ISBN 978-5-4312-0049-6

В. В. Головизин

Практические занятия по курсу «Алгебра и геометрия» Часть II

×	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Ижевск
2011

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

В. В. Головизин

Практические занятия
по курсу «Алгебра и геометрия»
Часть II

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2011

УДК 514.2
ББК 22.151
Г 60

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом УдГУ

Рецензенты: к.п.н. **Н.А. Баранова**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Головизин В.В.

Г60 Практические занятия по курсу «Алгебра и геометрия». Ч.2: учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2011. – 164 с.

ISBN 978-5-4312-0049-6

Вторая часть пособия содержит практические занятия с 18-го по 32-е. Занятия 18 – 27 относятся к первому семестру, остальные – ко второму. Каждое занятие имеет такую же структуру, что и в первой части: задачи для аудиторного решения, задачи повышенного уровня сложности, домашнее задание, примеры решений задач, четыре варианта самостоятельной работы и небольшой тест для самопроверки.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Оно может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия, а также студентам, изучающим данную дисциплину в рамках дистанционного обучения.

УДК 514.2
ББК 22.151

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса, изучающих курс "Алгебра и геометрия" на факультетах ИТВТ и ФЭ, оно может быть полезным студентам математического факультета и студентам заочной формы обучения.

Имеется несколько причин, вызывающих необходимость появления на свет данного пособия. Во-первых, студентам очень удобно знать заранее, какая тема будет изучаться на каждом практическом занятии. Во-вторых, студент имеет возможность заранее подготовиться, для чего достаточно просмотреть примеры решения задач. Здесь же приведено домашнее задание, а задания для самостоятельных работ и тесты акцентируют внимание студентов на ключевых вопросах занятия, и позволяют ему проверить понимание текущей темы. В-третьих, в пособии учитывается весьма различный уровень математической подготовки студентов первого курса, что весьма актуально в последние годы. Это достигается нарастанием сложности решаемых в аудитории задач и расширением его списка задачами повышенного уровня сложности. И, наконец, данное пособие предоставляет студенту возможность приобрести навыки самостоятельной работы с литературой.

В заключение отметим, что пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий, самостоятельных и контрольных работ, для подготовки индивидуальных заданий студентам.

Практическое занятие 18
Общее и каноническое уравнение прямой

Теорминимум: общее уравнение прямой, неполные уравнения прямой, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой с угловым коэффициентом, каноническое уравнение прямой, параметрическое уравнение, взаимное расположение двух прямых на плоскости, угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Задачи для аудиторного решения

1. Записать уравнение прямой $2x - y - 4 = 0$ в отрезках и построить её чертеж в системе координат Oxy.
2. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку A(4; 3) перпендикулярно вектору $\overline{n} = (1; -2)$.
3. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом, если её угловой коэффициент равен $k = \dfrac{2}{3}$ и известно, что прямая проходит через точку C(0; –1).
4. Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A(–1; 2) параллельно вектору $\overline{s} = (3; -4)$.
5. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки A(–3; 4) и B(1; –2).
6. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$ и $2x + 5y + 19 = 0$ и угол между ними.
7. Выяснить взаимное расположение прямых:
   a) $x\sqrt{3} - y + 1 = 0, \quad 3x - y\sqrt{3} - 1 = 0$;
   b) $x\sqrt{3} - y + 1 = 0 \quad x + y\sqrt{3} - 1 = 0$;
   c) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + 1, \; y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - 1$;
   d) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + 1, \; y = -x\sqrt{2} + 1$;

   e) $\dfrac{x-1}{3} = y + 1; \; \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$;
   f) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+6}{3}, \; \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.
8. Найти все виды уравнений прямой $4x - 3y + 12 = 0$, ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями, и постройте её чертеж на координатной плоскости.
9. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(–2; 0): a) параллельно данной прямой; b) перпендикулярно данной прямой.

Задачи повышенного уровня сложности

10. Составить уравнение прямой, если точка N(4; 5) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.
11. Дан треугольник ABC: A(–2; 1), B(3; 5), C(10; 3). Найти: a) общее уравнение прямой на которой лежит сторона AC; b) направляющий вектор высоты BD и её параметрическое уравнение; c) координаты точки D.
12. Найти проекцию точки $A(1; -3)$ на прямую $2x - y + 5 = 0$.
13. Найти координаты точки N, симметричной точке M(–3; 4) относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.
14. Даны уравнения сторон треугольника AB: $3x + 2y - 6 = 0$, AC: $7x - y - 31 = 0$, BC: $2x + 7y - 38 = 0$. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины A.
15. Даны две противоположные вершины квадрата A(–1; 3) и C(6; 2). Найти уравнения его сторон.
16. Из точки A(–5; 6) выходит луч света под углом $\alpha = \pi - \mathrm{arctg} 2$ к оси Ox и отражается от неё, а затем от-

ражается от оси Оy. Найти уравнения прямых, на которых лежат все три луча.

17. Найти уравнение отраженного от прямой $2x-3y-8=0$ луча, лежащего на прямой $x+2y+3=0$.
18. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(2;1)$, и образующей угол 45^{o} с прямой $2x+3y+4=0$.
19. Составить уравнения сторон треугольника, зная координаты одной из его вершин (4; –1) и уравнения двух биссектрис: $x=1$ и $y=x-1$.
20. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, если длина её отрезка, заключённого между прямыми $2x-y+5=0$ и $2x-y+10=0$, равна $\sqrt{10}$.

Домашнее задание

1. Напишите все виды уравнений для прямой, проходящей через точки A(2; 1) и B(4; 1), ее угловой коэффициент, нормальный и направляющий векторы, точки пересечения с координатными осями.
2. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$ и угол между ними.
3. Найти уравнение прямой образующей с осью Оy угол 30^{o} и пересекающей ее в точке (0; – 6).
4. Дан треугольник с вершинами A(3; 2), B(3; 8), C(6; 2). написать уравнения сторон треугольника.
5. Определить при каком значении параметра p прямая $(p^2-p)x+(3+p)y-3p+1=0$: a) параллельна оси Ох; b) параллельна оси Оy; c) проходит через начало координат; d) перпендикулярна прямой $y=x$.
6. Луч света, пройдя через точку A(2; 3) под углом α к

оси Ох, отразился от нее и прошел через точку B(–5; 4). Найти угол α и координаты точки отражения луча.

Примеры

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости Оxy прямую, заданную общим уравнением: $2x-3y-6=0$.

Решение. Для построения прямой достаточно знать координаты двух её точек. Координаты точек, лежащих на данной прямой, удовлетворяют её уравнению. Воспользуемся этим фактом. Положим в уравнении $x=0$:

$$-3y-6=0.$$

Вычисляем y: $y=-2$. Следовательно, точка с координатами (0; –2) лежит на данной прямой. Так как абсцисса этой точки равна 0, то она находится на оси ординат, т.е. точка с координатами (0; –2) является точкой пересечения данной прямой с осью ординат. Аналогично, полагая $y=0$ и подставляя в уравнение, находим координаты точки пересечения прямой с осью абсцисс: (3; 0). Отмечаем найденные точки на координатной плоскости Оxy и проводим через них прямую. Смотрите рисунок 1.

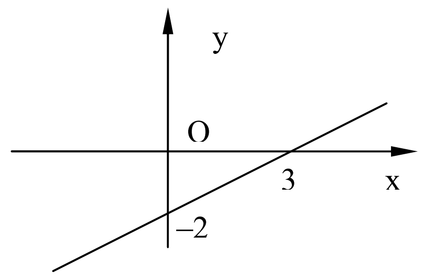

Рис. 1

Заметим, что координаты точек пересечения прямой с координатными осями можно найти, зная её уравнение в отрезках. С этой целью перенесем свободный член –6 общего уравнения прямой в правую часть:

$$2x - 3y = 6,$$

затем разделим обе части получившегося уравнения на 6:

$$\frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} = 1,$$

и, после сокращения, получаем уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1.$$

Отсюда видим, что прямая пересекает ось абсцисс в точке $x = 3$, а ось ординат – в точке $y = -2$.

Ответ: рисунок 1.

Пример 2. Найти общее уравнение прямой перпендикулярной вектору $\overline{n} = (-1; 4)$, и проходящей через точку A(2; –7).

Решение. 1-й способ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0,$$

где (x_o, y_o) – координаты произвольной фиксированной точки M_o, лежащей на данной прямой, $(A, B) = \overline{n}$ – координаты её нормального вектора. По условию задачи искомая прямая должна проходить через точку A(2; –7), следовательно, мы можем положить $x_o = 2,\ y_o = -7$. По условию задачи, прямая должна быть перпендикулярной вектору $\overline{n} = (-1; 4)$, следовательно, данный вектор может служить нормальным вектором для данной прямой и мы можем положить $A = -1,\ B = 4$. Подставляя эти числа в уравнение, получаем:

$$-(x - 2) + 4(y + 7) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$-x + 4y + 30 = 0 \text{ или } x - 4y - 30 = 0.$$

2-й способ. Воспользуемся общим уравнением прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

где $(A, B) = \overline{n}$ – координаты её нормального вектора.

Так как нормальный вектор прямой дан по условию задачи: $\overline{n} = (-1; 4)$, то полагаем $A = -1,\ B = 4$ и подставляем эти числа в общее уравнение прямой:

$$-x + 4y + C = 0.$$

Искомая прямая проходит через точку A(2; –7), поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой. Подставляя $x = 2,\ y = -7$ в предыдущее уравнение, получаем:

$$-2 + 4(-7) + C = 0.$$

Отсюда находим значение коэффициента C: $C = 30$. Подставляя в уравнение, получаем:

$$-x + 4y + 30 = 0 \text{ или } x - 4y - 30 = 0.$$

Ответ: $x - 4y - 30 = 0$.

Пример 3. Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A(2; –7) параллельно вектору $\overline{s} = (3; 5)$.

Решение. Каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n},$$

где $(m, n) = \overline{s}$ – координаты произвольного направляющего вектора данной прямой, (x_o, y_o) – координаты произвольной фиксированной точки M_o лежащей на данной прямой. Для написания канонического уравнения прямой у нас есть все данные. Точка A(2; –7) по условию задачи должна лежать на искомой прямой, следовательно, мы можем положить $x_o = 2,\ y_o = -7$. По условию задачи вектор $\overline{s} = (3;5)$ параллелен искомой прямой, поэтому он является её направляющим вектором, отсюда следует, что мы можем положить $m = 3,\ n = 5$. Подставляя найденные числа в каноническое уравнение, получаем:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+7}{5}.$$

Зная каноническое уравнение прямой, легко найти её параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = x_o + mt \\ y = y_o + nt \end{cases},\ t \in \mathbb{R},$$

где числа $x_o,\ y_o,\ m,\ n$ обозначают тоже самое, что и в каноническом уравнении прямой. Подставляя их параметрическое уравнение, получаем:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -7 + 5t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для нахождения параметрического уравнения прямой достаточно обе части канонического уравнения приравнять одной и той же букве t:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = t \\ \dfrac{y+7}{5} = t \end{cases}$$

и разрешить уравнения получившейся системы относительно переменных x и y соответственно:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 5t - 7 \end{cases}.$$

Ответ: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+7}{5}$, $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -7 + 5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Пример 4. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки A(3; –1) и B(–2; 5).

