы (1) будем называть *равномерно экспоненциально стабилизируемым с показателем* $\alpha > 0$, если найдутся не зависящие от σ (но, вообще говоря, зависящие от α) числа $N > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ такие, что для всякого $\sigma \in \Sigma$ существует локально интегрируемое по t в смысле Лебега и непрерывное по x управление $u(t,x,\sigma)$, удовлетворяющее при всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times O_\delta(\widehat{x}(t,\sigma))$ следующим трем условиям:

1) $u(t,\widehat{x}(t,\sigma),\sigma) = \widehat{u}(t,\sigma)$;

2) выполнено неравенство $|u(t,x,\sigma) - \widehat{u}(t,\sigma)| \le \gamma$;

3) любое решение $t \mapsto x(t,\sigma)$ системы уравнений (1) с выбранным управлением $u = u(t,x,\sigma)$ и с начальным условием $x(0,\sigma) \in O_\delta(\widehat{x}(0,\sigma))$ удовлетворяет при всех $t \ge 0$ неравенству

$$|x(t,\sigma) - \widehat{x}(t,\sigma)| \le Ne^{-\alpha t}.$$

По допустимому процессу $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ и системе (2) построим *систему первого приближения*

$$\dot{y} = A(t,\sigma)y + B(t,\sigma)v, \quad A(t,\sigma) := \left.\frac{\partial f(h^t\sigma, x, u)}{\partial x}\right|_{\widehat{\varphi}(t,\sigma)}, \quad B(t,\sigma) := \left.\frac{\partial f(h^t\sigma, x, u)}{\partial u}\right|_{\widehat{\varphi}(t,\sigma)}. \tag{3}$$

Напомним [2], что система (3) называется *равномерно вполне управляемой (на Σ),* если найдутся такие числа $\vartheta, \ell > 0$, что для любой точки $(y_0,\sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma$ существует такое измеримое по $t \in [0,\vartheta]$ и непрерывное по (y_0,σ) управление $v(t,y_0,\sigma)$, переводящее решение $y(t,\sigma)$ уравнения (3) из точки $y(0,\sigma) = y_0$ в точку $y(\vartheta,\sigma) = 0$, что неравенство $|v(t,y_0,\sigma)| \le \ell |y_0|$ выполнено при всех $t \in [0,\vartheta]$.

С помощью метода поворотов В.М. Миллионщикова и распространения теорем А.М. Ляпунова, И.Г. Малкина и Х.Л. Массера об устойчивости системы по первому приближению найден алгоритм построения управления, решающего задачу стабилизации заданного допустимого процесса управляемой системы (1).

Теорема. *Пусть заданы допустимый процесс $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ системы (1) и константа $\alpha > 0$. Если функция $(x,u) \mapsto f(\sigma,x,u)$ дважды непрерывно дифференцируема, а система (3) равномерно вполне управляема, то существует управление $u(t,x,\sigma)$, решающее задачу равномерной экспоненциальной стабилизации процесса $\widehat{\varphi}(t,\sigma)$ с показателем $\alpha > 0$.*

Литература. 1. Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л. Экспоненциальная стабилизируемость нелинейных управляемых систем // Вестн. Удмур. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 25–29. 2. Тонков Е.Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости рекуррентной системы // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 290–294.

Л. И. Родина (Ижевск) “Статистически инвариантные с вероятностью единица множества управляемых систем со случайными параметрами” (25 марта 2011 г.).

Используя результаты работ [1, 2], будем рассматривать задачу управления, заданную метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, управляемой системой

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

определяющей динамику процесса, множеством M, содержащим дополнительные ограничения задачи, и множеством U в $\mathbb{R}^m$, определяющим геометрические ограничения на допустимые управления. В ряде задач управления разрешается на некоторое время нарушать заданные ограничения на множество допустимых управлений, но в общем надо управлять таким образом, чтобы относительная частота попадания траектории в данное множество равнялась единице. В данной работе рассматриваются условия, при которых заданное множество M статистически инвариантно с вероятностью единица.

Будем предполагать, что существует такое множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ выполнены следующие условия:

а) функция $(x, u) \mapsto f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

б) функция $t \mapsto f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

в) функция $(t, x) \mapsto U(h^t\sigma, x) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывна сверху для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Следуя А.Ф. Филиппову, поставим в соответствие управляемой системе (1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \mathrm{co}\, H(\sigma, x), \tag{2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $H(\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции $(t, x) \mapsto f(h^t\sigma, x, U(h^t\sigma, x))$ при $(t_i, x_i) \to (0, x)$. Далее, запись $\mathrm{co}\, H(\sigma, x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$. Пусть функция $\sigma \mapsto M(\sigma) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна. Построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ и внешнюю r-окрестность $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ границы множества $M(\sigma)$.

Обозначим через $D(t, \sigma, X)$ *множество достижимости* системы (1) в момент t из начального множества X. В предположении, что для заданного $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество $D(t, \sigma, X)$ существует при всех $t \geq 0$, рассмотрим характеристику

$$\mathrm{freq}(\sigma, X) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{1}{\vartheta} \mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] |\ D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}, \tag{3}$$

где mes – мера Лебега на числовой прямой. Если предел (3) существует, то $\mathrm{freq}(\sigma, X)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (1) множеством M. В результате обсуждений ряда задач управления с Е.Л. Тонковым и В.Н. Ушаковым возникло следующее

Определение. Множество M называется *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (1), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\mathrm{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1$.