Решение.1-й способ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – координаты данных точек. Полагаем $x_1 = 3,\ y_1 = -1,\ x_2 = -2,\ y_2 = 5$ и подставляем эти числа в уравнение:

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-(-1)}{5-(-1)} \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{6}.$$

Умножая обе части полученного уравнения на –30, получаем:

$$6(x-3) = -5(y+1) \quad \text{или} \quad 6x + 5y - 13 = 0.$$

2-й способ. Найдем каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}.$$

По условию задачи нам известны координаты двух точек, лежащих на прямой, поэтому вектор $\overline{AB}$ будет лежать на данной прямой и может служить её направляющим вектором. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (-2-3; 5-(-1)) = (-5; 6).$$

Т.е. в каноническом уравнении прямой мы можем положить $m = -5,\ n = 6$. В качестве x_o, y_o мы можем взять координаты любой из двух данных точек, т.к. обе они лежат на искомой прямой. Полагаем $x_o = 3,\ y_o = -1$. Подставляем найденные значения $m,\ n,\ x_o,\ y_o$ в каноническое уравнение и получаем:

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{6} \quad \text{или} \quad 6x + 5y - 13 = 0 .$$

Ответ: $6x + 5y - 13 = 0$.

Пример 5. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -2$, проходящей через точку M(–1; 0).

Решение. 1-й способ. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом:

$$y - y_o = k(x - x_o),$$

где (x_o, y_o) – координаты произвольной фиксированной точки M_o, лежащей на данной прямой, k – её угловой коэффициент. Прямая проходит через точку M(–1; 0) и мы можем положить $x_o = -1,\ y_o = 0$. Угловой коэффициент известен: $k = -2$. Подставляя эти данные в уравнение прямой, получаем:

$$y = -2(x+1).$$

Раскрывая скобки, находим искомое уравнение:

$$y = -2x - 2.$$

2-й способ. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

Угловой коэффициент дан по условиям задачи: $k = -2$. Подставляя его в уравнение, получаем:

$$y = -2x + b.$$

По условию задачи прямая проходит через точку M(–1; 0), следовательно, её координаты должны удовлетворять

уравнению искомой прямой. Подставляя в предыдущее уравнение $x = -1,\ y = 0$, получаем уравнение с одной неизвестной b: $0 = -2(-1) + b$. Решая последнее уравнение, находим $b = -2$.

Подставляем найденное значение b в уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = -2x - 2.$$

Ответ: $y = -2x - 2$.

Пример 6. Найти нормальный вектор и общее уравнение прямой $\frac{x-6}{-5} = \frac{y+2}{4}$.

Решение. 1-й способ. Нормальный и направляющий векторы прямой ортогональны, и их скалярное произведение равно нулю. Из канонического уравнения прямой находим

$$\overline{s} = (-5; 4) \quad \Rightarrow \quad \overline{n} = (4; 5).$$

Точка (6; –2) лежит на данной прямой, поэтому мы можем воспользоваться уравнением прямой, проходящей через данную точку, и перпендикулярную данному вектору:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0,$$

или, после подстановки координат нормального вектора и точки, лежащей на прямой:

$$4(x-6) + 5(y+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 5y - 14 = 0.$$

2-й способ. Умножим обе части канонического уравнения прямой на общий знаменатель. Получаем,

$$4x - 24 = -5y - 10 \quad \Rightarrow \quad 4x + 5y - 14 = 0.$$

Ответ: $4x + 5y - 14 = 0, \quad \overline{n} = (4; 5)$.

Пример 7. Найти направляющий вектор и каноническое уравнение прямой $3x - 2y + 1 = 0$.

Решение. 1-й способ:

$$3x = 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2(y - \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{3}.$$

2-й способ. Выписываем координаты нормального вектора, и находим координаты направляющего вектора:

$$\overline{n} = (3; -2) \quad \Rightarrow \quad \overline{s} = (2; 3).$$

Находим какое-нибудь решение уравнения $3x - 2y + 1 = 0$:

$$x = 1, \ y = 2,$$

и записываем каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}.$$

Ответ: $\overline{s} = (2; 3)$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$.

Пример 8. Найти параметрическое уравнение прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$.

Решение. Пусть $\dfrac{x-1}{2} = t$, тогда $\dfrac{y-2}{3} = t$. Отсюда находим:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Пример 9. Найти каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x = -t - 4 \\ y = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$\begin{cases} x = -4 - t \\ y = 2 + 0 \cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда, $\overline{s} = (-1; 0)$ или $\overline{s} = (1; 0)$ – направляющий вектор данной прямой, точка с координатами (–4; 2) лежит на данной прямой. Осталось записать каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-2}{0}.$$

Ответ: $\dfrac{x+4}{1} = \dfrac{y-2}{0}$.

Пример 10. Убедиться, что прямые $x - y + 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ пересекаются и найти острый угол между ними.

Решение. Так как коэффициенты при неизвестных не пропорциональные

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2},$$

то прямые пересекаются. Один из углов между прямыми будет равен углу между их нормальными векторами: $\overline{n}_1 = (1, -1), \overline{n}_2 = (1, 2)$:

$$\cos(\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{1-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Следовательно, острый угол между данными прямыми равен

$$\pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 11. Выяснить взаимное расположение двух прямых $L_1: 3x-4y+11=0$ и $L_2: 2x-3y+8=0$, и если они пересекаются, найти точку их пересечения.

Решение. Так как коэффициенты при неизвестных не пропорциональные: $\frac{3}{2} \neq \frac{-4}{-3}$, то прямые пересекаются. Для вычисления координат точки их пересечения решим систему

$$\begin{cases} 3x-4y=-11 \\ 2x-3y=-8 \end{cases}$$

с помощью формул Крамера. Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9+8=-1 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение, т.е. данные прямые пересекаются. Вычисляем координаты точки пересечения:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & -4 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -2,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

Ответ: прямые пересекаются в точке (–1; 2).

Пример 12. Найти точку пересечения прямых:

$$L_1: 3x-4y+11=0 \text{ и } L_2: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t+2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t+2 \\ 3x-4y+11=0 \end{cases}.$$

Подставляем неизвестные x и y из первых уравнений системы в последнее уравнение, и находим:

$$3(2t+1)-4(3t+2)+11=0 \text{ или } t=1.$$

Подставляя найденное значение параметра t в первые два уравнения системы, находим: $x=3$, $y=5$.

Ответ: (3; 5).

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение направляющего вектора прямой.
2. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A(–2; 6) и B(4; 2) и выпишите ее направляющий вектор.
3. Найдите общее уравнение прямой, перпендикулярной биссектрисе первого и третьего координатных углов и выпишите ее нормальный вектор, если она проходит через точку A(–1; –2).

Вариант 2

1. Определение нормального вектора прямой.
2. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A(1; 4) и B(–4; 1), и выпишите ее направляющий вектор.
3. Найдите общее уравнение прямой, проходящей через точку A(–1; 3) перпендикулярно биссектрисе второго и четвертого координатных углов и выпишите ее нормальный вектор.

Вариант 3

1. Определение общего уравнения прямой.
2. Найдите параметрическое уравнение прямой, проходящей через вершину A треугольника ABC параллельно стороне BC, если известно, что A(2; –3), B(3; 0), C(0; –2).
3. Найдите общее уравнение прямой, проходящей через точку A(1; –4) перпендикулярно прямой $-x+\frac{y}{4}=1$ и выпишите ее нормальный вектор.

Вариант 4

1. Определение канонического уравнения прямой на плоскости.
2. Найдите уравнение прямой в отрезках, проходящей через вершину B треугольника ABC параллельно стороне AC, если A(2; –3), B(3; 0), C(0; –2).
3. Найдите общее уравнение прямой, проходящей через точку A(1; –1) перпендикулярно прямой $x+\frac{y}{2}=1$ и выпишите ее нормальный вектор.

Тест

1. Какие из точек: A(–1; 2), B(–3; –1), C(–1; 5) принадлежат прямой $x = 2t - 1,\ \ y = 3t + 2,\ \ t \in \mathbb{R}$?
2. Найдите точки пересечения прямой $3x - 5y + 15 = 1$ с осями координат и постройте ее чертеж в системе координат Oxy.
3. Построить на координатной плоскости Oxy прямую, заданную общим уравнением $2x - y - 4 = 0$ и записать уравнение этой прямой в отрезках.
4. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку A(4; 3) и перпендикулярной вектору $\bar{n} = (1; -2)$.
5. Найти уравнение прямой с угловым коэффициентом, если её угловой коэффициент $k = \frac{2}{3}$ и известно, что прямая проходит через точку C(0; –1).
6. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку A(–1; 2), и параллельной вектору $\bar{s} = (3; -4)$.
7. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A(–3; 4) и B(1; –2).
8. Выяснить взаимное расположение прямых $\frac{x-1}{3} = y + 1$ и $x = 7 + 3t,\ \ y = 1 + t,\ \ t \in \mathbb{R}$.
9. Для прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{5}$ найти все виды её уравнений (общее, в отрезках, с угловым коэффициентом, каноническое, параметрическое).
10. Найдите нормальный вектор прямой $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$.
11. Найдите направляющий вектор прямой $y = -2x + 1$.
12. Найдите угловой коэффициент прямой $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 4t \end{cases},\ \ t \in \mathbb{R}$.
13. Найдите координаты точки пересечения прямых $x + 3y - 1 = 0$ и $x = 2t - 2,\ \ y = t - 4,\ \ t \in \mathbb{R}$.
14. Найдите острый угол между прямыми $3x + 4y + 6 = 0$ и $\frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{1}$.

Практическое занятие 19
Нормированное уравнение прямой

Теорминимум: нормированное (нормальное) уравнение прямой на координатной плоскости, нормирующий множитель, расстояние от начала координат до прямой, расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми, невязка и отклонение, взаимное расположение двух точек и прямой на плоскости.

Задачи для аудиторного решения

1. Определить, какие из следующих уравнений прямых являются нормированными:

   a) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$; b) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$;

   c) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$; d) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$;

   e) $x - 2 = 0$; f) $-x + 2 = 0$; g) $y + 2 = 0$; h) $-y - 2 = 0$.
2. Привести общее уравнение прямой к нормированному виду и найти расстояние от начала координат до этой прямой:

   a) $4x - 3y - 10 = 0$; b) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$; c) $x + 2 = 0$;

   d) $12x - 5y + 13 = 0$; e) $12x - y - \sqrt{5} = 0$.
3. Найти расстояние между параллельными прямыми:

   a) $3x + 4y - 20 = 0$ и $6x + 8y + 5 = 0$;

   b) $2x - 3y + 8 = 0$ и $4x - 6y = 9$.
4. Вычислить невязку Δ, отклонение δ и расстояние d точки от прямой:

   a) A(2; –1), $4x + 3y + 10 = 0$;

   b) B(0; –3) $5x - 12y - 23 = 0$; c) C(–2; 3), $3x - 4y - 2 = 0$.
5. Точка A(2; –5) является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Найти площадь этого квадрата.

6. Установить, лежит ли точка М(1; –3) и начало координат в одной или в разных полуплоскостях относительно прямой:
   a) $2x - y + 5 = 0$; b) $x - 3y - 5 = 0$; c) $3x + 2y - 1 = 0$; d) $x - 3y + 2 = 0$.
7. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок, ограниченный точками A(–5; 1) и B(3; 7).

Задачи повышенного уровня сложности

8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(1; 5) на расстоянии пять единиц от начала координат.
9. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $x + 2y - 6 = 0$ относительно точки A(4; 2).
10. Определить, лежит ли точка М(–3; 2) внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$, $4x - y - 31 = 0$.
11. Даны три параллельные прямые $10x + 15y - 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$. Установить, что первая из них лежит между двумя другими, и вычислить отношение, в котором она делит расстояние между ними.
12. Определить, лежат ли точки A(2; 3) и B(5; –1) в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных прямыми $x - 3y - 5 = 0$, $2x + 9y - 2 = 0$.
13. Определить, какой из углов, острый или тупой, образованных двумя прямыми $3x - 2y + 5 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$, содержит начало координат.
14. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $3x - y - 4 = 0$ и $2x + 6y + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC, A(4; –3), B(–2; 6), C(5; 4), найти высоту ВД как расстояние от точки B до прямой AC.

2. Найти высоту трапеции, если даны уравнения её оснований: $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$.
3. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми $x - 3y + 5 = 0$ и $3x - y + 15 = 0$.
4. Определить, лежит ли начало координат внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $7x - 5y - 11 = 0$, $8x + 3y + 31 = 0$, $x + 8y - 19 = 0$.
5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(2; 5) на расстоянии 2 от точки B(0; –1).

Примеры

Пример 1. Определить, какие из следующих уравнений прямых являются нормированными:

a) $x + 2y - 3 = 0$; b) $\frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y = 0$;

c) $\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y - 5 = 0$; d) $\frac{3}{4}x - \frac{4}{5}y + 6 = 0$;

e) $-\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 13 = 0$; f) $x - 3 = 0$.

Решение. Используем определение:

a) $A = 1$, $B = 2$, $A^2 + B^2 \neq 1$, уравнение не нормированное;

b) свободный член $C = 0$, уравнение не нормированное;

c) коэффициент $A = \frac{4}{3} > 1$, уравнение не нормированное;

d) свободный член $C = 6 > 0$, уравнение не нормированное;

e) $A^2 + B^2 = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1$, свободный член $C = -13 < 0$ – уравнение нормированное;

f) свободный член $C = -3 < 0$, $A = 1$, $B = 0$, $A^2 + B^2 = 1$ –

уравнение нормированное.
Ответ: e) и f).

Пример 2. Для прямой $x+2y-3=0$ найти её нормированное уравнение и расстояние до нее от начала координат.
Решение. Находим нормирующий множитель:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Знак нормирующего множителя выбрали противоположным знаку свободного члена общего уравнения: $C=-3<0$.
Умножаем данное уравнение прямой на нормирующий множитель и получаем нормированное уравнение прямой:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0.$$

Следовательно, число $p=\frac{3}{\sqrt{5}}$ равно расстоянию до данной прямой от начала координат.
Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{3}{\sqrt{5}}=0$ – нормированное уравнение прямой, $\frac{3}{\sqrt{5}}$ – расстояние от начала координат до данной прямой.

Пример 3. Найти нормированные уравнения данных параллельных прямых и расстояние между ними:
a) $5x-12y-3=0, \quad 10x-24y+13=0$;
b) $2x+2y+5=0, \quad x+y+0,5=0$.
Решение. a) Находим нормирующие множители:

$$\mu_1=\frac{1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{1}{13}, \quad \mu_2=-\frac{1}{2\sqrt{5^2+(-12)^2}}=-\frac{1}{26}.$$

Выписываем нормированные уравнения прямых:

$$\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{3}{13}=0, \quad -\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{1}{2}=0.$$

Так как нормальные векторы получившихся нормированных уравнений противоположны, то начало координат находится между данными параллельными прямыми и расстояние между ними равно

$$d=p_1+p_2=\frac{3}{13}+\frac{1}{2}=\frac{7}{26}.$$

b) Приводим данные уравнения прямых к нормированному виду:

$$\mu_1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \mu_2=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}=0, \quad -\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0.$$

Нормальные векторы получившихся нормированных уравнений равны, следовательно, начало координат находится не между данными параллельными прямыми, и расстояние между ними равно

$$d=|p_1-p_2|=\frac{5}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Ответ: a) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{3}{13}=0$, $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{1}{2}=0$, $d=\frac{7}{26}$;
b) $-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}=0$, $-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$, $d=\sqrt{2}$.

Пример 4. Найти расстояние между данными параллельными прямыми не находя их нормированные уравнения:

a) $5x-12y+10=0, \quad 5x-12y+15=0$;

b) $2x+2y-5=0, \quad x+y+0,5=0$.

Решение. а) Соответствующие коэффициенты при переменных x и y в обоих уравнениях совпадают, и свободные члены имеют одинаковый знак. Следовательно, начало координат находится не между данными параллельными прямыми и расстояние между ними равно

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{15-10}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{5}{13}.$$

b) Разделим первое уравнение на 2, чтобы соответствующие коэффициенты при переменных x и y в обоих уравнениях были равны:

$$x+y-2,5=0, \quad x+y+0,5=0.$$

Свободные члены уравнений имеют противоположные знаки, следовательно, начало координат находится между данными параллельными прямыми, и расстояние между ними равно

$$d=\frac{|C_1|+|C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-2,5|+|0,5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Ответ: a) $\frac{5}{13}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Пример 5. Найти расстояние от точки M(–7; –2) до прямой $5x-3y+23=0$.

Решение. Воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой:

$$d(M_0;L)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5(-7)-3(-2)+23|}{\sqrt{5^2+(-3)^2}}=\frac{6}{\sqrt{34}}.$$

Ответ: $\frac{3}{17}\sqrt{34}$.

Пример 6. Выяснить взаимное расположение точек $M_1(-5;11)$, $M_2(8;3)$, $M_3(2;-13)$ и прямой $6x-y+13=0$.

Решение. Находим невязки точек относительно данной прямой:

$$\Delta_1=6(-5)-11+13=-28, \quad \Delta_2=6\cdot 8-3+13=58,$$
$$\Delta_3=6\cdot 2+13+13=38.$$

Так как невязки второй и третьей точек имеют одинаковые знаки, то они находятся в одной полуплоскости. Невязка первой точки имеет противоположный знак, поэтому она находится в другой полуплоскости.

Ответ: точки M_2 и M_3 находятся в одной полуплоскости, M_1 – в другой.

Пример 7. Найти уравнение биссектрис острого и тупого углов между прямыми $y=x$ и $y=3x$.

Решение. Запишем общее уравнение каждой прямой: $x-y=0$, $3x-y=0$ и воспользуемся уравнениями биссектрис. Если $A_1A_2+B_1B_2>0$, то

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}+\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0$$

– уравнение биссектрисы острого угла,

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0$$

– уравнение биссектрисы тупого угла. Так как $A_1A_2+B_1B_2=1\cdot 3+(-1)\cdot(-1)=4>0$, то

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}+\frac{3x-y}{\sqrt{10}}=0 \text{ или } (\sqrt{5}+3)x-(\sqrt{5}+1)y=0$$

– уравнение биссектрисы острого угла,

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}}-\frac{3x-y}{\sqrt{10}}=0 \text{ или } (3-\sqrt{5})x+(\sqrt{5}-1)y=0$$

– уравнение биссектрисы тупого угла.

Ответ: $y=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}x$ – уравнение биссектрисы острого угла,

$y=-\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}x$ – уравнение биссектрисы тупого угла.

Пример 8. Определить, какой из углов, острый или тупой, образованных двумя прямыми

$$3x-5y-4=0 \text{ и } x+2y+3=0,$$

содержит точку M(2; –5).

Решение. Умножим первое уравнение на (–1):

$$-3x+5y+4=0.$$

Теперь выполняется условие:

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=A_1A_2+B_1B_2=-3+10=7>0.$$

Находим невязки точки M относительно прямых

$$-3x+5y+4=0 \text{ и } x+2y+3=0:$$

$$\Delta_1=-3\cdot2+5\cdot(-5)+4=-27, \quad \Delta_2=2+2\cdot(-5)+3=-5.$$

Так как знаки невязок одинаковы, то точка M лежит в тупом угле.

Ответ: тупой угол.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение нормирующего множителя.
2. Найдите нормированное уравнение прямой $x-2y+15=0$ и найдите расстояние до нее от начала координат.
3. Докажите, что данные прямые параллельные и найдите расстояние между ними: $x-2y-7=0$, $x-2y+7=0$.

Вариант 2

1. Определение нормированного уравнения прямой.

2. Найдите нормированное уравнение прямой $2x+y-5=0$ и найдите расстояние до нее от начала координат.
3. Докажите, что данные прямые параллельные и найдите расстояние между ними: $4x+2y-1=0$, $4x+2y-9=0$.

Вариант 3

1. Определение невязки точки относительно прямой.
2. Докажите, что прямые $3x-6y-7=0$ и $x-2y+7=0$ параллельные и найдите расстояние между ними.
3. Определить высоту BD в треугольнике A(4; –3), B(–2; 6), C(5; 4), вычислив расстояние от точки B до прямой AC.

Вариант 4

1. Определение отклонения точки от прямой.
2. Докажите, что прямые $4x+2y-1=0$ и $2x+y-9=0$ параллельные и найдите расстояние между ними.
3. Определить высоту CD в треугольнике A(4; –3), B(–2; 6), C(5; 4), вычислив расстояние от точки C до прямой AB.

Тест

1. Определить, какие из следующих уравнений прямых являются нормированными: a) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; b) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; c) $x-2=0$; d) $-y-2=0$.
2. Найдите нормирующий множитель для уравнения $y-2x+1=0$.
3. Найти нормированное уравнение прямой, и расстояние до неё от начала координат: a) $4x-3y-10=0$; b) $x=3t-2,\ y=4-t,\ t\in\mathbb{R}$.
4. Найдите расстояние от начала координат до прямой $x+2y+5=0$.
5. Найдите невязку точки M(–2; 9) относительно прямой $4x+y+5=0$.
6. Найдите отклонение точки $M(3;-7)$ относительно прямой $2x-2y+3=0$.
7. Найдите расстояние от точки M(–6; 4) до прямой $y=2x-1$.
8. Найдите расстояние между параллельными прямыми $2x-2y+3=0$ и $x-y+3=0$.
9. Установить, лежит ли точка M(1; –3) и начало координат в одной или в разных полуплоскостях относительно прямой: $10x+24y+15=0$.

Практическое занятие 20
Пучок прямых на плоскости

Теорминимум: пучок прямых на координатной плоскости и его уравнение, центр пучка, уравнение пучка с заданным центром.

Задачи для аудиторного решения

1. Найти центр пучка $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$.
2. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(x+2y-5)+\beta(3x-2y+1)=0$ и проходящей: a) через точку A(3; –1); b) через начало координат; c) параллельно оси Ox; d) параллельно оси Oy; e) параллельно прямой $4x+3y+5=0$; f) перпендикулярно прямой $2x+3y+7=0$.
3. Докажите, что прямая $x+8y-7=0$ принадлежит пучку $\alpha(2x+y-2)+\beta(x-2y+1)=0$.
4. При каком значении C прямая $4x-3y+C=0$ принадлежит пучку $\alpha(3x+2y-9)+\beta(2x+5y+5)=0$.
5. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку $\alpha(3x-4y-3)+\beta(2x+3y-1)=0$ и проходящей через центр тяжести треугольника с вершинами A(–1; 2), B(4; –4) и C(6; –1).
6. Даны уравнения сторон треугольника $x+2y-1=0$, $5x+4y-17=0$, $x-4y+11=0$. Найти уравнения высот треугольника, не определяя координат его вершин.

Задачи повышенного уровня сложности

7. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку $\alpha(2x+7y-8)+\beta(3x+2y+5)=0$ и проходящей под углом 45° к прямой $2x+3y-7=0$. (Решить, не находя центра пучка.)
8. Найти уравнение сторон треугольника, если известны

координаты одной из его вершин (2; –1), и уравнения высоты $7x-10y+1=0$ и биссектрисы $3x-2y+5=0$, проведенных из одной вершины. (Решить, не вычисляя координат других вершин треугольника.)
9. Луч света, пройдя через точки A(4; 6) и B(5; 8), упал на прямую $x-2y+2=0$ и отразился от нее. Составить уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.
10. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A(1; –1) так, что середина ее отрезка между прямыми $2x-3y-6=0$ и $2x-3y+6=0$ лежала бы на прямой $2x+15y-42=0$.
11. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если задана его вершина A(1; 3) и уравнения медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

Домашнее задание

1. Найти центр пучка $\alpha(3x-4y-29)+\beta(2x+5y+19)=0$.
2. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(5x+3y-7)+\beta(3x+10y+4)=0$. Найти все значения A, при которых прямая $Ax+5y+9=0$ не принадлежит данному пучку.
3. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку $\alpha(2x+y-2)+\beta(x-5y-23)=0$ и делящей пополам отрезок прямой, ограниченный точками A(5; –6) и B(–1; –4). Решить задачу, не находя центра пучка.
4. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку $\alpha(3x-2y-1)+\beta(4x-5y+8)=0$ и проходящей через середину отрезка прямой $x+2y+4=0$, заключенного между прямыми $2x+3y+5=0$ и $x+7y-1=0$.