Скалярная функция $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией А.М. Ляпунова* относительно множества M, если она локально липшицева по (σ, x) и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(\sigma, x) \leq 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$;

2) $V(\sigma, x) > 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$.

Далее, для локально липшицевой функции $V(\sigma, x)$ *обобщенной производной* в точке (σ, x) по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ (производной Кларка) называется следующий верхний предел:

$$V^o(\sigma, x; q) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (\sigma, x, +0)} \frac{1}{\varepsilon}(V(h^\varepsilon\vartheta, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)),$$

а выражение $V^o_{\max}(\sigma, x) \doteq \max\limits_{q \in F(\sigma, x)} V^o(\sigma, x; q)$ – *верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (2). Предположим, что верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geq 0,$$

существует для всех $t \geq 0$, и рассмотрим характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{1}{\vartheta} \mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] |\ z^*(t, \sigma) \leq 0\}.$$

Теорема. *Пусть* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\nu(\Sigma_0) = 1$ *и для всех* $\sigma \in \Sigma_0$ *для каждой точки* $x \in M(\sigma)$ *все решения включения (2), удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0, \sigma, x) = x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Пусть также существуют такие локально липшицева функция* $V(\sigma, x)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, *что* $V(\sigma, x)$

является функцией Ляпунова относительно множества M и для всех $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$V^o_{\max}(\sigma, x) \leq w(\sigma, V(\sigma, x)).$$

Тогда если $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$, то множество M статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы (1).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 11-01-00380-а).

Литература. 1. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288. 2. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.

Е. А. Панасенко (Тамбов) “Распространение теоремы Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений на дифференциальные включения без предположения компактности значений правой части” (1 апреля 2011 г.).

Пусть (Σ, h^t) – топологическая динамическая система с компактным фазовым пространством Σ. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{1}$$

зависящее от параметра $\sigma \in \Sigma$. Здесь $F: \ \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех непустых, замкнутых, выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова [1]. Пусть, кроме того, задана функция $M: \ \Sigma \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, где $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа. Для каждого $r > 0$ обозначим $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n |\ |x| \leq r\}$, $M^r(\sigma) \doteq M(\sigma) + O_r$, $N^r_+(\sigma) \doteq M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$.

Определение 1 [2]. Множество $M(\sigma)$ называется *слабо равномерно устойчивым* относительно включения (1), если для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для всякой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times N^\delta_+(\sigma)$ найдется такое решение $t \mapsto x(t; \sigma, x_0)$ включения (1), что $x(0; \sigma, x_0) = x_0$ и $x(t; \sigma, x_0) \in M^\varepsilon(h^t\sigma)$ при всех $t \geq 0$. Множество $M(\sigma)$ называется *слабо равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (1), если оно слабо равномерно устойчиво и для некоторого $r > 0$ и любой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times N^r_+(\sigma)$ найдется такое решение $\varphi(t; \sigma, x_0)$ включения (1), что $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_{\mathbb{R}^n}(\varphi(t; \sigma, x_0), M(h^t\sigma)) = 0$.

Пусть $V: \ \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$ – локально липшицева *функция Ляпунова* (т.е. $V(\sigma, x) = 0$, если $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$, и $V(\sigma, x) > 0$, если $(\sigma, x) \in \Sigma \times N^r_+(\sigma)$); $\mathcal{Q}(\sigma, x) \doteq \{q \in F(\sigma, x) |\ V^o(\sigma, x; q) \leq 0\}$, где $V^o(\sigma, x; q)$ – обобщенная производная Кларка [3, с. 32] функции V по направлению $q \in \mathbb{R}^n$ в точке (σ, x). Пусть, кроме того, $L_\alpha(V) \doteq \{(\sigma, x) \in \Sigma \times N^r_+(\sigma) |\ V(\sigma, x) = \alpha\}$ есть поверхность уровня функции V для каждого $\alpha \geq 0$.

Определение 2 [2]. Будем говорить, что функция Ляпунова $(\sigma, x) \mapsto V(\sigma, x)$ является *правильной* относительно множества $N^r_+(\sigma)$, если для каждого $\alpha \in (0, r)$ поверхность уровня $L_\alpha(V)$ не содержит целиком по крайней мере одну положительную полутраекторию включения

$$\dot{x} \in \mathcal{S}(h^t\sigma, x) \doteq \mathcal{Q}(\sigma, x) \cap O_p(0), \quad p = \sup_{(\sigma,x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)} |\mathcal{Q}(\sigma, x)|, \tag{2}$$

т.е. для каждого $\alpha \in (0, r)$ и любой начальной точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times N^r_+(\sigma)$ найдутся такие решение $x(t; \sigma, x_0)$ включения (2) и момент времени $t_* > 0$, что $V(\sigma, x(t_*; \sigma, x_0)) \neq \alpha$.

Теорема [2]. *Пусть функция $F: \ \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху (в метрике Хаусдорфа–Бебутова), а функция $M: \ \Sigma \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна (в метрике Хаусдорфа). Если найдется $r > 0$, для которого существует такая локально липшицева по x функция Ляпунова $V: \ \Sigma \times M^r(\sigma) \to \mathbb{R}$, что при $(\sigma, x) \in \Sigma \times M^r(\sigma)$ множество $\mathcal{Q}(\sigma, x)$ непусто и функция V является правильной относительно множества $N^r_+(\sigma)$, то множество $M(\sigma)$ слабо равномерно асимптотически устойчиво относительно включения (1).*