Примеры

Пример 1. Найти уравнение пучка прямых с центром пучка в точке пересечения прямых $2x-y+3=0, x+y-2=0$.

Ответ: $\alpha(2x-y+3)+\beta(x+y-2)=0$.

Пример 2. Найти центр пучка прямых

$$\alpha(2x-y+3)+\beta(x+y)=0.$$

Решение. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

Ответ: (–1; 1).

Пример 3. Найти уравнение пучка прямых с центром пучка в точке А(–1; 3).

Решение. Прямые $x=-1$ и $y=3$ пересекаются в точке А. Следовательно, эти две прямые принадлежат пучку прямых с центром пучка в точке А. Зная уравнения двух прямых из этого пучка, мы можем написать его уравнение:

$$\alpha(x+1)+\beta(y-3)=0.$$

Можно заменить греческие буквы на латинские.

Ответ: $A(x+1)+B(y-3)=0$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-4y+6)=0$ и проходящей через точку А(–2; 5).

Решение. Подставляя вместо параметров α и β конкретные значения, мы получаем уравнение прямой, принадлежащей данному пучку. Значения параметров мы найдем, зная, что искомая прямая проходит через точку А. Подставим координаты точки А в уравнение пучка:

$$\alpha(2(-2)+3\cdot 5-1)+\beta((-2)-4\cdot 5+6)=0$$

или $10\alpha-16\beta=0$, или $5\alpha-8\beta=0$. Положим $\alpha=8, \beta=5$. Подставим найденные значения параметров в уравнение пучка:

$$8(2x+3y-1)+5(x-4y+6)=0 \text{ или } 21x+4y+22=0.$$

Ответ: $21x+4y+22=0$.

Пример 5. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-4y+6)=0$ и проходящей параллельно прямой $3x-7y+8=0$.

Решение. Искомая прямая имеет вид

$$\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-4y+6)=0$$

или

$$(2\alpha+\beta)x+(3\alpha-4\beta)y-\alpha+6\beta=0,$$

где значения параметров α и β нам предстоит найти. Эта прямая параллельна прямой $3x-7y+8=0$. Следовательно, их нормальные векторы должны быть коллинеарные:

$$\overline{n}_1=(2\alpha+\beta; 3\alpha-4\beta) \parallel \overline{n}_2=(3; -7).$$

Из условия коллинеарности векторов следует, что

$$\frac{2\alpha+\beta}{3}=\frac{3\alpha-4\beta}{-7}.$$

Отсюда находим:

$$-14\alpha-7\beta=9\alpha-12\beta \text{ или } 23\alpha-5\beta=0.$$

Полагаем, $\alpha=5$, $\beta=23$. Подставляя в уравнение искомой прямой (в уравнение пучка), получаем:

$$(2\cdot 5+23)x+(3\cdot 5-4\cdot 23)y-5+6\cdot 23=0,$$

$$33x-77y+133=0.$$

Ответ: $33x-77y+133=0$.

Пример 6. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку $\alpha(x-3y+1)+\beta(2x-y-2)=0$ и проходящей перпендикулярно прямой $x+7y-2=0$.

Решение. Запишем уравнение искомой прямой в виде:

$$(\alpha+2\beta)x+(-3\alpha-\beta)y+\alpha-2\beta=0.$$

Эта прямая перпендикулярна прямой $x+7y-2=0$. Следовательно, их нормальные векторы должны быть ортогональны:

$$\overline{n}_1=(\alpha+2\beta;-3\alpha-\beta)\perp\overline{n}_2=(1;7).$$

Условием ортогональности векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=(\alpha+2\beta)+7(-3\alpha-\beta)=0$$

или $-20\alpha-5\beta=0$ или $4\alpha=\beta$. Подставляя в искомое уравнение прямой, получаем:

$$(\alpha+8\alpha)x+(-3\alpha-4\alpha)y+\alpha-8\alpha=0.$$

Так как параметры α и β одновременно не могут быть равными нулю и $4\alpha=\beta$, то $\alpha\neq0$. Сокращая последнее уравнение на α, получаем:

$$9x-7y-7=0.$$

Ответ: $9x-7y-7=0$.

Пример 7. Найти прямую, принадлежащую двум пучкам:

$$\alpha(x+y-1)+\beta(x-1)=0,\quad \gamma(2x-3y)+\delta(y+1)=0.$$

Решение. 1-й способ. Находим центры обоих пучков:

1) $\begin{cases}x+y-1=0\\ x-1=0\end{cases}$. Откуда находим центр 1-го пучка: A(1; 0).

2) $\begin{cases}2x-3y=0\\ y+1=0\end{cases}$. Точка $B\left(-\frac{3}{2};-1\right)$ – центр 2-го пучка.

Искомая прямая проходит через точки A и B, поэтому используем уравнение прямой, проходящей через 2 точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Получаем,

$$\frac{x-1}{-\frac{3}{2}-1}=\frac{y}{-1}\ \text{ или }\ -x+1=-\frac{5}{2}y\ \text{ или }\ 2x-5y-2=0.$$

2-й способ. Запишем искомую прямую в виде:

$$(\alpha+\beta)x+\alpha y-\alpha-\beta=0,\quad 2\gamma x+(-3\gamma+\delta)y+\delta=0.$$

Исходим из того, что две данные прямые совпадают. Следовательно, их коэффициенты пропорциональны:

$$\frac{\alpha+\beta}{2\gamma}=\frac{\alpha}{-3\gamma+\delta}=\frac{-\alpha-\beta}{\delta}.$$

Решаем данную систему уравнений:

$$\frac{\alpha+\beta}{2\gamma}=\frac{-\alpha-\beta}{\delta}\Rightarrow\delta=-2\gamma\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{2\gamma}=\frac{\alpha}{-5\gamma},$$

Полагая $\gamma=1,\ \delta=-2$, находим из последнего равенства $-5\alpha-5\beta=2\alpha$ или $-5\beta=7\alpha$. Полагаем $\alpha=-5,\ \beta=7$. Найденные значения подставляем в уравнение:

$$(-5+7)x-5y-(-5)-7=0\ \text{ или }\ 2x-5y-2=0.$$

Ответ: $2x-5y-2=0$.

Замечание. Вычисления будут еще проще, если уравнения данных пучков записать в виде:

$$x+y-1+\lambda(x-1)=0,\quad 2x-3y+\mu(y+1)=0.$$

В этом случае уравнения пучков не описывают только прямые $x=1$ и $y=-1$. Легко проверить, что обе эти прямые не являются искомыми. Впрочем, эта проверка понадобится лишь в том случае, если поиск нужных значений параметров λ и μ не увенчается успехом.

Пример 8. Найти прямую, принадлежащую пучку $\alpha(21x+8y-18)+\beta(11x+3y+12)=0$ и отсекающую от координатного угла треугольник площадью 9 кв. ед.

Решение. Легко проверить, что уравнение $11x+3y+12=0$ не является искомым, поэтому пучок можно записать с одним параметром:

$$21x+8y-18+t(11x+3y+12)=0.$$

Запишем искомую прямую в виде уравнения прямой в отрезках:

$$(21+11t)x+(8+3t)y=18-12t, \quad \frac{x}{\frac{18-12t}{21+11t}}+\frac{y}{\frac{18-12t}{8+3t}}=1.$$

Из уравнения прямой в отрезках мы находим

$a=\dfrac{18-12t}{21+11t}$ – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox, $b=\dfrac{18-12t}{8+3t}$ – ордината точки пересечения прямой с осью Oy. Из условия задачи следует, что

$$|ab|=\left|\frac{18-12t}{21+11t}\cdot\frac{18-12t}{8+3t}\right|=18, \quad \left|\frac{36(3-2t)^2}{168+151t+33t^2}\right|=18.$$

Получаем совокупность двух уравнений

$$2(4t^2-12t+9)=\pm(33t^2+151t+168),$$

решая которые, находим значения параметра t. Квадратное уравнение

$$8t^2-24t+18=-(33t^2+151t+168), \quad 41t^2+127t+177=0$$

имеет отрицательный дискриминант и действительных корней не имеет. Решаем второе уравнение. После очевидных преобразований получаем

$$t^2+7t+6=0, \quad t_1=-6, \; t_2=-1.$$

Подставляя найденные значения t в уравнение пучка, получаем два уравнения прямых, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: $2x+y-6=0, \quad 9x+2y+18=0$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение пучка прямых на плоскости.
2. Напишите уравнение пучка прямых, если известны уравнения двух прямых из этого пучка: $3x+2y-6=0, \; 7x-y-31=0$, и найдите его центр.

Вариант 2

1. Напишите общий вид уравнения пучка прямых на координатной плоскости Oxy.
2. Напишите уравнение пучка прямых, если известны уравнения двух прямых из этого пучка: $3x+2y-6=0, \; 2x+7y-38=0$, и найдите его центр.

Вариант 3

1. Напишите уравнение пучка прямых с одним параметром.
2. Напишите уравнение пучка прямых с центром пучка в точке (–3; 2).
3. Стороны AB, AC и BC треугольника ABC лежат соответственно на прямых: $3x+2y-6=0, \; 7x-y-31=0, \; 2x+7y-38=0$. Не вычисляя координат вершин треугольника, найдите уравнение высоты AD.

Вариант 4

1. Напишите уравнение пучка прямых с заданным центром пучка (x_o, y_o).
2. Напишите уравнение пучка прямых, если известны уравнения двух прямых из этого пучка: $x=2, \; y=-3$.
3. Стороны AB, AC и BC треугольника ABC лежат на прямых $3x+2y-6=0, \; 7x-y-31=0, \; 2x+7y-38=0$. Не вычисляя координат вершин треугольника, найдите уравнение высоты BD.

Тест

1. Напишите уравнение пучка прямых, в котором находятся прямые $x+2y-1=0$ и $2x-y+1=0$.
2. Найдите центр пучка: $\alpha(x+4y-1)+\beta(2x-y-11)=0$.
3. Напишите уравнение пучка прямых с центром в точке M(–1; 3).
4. Напишите уравнение пучка прямых на координатной плоскости Oxy, проходящих через начало координат.
5. Из пучка прямых $\alpha(2x+4y-13)+\beta(2x-y+2)=0$ выберите прямую, проходящую через точку A(1; 3).
6. Из пучка прямых $\alpha(2x+4y-1)+\beta(2x-y+2)=0$ выберите пря-

мую параллельную прямой $x + y - 1 = 0$.

7. Из пучка прямых $\alpha(2x + y - 1) + \beta(2x - y + 2) = 0$ выберите прямую перпендикулярную прямой $x + y - 1 = 0$.
8. Из пучка прямых $\alpha(2x + y - 1) + \beta(2x - y + 2) = 0$ выберите две взаимно перпендикулярных прямых.
9. Докажите, что прямая $x + 8y - 7 = 0$ принадлежит пучку $\alpha(2x + y - 2) + \beta(x - 2y + 1) = 0$.
10. При каком значении C прямая $4x - 3y + C = 0$ принадлежит пучку $\alpha(3x + 2y - 9) + \beta(2x + 5y + 5) = 0$.

Практическое занятие 21
Общее уравнение плоскости

Теорминимум: общее уравнение плоскости, нормальный вектор плоскости, неполные уравнения, уравнение плоскости в отрезках, угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, взаимное расположение двух плоскостей.

Задачи для аудиторного решения

1. Какие из следующих точек лежат на плоскости $2x - 3y - 4z + 5 = 0$: A(1; 2; 3), B(1; 1; 1), C(3; 5; –1)?
2. Найдите какую-нибудь точку, лежащую на плоскости:
   a) $x + 5y - z = 0$; b) $2x - y - 2z + 5 = 0$; c) $y - 3 = 0$.
3. Найдите уравнение плоскости $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ в отрезках, точки её пересечения с координатными осями, и постройте чертеж её части в первом октанте.
4. Найдите нормальный вектор плоскости:
   a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$; b) $z = 2x - 3y$; c) $z - 2x = 3$;
   d) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 1$; e) $2y + 1 = 0$; f) $z = 2$; g) $x - 1 = 0$.
5. Найдите общее уравнение плоскости $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ и её нормальный вектор.
6. Напишите уравнения координатных плоскостей, и вы-

пишите координаты их нормальных векторов.

7. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку M(2; 1; –1), и перпендикулярной вектору $\overline{n} = (5; 0; 3)$.
8. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку M(2; 1; –1), и параллельной плоскости $2x - y + z - 1 = 0$.
9. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку M(3; 4; –5), и параллельной векторам $\overline{a}_1 = (3; 1; -1)$ и $\overline{a}_2 = (1; -2; 1)$.
10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A(2; –1; 3) и B(3; 1; 2) параллельно вектору $\overline{a} = (3; -1; 4)$.
11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки: A(3; –1; 2), B(4; –1; –1) и C(2; 0; 2).
12. Найти угол между плоскостями:
    a) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$;
    b) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$;
    c) $3x + 2y + z = 0$, $6z - 2x - 4 = 0$.
13. Определить взаимное расположение двух плоскостей:
    a) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;
    b) $3x - y - 2z - 5 = 0$, $2x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{10}{3} = 0$;
    c) $2x - 5y + 1 = 0$, $x + y + 2z - 3 = 0$.

Задачи повышенного уровня сложности

14. Найдите уравнения плоскостей, проходящих через начало координат, точку A(1; 1; 1), и перпендикулярных одной из координатных плоскостей. В каждом случае постройте чертеж плоскости.
15. Найдите уравнения плоскостей, проходящих через точку A(1; 1; 1) и содержащих одну из координатных осей. В каждом случае постройте чертеж плоскости.

16. Найдите уравнения плоскостей, проходящих через точки A(1; 1; 1), B(0; 1; 2), и параллельных одной из координатных осей.
17. Постройте в системе координат часть данной плоскости, видимой в первом октанте: a) $2x+3y-6=0$; b) $y=2x$; c) $y=2z$; d) $y-2z=2$; e) $x+z=3$.

Домашнее задание

1. Для плоскости $2x-3y-4z-24=0$ найдите точки её пересечения с осями координат, запишите её уравнение в отрезках, и постройте чертеж той её части, которая вместе с координатными плоскостями образует треугольную пирамиду.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.
3. Точка P(2; –1; –1) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.
4. Написать уравнения плоскостей, проходящих через точку M(–1; 2; –5) и параллельных одной из координатных плоскостей.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей: a) через ось Ox и точку A(4; –1; 2); b) через ось Oy и точку B(1; 4; –3); c) через ось Oz и точку C(3; –4; 7).

Примеры

Пример 1. Изобразить на чертеже видимую в первом октанте ПДСК Oxyz часть плоскости $2x+3y+6z-12=0$.

Решение. Приведем общее уравнение плоскости к уравнению в отрезках:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1.$$

Отложим на оси Ox точку с абсциссой $x=6$, на оси ординат точку $y=4$ и на оси аппликат точку $z=2$. Соединим эти точки отрезками прямых.

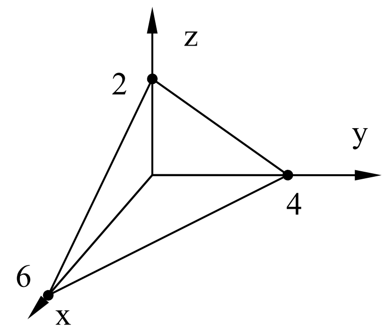

Рис. 1

Ответ: рисунок 1.

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A(–1; 5; –7), с нормальным вектором $\overline{n}=(2;-4;9)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0,$$

где (x_o, y_o, z_o) – координаты точки, лежащей на данной плоскости, $(A, B, C)=\overline{n}$ – координаты её нормального вектора. По условию задачи нормальный вектор плоскости известен $A=2,\ B=-4,\ C=9$, и известны координаты точки, лежащей на плоскости $x_o=-1,\ y_o=5,\ z_o=-7$.

Подставляем эти числа в уравнение:

$$2(x+1)-4(y-5)+9(z+7)=0$$

Осталось раскрыть скобки и привести подобные члены.
Ответ: $2x-4y+9z+85=0$.

Пример 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(0; –2; 4) параллельно плоскости $2x-y+z+5=0$.
Решение. Так как искомая плоскость параллельна данной, то нормальный вектор данной плоскости $\overline{n}=(2;-1;1)$ является нормальным вектором искомой. Теперь решаем задачу как в предыдущем примере:
$$2x-(y+2)+(z-4)=0.$$
Ответ: $2x-y+z-6=0$.

Пример 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(–1; 5; –7), B(0; –2; 3), C(6; 0; 1).
Решение. 1-й способ. Смотрите рисунок 2.

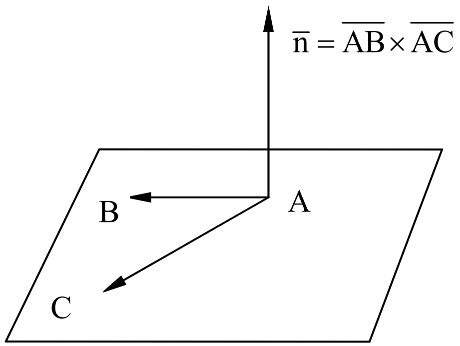

Рис. 2

Нормальным вектором плоскости может служить вектор $\overline{AB}\times\overline{AC}$ и задача решается также, как в примере 2.
Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AB}\times\overline{AC}$:

$\overline{AB}=(1;-7;10)$, $\overline{AC}=(7;-5;8)$,
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -7 & 10\\ 7 & -5 & 8\end{vmatrix}=(-6;62;44)=2(-3;31;22).$$
В качестве нормального вектора возьмем вектор $\overline{n}=(-3;31;22)$, а в качестве точки, лежащей на плоскости возьмем точку C(6; 0; 1). Получаем
$$-3(x-6)+31y+22(z-1)=0.$$
Раскрываем скобки:
$$-3x+31y+22z-4=0.$$
2-й способ. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три данные точки:
$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$$
В качестве первой точки считаем точку A, точка B – вторая точка, C – третья:
$$\begin{vmatrix}x+1 & y-5 & z+7\\ 0+1 & -2-5 & 3+7\\ 6+1 & 0-5 & 1+7\end{vmatrix}=0,$$
$$(x+1)\begin{vmatrix}-7 & 10\\ -5 & 8\end{vmatrix}-(y-5)\begin{vmatrix}1 & 10\\ 7 & 8\end{vmatrix}+(z+7)\begin{vmatrix}1 & -7\\ 7 & -5\end{vmatrix}=0.$$
Вычисляя определители 2-го порядка и раскрывая скобки, получаем:
$$-6x-6+62y-310+44z+308=0$$
или
$$-6x+62y+44z-8=0.$$
Ответ: $3x-31y-22z+4=0$.

Пример 5. Выяснить взаимное расположение плоскостей:
a) $4x-y+9z-16=0$ и $3x-6y-2z+1=0$;
b) $x-y+z-1=0$ и $-3x+3y-3z+3=0$;

c) $x - y + z - 1 = 0$ и $-3x + 3y - 3z - 3 = 0$;

d) $x - y + z - 1 = 0$ и $x + y + z = 0$.

Решение. a) Выписываем координаты нормальных векторов данных плоскостей: $\overline{n}_1 = (4; -1; 9)$, $\overline{n}_2 = (3; -6; -2)$.

Замечаем, что их координаты не пропорциональные:

$$\frac{4}{3} \neq \frac{-1}{-6} \neq \frac{9}{-2}.$$

Следовательно, плоскости пересекаются. Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами:

$$(\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2) = \arccos \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}.$$

Вычисляем скалярное произведение

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 12 + 6 - 18 = 0.$$

Следовательно, плоскости перпендикулярны.

b) Замечаем, что все коэффициенты в уравнениях плоскостей пропорциональны:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}.$$

Следовательно, плоскости совпадают.

c) Аналогично, проверяем пропорциональность коэффициентов уравнений:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{-3}.$$

Следовательно, плоскости параллельные.

d) Коэффициенты при переменных в уравнениях не пропорциональные, следовательно, плоскости пересекаются. Выписываем координаты нормальных векторов, находим их модули и их скалярное произведение:

$$\overline{n}_1 = (1; -1; 1), \quad \overline{n}_2 = (1; 1; 1), \quad \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 1, \quad |\overline{n}_1| = |\overline{n}_2| = \sqrt{3}.$$

Вычисляем угол между плоскостями:

$$(\overline{n}_1 \wedge \overline{n}_2) = \arccos \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \arccos \frac{1}{3}.$$

Ответ: a) плоскости перпендикулярные; b) плоскости совпадают; c) плоскости параллельные; d) плоскости пересекаются под углом, равным $\arccos \frac{1}{3}$.

Пример 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(2; –1; 5) и B(0; 3; –2) перпендикулярно плоскости $y - z - 2 = 0$.

Решение. Смотрите рисунок 3.

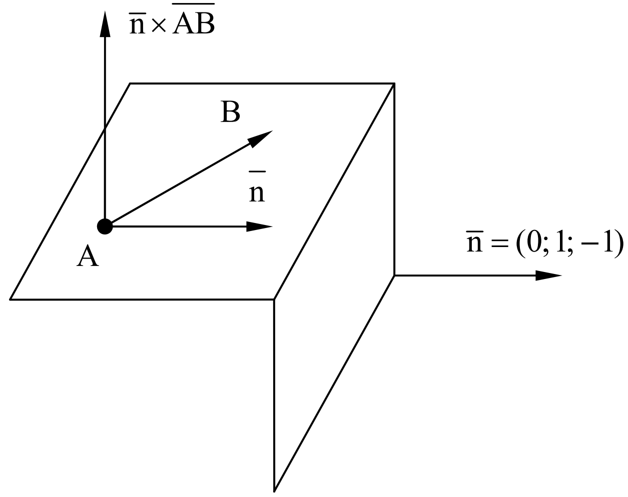

Рис. 3

Вектор $\overline{AB} = (-2; 4; -7)$ лежит на искомой плоскости, а нормальный вектор $\overline{n} = (0; 1; -1)$ данной плоскости параллелен искомой плоскости, перпендикулярной данной. Поэтому, их векторное произведение является нормальным вектором искомой плоскости.

Вычисляем векторное произведение

$$\overline{n}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -7\end{vmatrix}=(-3;2;2),$$

и записываем уравнение плоскости, проходящей через точку B(0; 3; –2) с нормальным вектором $\overline{n}\times\overline{AB}=(-3;2;2)$:

$$-3x+2(y-3)+2(z+2)=0 \text{ или } 3x-2y-2z+2=0.$$

Ответ: $3x-2y-2z+2=0$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение общего уравнения плоскости.
2. Найдите координаты точек пересечения плоскости $2x+6y+9z-18=0$ с координатными осями, запишите уравнение данной плоскости в отрезках, постройте чертеж части плоскости, видимой в первом октанте.
3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку M(–1; 0; 3) параллельно плоскости $2x-y-3z+1=0$.

Вариант 2

1. Определение уравнения плоскости в отрезках.
2. Найдите координаты точек пересечения плоскости $3x+8y+6z-24=0$ с координатными осями, запишите уравнение данной плоскости в отрезках, постройте чертеж части плоскости, видимой в первом октанте.
3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку N(–3; 1; 0) параллельно плоскости $x-2y+3z-2=0$.

Вариант 3

1. Определение неполного уравнения плоскости.
2. Изобразите на чертеже часть плоскости $2y+9z-18=0$, видимой в первом октанте и найдите координаты её точек пересечения с осями координат.
3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через ось абсцисс и точку M(–1; 2; –2).

Вариант 4

1. Определение уравнения плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.
2. Изобразите на чертеже часть плоскости $2x+9z-18=0$, видимой в первом октанте и найдите координаты её точек пересечения с осями координат.
3. Найдите уравнение плоскости, проходящей через ось ординат и точку N(2; –1; 2).

Тест

1. Какие из следующих точек лежат на плоскости $x+2y-2z+3=0$: A(1; 1; 1), B(–3; 2; 2), C(1; 1; 3)?
2. Найдите какую-нибудь точку с целыми координатами, лежащую на плоскости $3x+2y-5z+1=0$.
3. Найти точки пересечения плоскости $2x+3y+4z-12=0$ с координатными осями и записать её уравнение в отрезках. Построить чертеж части плоскости в первом октанте ПДСК.
4. Найдите общее уравнение плоскости $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$ с целыми коэффициентами, и её нормальный вектор.
5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку M(2; 1; –1), и перпендикулярной вектору $\overline{n}=(5;0;3)$.
6. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку M(1; 1; –1), и параллельной плоскости $x+y-z=0$.
7. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки: A(3; –1; 2), B(4; –1; –1) и C(2; 0; 2).
8. Найти угол между плоскостями $3y-z=0,\quad 2y+z=0$.
9. Найдите уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости Oxz, и отстоящей от неё на расстоянии равном 4.
10. Напишите уравнения координатных плоскостей.
11. Напишите общее уравнение какой-нибудь плоскости, проходящей через начало координат.
12. Определите взаимное расположение плоскостей:
    a) $x-3z+2=0,\quad 6z-2x-4=0$; b) $2x-5y+1=0,\quad 2z-3=0$.

Практическое занятие 22
Нормированное уравнение плоскости

Теорминимум: нормированное (нормальное) уравнение плоскости, нормирующий множитель, расстояние от начала координат до плоскости, расстояние от точки до плоскости, расстояние между параллельными плоскостями, невязка и отклонение, взаимное расположение двух точек и плоскости, необходимое и достаточное условие пересечения трех плоскостей в одной точке.

Задачи для аудиторного решения

1. Определить, какие из уравнений плоскостей являются нормальными:

   a) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$; b) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-3=0$;

   c) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0$; d) $-\frac{6}{11}x+\frac{6}{11}y-\frac{7}{11}z-\frac{5}{11}=0$;

   e) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; f) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z+1=0$; g) $z-1=0$.

2. Найти нормирующий множитель и привести уравнения плоскостей к нормальному виду:

   a) $2x-2y+z-18=0$; b) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$;

   c) $4x-6y-12z-11=0$; d) $-6x-6y+7z+11=0$;

   e) $5y-12z+26=0$; f) $3x-4y-1=0$; g) $2z-1=0$.

3. Для каждой плоскости вычислить углы между нормалью к плоскости и осями координат, и расстояние от начала координат до плоскости:

   a) $x+y\sqrt{2}+z-10=0$; b) $x-y-z\sqrt{2}+16=0$;

   c) $x+z-6=0$; d) $y-z+2=0$; e) $x\sqrt{3}+y+10=0$;

   f) $x-2=0$; g) $2y+1=0$.

4. Вычислить невязку, отклонение и расстояние от данной точки до данной плоскости:

   a) A(3; –6; 7), $4x-3z-1=0$;

   b) B(–2; –4; 3), $2x-y+2z+3=0$;

   c) C(2; –1; –1), $16x-12y+15z-4=0$.

5. Убедиться, что данные плоскости пересекаются в одной точке, и найти её координаты:

   $2x+4y+z-4=0,\ 3x+6y+2z-4=0,\ 4x-y-3z-1=0$.

6. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

   a) $x-2y-2z-12=0$, $x-2y-2z-6=0$;

   b) $2x-3y+6z-14=0$, $4x-6y+12z+21=0$;

   c) $2x-y+2z+9=0$, $4x-2y+4z-21=0$.

7. Определить, лежит ли точка D(2; –1; 1) и начало координат в одном полупространстве или в разных относительно данной плоскости:

   a) $5x-3y+z-18=0$; b) $2x+7y+3z+1=0$;

   c) $x+5y+12z-1=0$.

8. На оси ординат найти точку, отстоящую от плоскости $x+2y-2z-2=0$ на расстоянии, равном 4.

Задачи повышенного уровня сложности

9. Составить уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла между плоскостями $x-z-5=0$ и $3x+5y+4z=0$.

10. Определить, лежит ли начало координат внутри острого или тупого угла, образованного плоскостями $x-2y+3z-5=0$ и $2x-y-z+3=0$.

11. Определить, лежат ли точки A(2; –1; 1) и B(1; 2; –3) в одном, смежном или вертикальных двугранных углах, образованных плоскостями $x-2y+3z-5=0$ и $2x-y-z+3=0$.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того

двугранного угла между плоскостями $2x-y+2z-3=0$ и $3x+2y-6z-1=0$, в котором лежит точка M(1; 2; –3).

13. Грани тетраэдра заданы уравнениями $x+2y-2z+3=0, 4x-4y+7z-9=0, 8x+4y+z-3=0$, $y-z=0$. Составить уравнение биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла между первыми двумя гранями.

Домашнее задание

1. Приведите уравнение плоскости к нормальному виду, и найдите расстояние до нее от начала координат:

   a) $2x-y+2z+3=0;$ b) $\frac{6}{7}x-\frac{6}{7}y+z+\frac{3}{7}=0$;

   c) $7x-6y+6z-33=0;$ d) $x+y-2=0;$ e) $2x+3=0$.
2. Найдите расстояние от точки A(1; 1; 1) до плоскости $x+y+z-6=0$.
3. Убедитесь, что следующие три плоскости пересекаются в одной точке и найдите её координаты: $x+3y+2z-4=0,\ 2x+6y+z-2=0,\ 4x+8y-z-2=0$.
4. Вычислить объем куба, две грани которого лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$.
5. Доказать, что плоскость $3x-4y-2z+5=0$ пересекает отрезок AB, если A(3; –2; 1) и B(–2; 5; 2).

Примеры

Пример 1. Определить, какие из следующих уравнений плоскостей являются нормированными:

a) $x+2y-3z-1=0$; b) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=0$; c) $y+1=0$;

d) $\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-1=0$; e) $\frac{3}{4}x-\frac{4}{5}y-6=0$;

f) $-\frac{6}{11}x-\frac{7}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0$; g) $x-3=0$.

Решение. Пользуемся определением нормированного уравнения плоскости.

a) $A=1,\ B=2,\ C=-3,\ A^2+B^2+C^2\neq 1$, уравнение не нормированное;

b) свободный член $D=0$, уравнение не нормированное;

c) свободный член $D=1>0$, уравнение не нормированное;

d) коэффициент $A=\frac{4}{3}>1 \Rightarrow A^2+B^2+C^2>1$, уравнение не нормированное;

e) $D=-6<0,\quad A^2+B^2+C^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2+0=1$ – уравнение нормированное;

f) $A^2+B^2+C^2=\left(-\frac{6}{11}\right)^2+\left(-\frac{7}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2=1$, свободный член $D=-3<0$ – уравнение нормированное;

g) свободный член $D=-3<0$, $A=1,\ B=0,\ C=0$, $A^2+B^2+C^2=1$ – уравнение нормированное.

Ответ: e), f) и g).

Пример 2. Записать нормированное уравнение плоскости, если его общее уравнение имеет вид:

$$3x-4y+12z+26=0,$$

и найти расстояние от начала координат до плоскости.

Решение. Имеем,

$$\overline{n}=(3;4;12),\quad |\overline{n}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=13.$$

Для получения нормированного уравнения плоскости умножим обе части общего уравнения на нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{1}{|\bar{n}|}=-\frac{1}{13},$$

который имеет знак, противоположный знаку свободного члена:

$$-\frac{3}{13}x+\frac{4}{13}y-\frac{12}{13}z-2=0.$$

Ответ: $-\frac{3}{13}x+\frac{4}{13}y-\frac{12}{13}z-2=0$ – нормированное уравнение плоскости. Расстояние от начала координат до плоскости равно 2.

Пример 3. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями $3x-2y+6z-5=0$ и $3x-2y+6z+2=0$.

Решение. 1-й способ. Найдем нормальный вид уравнений плоскостей:

$$\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}y+\frac{6}{7}z-\frac{5}{7}=0,\quad -\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{2}{7}=0.$$

Здесь, $\bar{n}_1^o=\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)=-\bar{n}_2^o$, следовательно, начало координат находится между плоскостями и расстояние между плоскостями равно

$$d=p_1+p_2=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1.$$

2-й способ. Так как соответствующие коэффициенты при переменных равны, а свободные члены уравнений имеют противоположные знаки, то начало координат находится между плоскостями, и

$$d=\frac{|D_1|+|D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{5+2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=1.$$

Ответ: 1.

Пример 4. Найти расстояние от точки A (2; –2; 0) до плоскости $x-2y+2z-12=0$.

Решение. Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2-2(-2)+2\cdot 0-12|}{\sqrt{1+4+4}}=2.$$

Ответ: 2.

Пример 5. Найти взаимное расположение плоскости $x-y+2z-7=0$ и точек A (0; –1; 4), B(2; 3; 0).

Решение. Найдем невязки точек A и B относительно данной плоскости:

$$\Delta_A=Ax_A+By_A+Cz_A+D=1\cdot 0-(-1)+2\cdot 4-7=2>0,$$

$$\Delta_B=Ax_B+By_B+Cz_B+D=1\cdot 2-3+2\cdot 0-7=-8<0.$$

Невязки имеют противоположные знаки, поэтому точки A и B расположены в разных полупространствах относительно данной плоскости.

Ответ: данные точки расположены по разные стороны от данной плоскости.

Пример 6. Найти биссекторную плоскость острого двугранного угла образованного плоскостями:

$$2x+14y-15z-3=0,\quad 2x+2y+3z+3=0.$$

Решение. Чтобы скалярное произведение нормальных векторов данных плоскостей было положительным перепишем уравнения плоскостей в виде:

$$-2x-14y+15z+3=0,\quad 2x+2y+3z+3=0.$$

Теперь, уравнение

$$\frac{-2x-14y+15z+3}{\sqrt{4+196+225}}+\frac{2x+2y+3z+3}{\sqrt{4+4+9}}=0$$

есть уравнение биссекторной плоскости острого угла. После очевидных преобразований получаем

$$4x-2y+15z+9=0.$$

Ответ: $4x-2y+15z+9=0$.

Пример 7. Найти биссекторную плоскость того двугранного угла образованного плоскостями $x-z-5=0$ и $3x+5y+4z=0$, внутри которого лежит точка M(1; 1; 1).

Решение. Умножим первое уравнение на (–1), чтобы выполнялось условие

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2>0.$$

Имеем, уравнения двух плоскостей:

$$-x+z+5=0 \text{ и } 3x+5y+4z=0,$$

для которых $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=-3+4=1>0$.

Находим невязки данной точки относительно этих плоскостей:

$$\Delta_1=-1+1+5=5,\quad \Delta_2=3+5+4=12.$$

Так как знаки невязок одинаковы, то точка M лежит в тупом двугранном угле. Искомая биссекторная плоскость является биссекторной плоскостью тупого двугранного угла. Применяя соответствующую теорему, получаем

$$\frac{-x+z+5}{\sqrt{2}}-\frac{3x+5y+4z}{5\sqrt{2}}=0.$$

Умножая уравнение на $(-5\sqrt{2})$ и приводя подобные члены, получаем $8x+5y-z-25=0$.

Ответ: $8x+5y-z-25=0$.

Пример 8. Убедиться, что плоскости $\sigma_1: 7x-2y-z+1=0$, $\sigma_2: 6x+3y-2z-5=0$, $\sigma_3: x-y=0$ пересекаются в одной точке и найти её координаты.

Решение. Выписываем нормальные векторы данных плоскостей:

$$\overline{n}_1=(7;-2;-1),\quad \overline{n}_2=(6;3;-2),\quad \overline{n}_3=(1;-1;0).$$

Замечаем, что среди них нет коллинеарных. Находим их смешанное произведение:

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2\cdot\overline{n}_3=\begin{vmatrix}7&-2&-1\\6&3&-2\\1&-1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Следовательно, плоскости пересекаются в одной точке. Для вычисления координат точки пересечения решаем систему

$$\begin{cases}7x-2y-z+1=0\\6x+3y-2z-5=0,\\x-y=0\end{cases}$$

и находим $x=y=-7,\ z=-34$.

Ответ: плоскости пересекаются в точке (–7; –7; –34).

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение нормированного уравнения плоскости.
2. Определить, является ли уравнение $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}=0$ нормированным уравнением плоскости.
3. Найдите расстояние от начала координат до плоскости $x+y+z+1=0$.

Вариант 2

1. Определение нормирующего множителя для уравнения плоскости.
2. Определить, является ли уравнение $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}=0$ нормированным уравнением плоскости.
3. Найдите расстояние от начала координат до плоскости $2x+2y+z-1=0$.

Вариант 3

1. Определение невязки точки относительно плоскости.
2. Приведите уравнение плоскости $18x-21y+18z-11=0$ к нормальному виду.

3. Гранями тетраэдра являются координатные плоскости и плоскость $x+y+z-1=0$. Найдите высоту тетраэдра, опущенную из начала координат. Выполните чертеж.

Вариант 4

1. Определение отклонения точки от плоскости.
2. Приведите уравнение плоскости $12x+14y-12z+11=0$ нормальному виду.
3. Гранями тетраэдра являются координатные плоскости и плоскость $2x+2y+2z-3=0$. Найдите высоту тетраэдра, опущенную из начала координат. Выполните чертеж.

Тест

1. Определить, какие из уравнений плоскостей являются нормальными: a) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$; b) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-3=0$; c) $z-1=0$; d) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$.
2. Найти нормирующий множитель для уравнения плоскости $2x-3y+6z+11=0$.
3. Привести уравнение плоскости $2x-2y+z-18=0$ к нормальному виду и найти расстояние до неё от начала координат.
4. Найти невязку точки A(1; 2; –3) относительно плоскости $2x+y-2z-1=0$.
5. Найти отклонение точки A(1; 2; –3) относительно плоскости $2x+y-z-1=0$.
6. Найти расстояние от точки $M(-5; 4; -5)$ до плоскости $2x-3y-6z-9=0$.
7. Докажите, что следующие плоскости пересекаются в одной точке: $2x-3y-6z-9=0$, $2x-3y+6z-9=0$, $2x+3y+6z-9=0$.
8. Найдите точку пересечения плоскостей: $x-y-z-1=0$, $x-y+z-1=0$, $x+y+z-1=0$.
9. Найдите расстояние между параллельными плоскостями: $2x-2y+z-3=0$ и $2x-2y+z+3=0$.
10. Гранями тетраэдра являются координатные плоскости и плоскость $x+2y+2z-6=0$. Найдите высоту тетраэдра, опущенную из начала координат. Выполните чертеж.

Практическое занятие 23
Уравнение прямой в пространстве

Теорминимум: каноническое и параметрическое уравнение прямой в пространстве, прямая как пересечение двух плоскостей.

Задачи для аудиторного решения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3), и параллельной: a) вектору $\overline{a}=(2;-3;5)$; b) оси Ox; c) оси Oy; d) оси Oz; e) прямой $x=3t-1,\ y=-2t+3,\ z=5t+2,\quad t\in\mathbb{R}$.
2. Составить уравнение движения точки, которая двигается прямолинейно и равномерно из точки M(3; –1; –5) в направление вектора $\overline{s}=(-2;6;3)$ со скоростью $v=21$.
3. Найдите параметрическое уравнение прямой: a) $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$; b) $\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{0}$.
4. Найдите каноническое уравнение прямой: a) $\begin{cases} x=5-3t \\ y=-2+2t \\ z=4+7t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=t \\ y=-2 \\ z=1-t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
5. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точки: a) (1; –2; 1), (3; 1; –1); b) (3; 1; 0), (1; 0; –3).
6. Найдите острый угол между прямыми: a) $x-3=-y-2=\frac{z}{\sqrt{2}}$ и $x+2=y-3=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$; b) $x=3t-2,\ y=0,\ z=3-t,\ t\in\mathbb{R}$ и $x=2t-1,\ y=0$, $z=t-3,\ t\in\mathbb{R}$.
7. Найдите координаты точки пересечения прямых: $x=2t-3,\ y=3t-2,\ z=6-4t,\ t\in\mathbb{R}$ и $x=t+5,\ y=-4t-1,\ z=t-4,\ t\in\mathbb{R}$.

8. Найдите значение параметра m, при котором прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{m}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ пересекаются, и вычислите координаты их общей точки.
9. Задайте прямую $x=2t-3,\ y=3t-2,\ z=6-4t,\ t\in\mathbb{R}$ пересечением двух плоскостей.
10. Выясните взаимное расположение прямых:
$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.
11. Найдите каноническое уравнение прямой:
a) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x+y-4z-8=0 \end{cases}$.
12. Найдите расстояние между параллельными прямыми
$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Задачи повышенного уровня сложности

13. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми
$x=2t-4,\ y=-t+4,\ z=-2t-1,\ t\in\mathbb{R}$,
$x=4t-5,\ y=-3t+5,\ z=-5t+5,\ t\in\mathbb{R}$.
14. Вычислить расстояние от точки P(1; –1; –2) до прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$, и найдите проекцию точки P на эту прямую.
15. Найдите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(2; –2; 1) на прямую $x=2t+1,\ y=-3t+2$, $z=2t-3,\ t\in\mathbb{R}$.
16. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;-5;3)$ и пересекающую прямые
$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

17. Найдите параметрическое уравнение общего перпендикуляра прямых $x=3t-7,\ y=4-2t,\ z=3t+4,\ t\in\mathbb{R}$ и $x=1+t, y=2t-8, z=-t-12,\ t\in\mathbb{R}$.

Домашнее задание

1. Даны вершины треугольника A(3; 6; –7), B(–5; 2; 3) и C(4; –7; –2). Составить каноническое и параметрическое уравнения его медианы, проведенной из вершины C. Задайте найденное уравнение медианы пересечением плоскостей.
2. Выясните взаимное расположение двух данных прямых. Если они пересекаются, найдите координаты точки пересечения; если параллельные или скрещивающиеся – найдите расстояние между ними:
a) $\begin{cases} x+z-1=0 \\ 3x+y-z+13=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t-1, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$;
c) $x=2+4t,\quad y=-6t,\quad z=-8t-1,\quad t\in\mathbb{R}$ и
$x=7-6t,\quad y=2+9t,\quad z=12t,\quad t\in\mathbb{R}$.

Примеры

Пример 1. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку M(–2; 4; 0), если вектор $\overline{s}=(1,0,-3)$ является её направляющим вектором.

Решение. Подставляем в каноническое уравнение прямой
$$\frac{x-x_o}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_o}{p}$$
координаты точки M: $x_o=-2,\ y_o=4,\ z_o=0$, и координаты

направляющего вектора прямой: $m=1,\ n=0,\ p=-3$.

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z}{-3}.$$

Аналогично получаем параметрическое уравнение прямой.

Ответ: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z}{-3}$ – каноническое уравнение прямой;

$\begin{cases} x=-2+t \\ y=4 \\ z=-3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ – параметрическое уравнение прямой.

Пример 2. Найти параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{0}.$$

Решение. Положим

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{0}=t,\quad t\in\mathbb{R}$$

и выразим переменные x, y и z через параметр t:

$\frac{x-2}{-3}=t,\quad x=-3t+2,\ \frac{y+1}{4}=t,\quad y=4t-1,\ \frac{z}{0}=t,\quad z=0.$

Ответ: $x=2-3t, y=-1+4t, z=0, t\in\mathbb{R}$.

Пример 3. Найти каноническое уравнение прямой $x=-5-t,\ y=-1,\ z=2+t,\ t\in\mathbb{R}$.

Решение. Из параметрического уравнения прямой сразу же находим координаты точки, лежащей на этой прямой. Их можно найти, положив $t=0$: $(x_o, y_o, z_o)=(-5;-1;2)$. Коэффициенты при параметре t дают соответствующие координаты направляющего вектора этой прямой: $\overline{s}=(-1;0;1)$. Составляем каноническое уравнение данной прямой.

Ответ: $\frac{x+5}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{1}$.

Замечание. Каноническое уравнение можно получить, если из каждого уравнения системы выразить параметр t: $t=-x-5=\frac{x+5}{-1}$, $\quad t=z-2=\frac{z-2}{1}$. Второе уравнение запишем в виде:

$$y=-1+0\cdot t \Rightarrow t=\frac{y+1}{0},$$

где последнее равенство нужно понимать формально, как картинку, а не как действие деления. Приравнивая правые части полученных равенств, получаем ответ.

Пример 4. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;2;-5)$ и $B(2;6;7)$.

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляем в это уравнение координаты точек A и B: $x_1=-1,\ y_1=2,\ z_1=-5,\ x_2=2,\ y_2=6,\ z_2=7$. Получаем:

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z+5}{7+5}.$$

Ответ: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{12}$.

Пример 5. Найти точку пересечения двух пересекающихся пространственных прямых

$$L_1:\begin{cases}x=-4+t\\ y=7-t\\ z=2+3t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}\quad \text{и}\quad L_2:\begin{cases}x=-2k\\ y=3+2k\\ z=-1-k\end{cases},\quad k\in\mathbb{R}.$$

Решение. Так как их направляющие векторы $\overline{s_1}=(1;-1;3)$, $\overline{s_2}=(-2;2;-1)$ не коллинеарные, то прямые либо скрещивающиеся, либо пересекающиеся. Решаем систему

$$\begin{cases}-4+t=-2k\\ 7-t=3+2k\\ 2+3t=-1-k\end{cases}.$$

Выражаем t из первого уравнения и подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases}t=4-2k\\ 7-(4-2k)=3+2k\\ 2+3(4-2k)=-1-k\end{cases}.$$

Вычисляем k:

$$\begin{cases}t=4-2k\\ 0=0\\ k=3\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}t=-2\\ k=3\end{cases}$$

– система имеет единственное решение, следовательно, прямые пересекаются. Подставляем найденные значения t и k в параметрические уравнения прямых и находим координаты общей точки.

Ответ: $(-6; 9; -4)$.

Пример 6. Задать прямую $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-5}{-5}$ пересечением двух плоскостей.

Решение. Записываем каноническое уравнение прямой в

виде системы:

$$\begin{cases}\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-4}\\ \frac{y-3}{-4}=\frac{z-5}{-5}\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}-4(x+2)=3(y-3)\\ 5(y-3)=4(z-5)\end{cases},\quad \begin{cases}4x+3y-1=0\\ 5y-4z+5=0\end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases}4x+3y-1=0\\ 5y-4z+5=0\end{cases}.$

Пример 7. Определить взаимное расположение двух пространственных прямых

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}\quad \text{и}\quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

Решение. Из канонического уравнения 1-й прямой находим координаты точки, лежащей на ней и координаты её направляющего вектора: $M_1(-2;0;1)$, $\overline{s_1}=(2;-3;4)$. Аналогично, находим для 2-й прямой: $M_2(3;1;7)$, $\overline{s_2}=(-1;4;2)$. Так как направляющие вектора прямых не коллинеарные, то прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Вычислим смешанное произведение векторов

$$\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}\cdot\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 4 & 2\\ 5 & 1 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 6\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=44-48-84=-88\neq 0.$$

Ответ: прямые скрещивающиеся.

Пример 8. Найти каноническое уравнение прямой, заданной пересечением плоскостей:

$$L:\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}.$$

Решение. Найдем координаты какой-нибудь точки, лежащей на данной прямой. Исключим из уравнения одно из переменных. Умножим, например, первое уравнение на 2 и сложим оба уравнения. Получаем $4x+3y-1=0$. Положим в этом уравнении $y=3$. Получаем $x=-2$. Подставляя найденные значения x и y в первое уравнение, находим $z=5$. Таким образом, точка с координатами $(-2;3;5)$ лежит на данной прямой, т.е. $x_o=-2,\ y_o=3,\ z_o=5$. Найдем ее направляющий вектор. Выписываем нормальные векторы данных плоскостей и вычисляем их векторное произведение:

$$\overline{n}_1=(1,2,-1),\quad \overline{n}_2=(2,-1,2),\quad \overline{s}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=(3;-4;-5).$$

Таким образом, $\overline{s}=(3,-4,-5)$, т.е. $m=3,\ n=-4,\ p=-5$. Подставляем эти числа в каноническое уравнение.

Ответ: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-5}$.

Пример 9. Найти расстояние между параллельными прямыми $L_1:\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$, $\quad L_2:\ \dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-2}$.

Решение. Выписываем направляющие векторы прямых:

$$\overline{s}_1=(3;-2;2),\quad \overline{s}_2=(-3;2;-2)=-\overline{s}_1.$$

Отсюда следует, что прямые либо совпадают, либо параллельные. Пусть

$$\overline{s}=(3;-2;2)$$

– их общий направляющий вектор. Из канонических уравнений прямых находим, что точки

$$M_1(0;1;-1)\in L_1,\quad M_2(2;0;0)\in L_2.$$

Находим координаты вектора

$$\overline{M_1M_2}=(2;-1;1).$$

Видим, что $\overline{M_1M_2}\nparallel\overline{s}$, т.е. данные прямые не совпадают, а параллельные. Вычисляем векторное произведение

$$\overline{s}\times\overline{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\overline{j}+\overline{k},$$

и его модуль

$$|\overline{s}\times\overline{M_1M_2}|=\sqrt{2}.$$

Вычисляем модуль направляющего вектора и искомое расстояние между данными параллельными прямыми:

$$d(L_1;L_2)=\frac{|\overline{s}\times\overline{M_1M_2}|}{|\overline{s}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{17}}$.

Пример 10. Установить, что прямые $L_1:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{0}$ и $L_2:\ x=y=z+1$ скрещивающиеся, и найти расстояние между ними.

Решение. Находим координаты точек, лежащих на данных прямых $M_1(1;-1;0)\in L_1$, $M_2(0;0;-1)\in L_2$, и координаты вектора $\overline{M_1M_2}=(-1;1;-1)$. Выписываем координаты направляющих векторов данных прямых: $\overline{s}_1=(2;-1;0)$, $\overline{s}_2=(1;1;1)$, и вычисляем смешанное произведение $\overline{s}_1\cdot\overline{s}_2\cdot\overline{M_1M_2}=-4$. Так как оно не равно нулю, то делаем вывод, что данные прямые скрещивающиеся. Вычисляем векторное произведение направляющих векторов и его модуль: $\overline{s}_1 \times \overline{s}_2 = -\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $|\overline{s}_1 \times \overline{s}_2| = \sqrt{14}$. Найденные значения модулей смешанного и векторного произведения векторов, подставляем в формулу расстояния между скрещивающимися прямыми:

$$d = \frac{|\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\overline{s}_1 \times \overline{s}_2|} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$.

Пример 11. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(1; 1; 1) на прямую $x = 2y = 2z$, и координаты проекции точки A на эту прямую.

Решение. Искомый перпендикуляр является прямой пересечения двух плоскостей, одна из которых проводится через точку A и данную прямую, другая проводится через точку A перпендикулярно данной прямой. Смотрите рисунок 1. Уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\begin{cases} A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0 \\ m(x-1) + n(y-1) + p(z-1) = 0 \end{cases},$$

где $(1;1;1)$ – координаты точки A, $\overline{s} = (m, n, p)$ – координаты направляющего вектора данной прямой, $(A, B, C) = \overline{s} \times \overline{OA}$, O – начало координат, это точка лежащая на данной прямой. Запишем данную прямую в каноническом виде:

$$\frac{x}{2} = y = z.$$

Отсюда находим координаты её направляющего вектора: $\overline{s} = (2, 1, 1)$. Вычисляем векторное произведение

$$\overline{s} \times \overline{OA} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0; -1; 1).$$

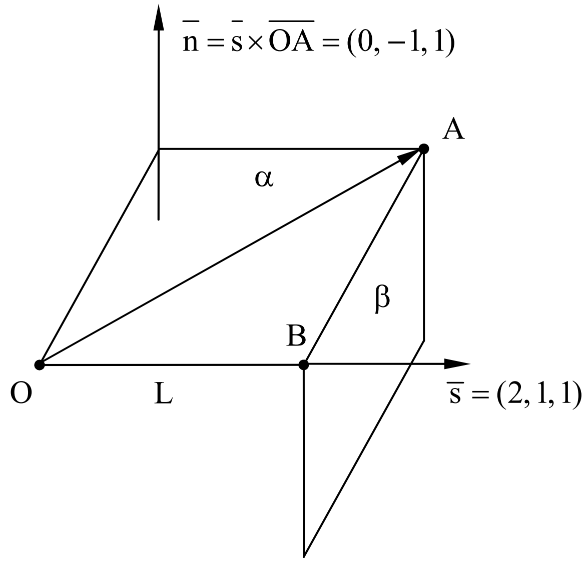

Рис. 1

Теперь мы можем записать уравнение искомого перпендикуляра:

$$\begin{cases} -(y-1) + (z-1) = 0 \\ 2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = z \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = z \\ y = \dfrac{x-2}{-1} \end{cases}.$$

Отсюда находим каноническое и параметрическое уравнение перпендикуляра:

$$\frac{x-2}{-1} = y = z, \quad x = 2 - t, \ y = z = t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Теперь найдем точку пересечения B этого перпендикуляра и данной прямой. Точка B и будет проекцией точки A на данную прямую. Запишем данное уравнение в параметрической форме

$$x = 2k,\ y = z = k,\ k \in \mathbb{R}$$

и решим систему:

$$\begin{cases} 2 - t = 2k \\ t = k \\ t = k \end{cases} \Rightarrow \ (t,k) = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Система имеет единственное решение. Подставляя найденное значение t или k в соответствующее параметрическое уравнение, находим координаты проекции точки A на данную прямую:

$$B\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{x-2}{-1} = y = z$ – каноническое уравнение перпендикуляра; $B\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ – координаты проекции точки A на данную прямую.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение канонического уравнения прямой в координатном пространстве Oxyz.
2. Найдите параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки A(3; 6; –7) и B(–5; 2; 3).
3. Найдите каноническое уравнение прямой $x = 7 - 6t,\ y = 2 + 9t$, $z = 12t,\ t \in \mathbb{R}$.

Вариант 2

1. Определение параметрического уравнения прямой в координатном пространстве Oxyz.
2. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящей через точки

A(4; –7; –2) и B(–5; 2; 3).

3. Найдите параметрическое уравнение прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{0}$.

Вариант 3

1. Определение уравнения линии в координатном пространстве Oxyz.
2. Через вершину C(4; –7; –2) треугольника ABC проведите прямую (найдите её уравнение), параллельную стороне AB, если A(3; 6; –7), B(–5; 2; 3).
3. Найдите каноническое уравнение прямой $x = 1 - t,\ y = 9t,\ z = 1,\ t \in \mathbb{R}$.

Вариант 4

1. Определение параметрического уравнения линии в координатном пространстве Oxyz.
2. Через вершину A(3; 6; –7) треугольника ABC проведите прямую (найдите её уравнение), параллельную стороне BC, если B(–5; 2; 3), C(4; –7; –2).
3. Найдите уравнение перпендикуляра, проведенного к оси Ox из точки A(1; 2; 3).

Тест

1. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3), и параллельной вектору $\bar{a} = (2; -3; 5)$.
2. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M(0; 0; 3), и параллельной оси Ox.
3. Составить каноническое уравнение прямой, параллельной прямой $x = 3t - 1,\ y = -2t + 3,\ z = 5t + 2,\ t \in \mathbb{R}$, и проходящей через точку $M(2; 1; -3)$.
4. Найти каноническое уравнение прямой, если её параметрическое уравнение имеет вид: $x = t - 1,\ y = t,\ z = 2,\ t \in \mathbb{R}$.
5. Найти параметрическое уравнение прямой, если её каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{6}$.
6. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки A(1; –2; 1) и B(3; 1; –1).
7. Задайте прямую $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$ пересечением двух плоскостей.
8. Найдите каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

9. Определите взаимное расположение прямых, заданных каноническими уравнениями: $\frac{x+13}{6}=\frac{y+1}{3}=-\frac{z}{2}$ и $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$, и найдите угол между ними.
10. Убедитесь, что прямые $x=6t-1,\ y=2t-1,\ z=2t,\ t\in\mathbb{R}$ и $x=3-t,\ y=1+2t,\ z=2+2t,\ t\in\mathbb{R}$ пересекаются, и найдите координаты точки пересечения.

Практическое занятие 24
Прямая в пространстве и плоскость

Теорминимум: взаимное расположение прямой в пространстве и плоскости, угол между прямой и плоскостью, точка встречи прямой с плоскостью, проекция точки на плоскость, проекция точки на прямую, расстояние между параллельными прямой и плоскостью, связка и пучок плоскостей.

Задачи для аудиторного решения

1. Выясните взаимное расположение прямой и плоскости:
   a) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ и $x-2y+6z-2=0$; b) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ и $x-2y+6z-2=0$; c) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ и $3x-2y+6z-2=0$.
2. Найдите угол между прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{6}$ и плоскостью $x+2y-3=0$.
3. Найдите точку встречи прямой $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{1}$ с плоскостью $3x-2y+6z+18=0$.
4. Найдите точки пересечения плоскости $3x-2y+6z+18=0$ с координатными осями.
5. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящую через точку A(3; 0; –1), и перпендикулярную плоскости $3x-2y-z-4=0$.

6. Найдите проекцию точки M(–4; 2; –1) на плоскость $x+2y-z+3=0$.
7. Найдите общее уравнение плоскости, проходящей через точку A(1; 2; –1), и перпендикулярную прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=z$.
8. Убедитесь, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости $x-2y-2z+1=0$ и найдите расстояние между ними.
9. Составить уравнение пучка плоскостей, если известны уравнения двух плоскостей из этого пучка: $x-2y+z-7=0$ и $2x+2y-z+2=0$.
10. Найдите уравнение оси пучка плоскостей $\alpha(x+y-2)+\beta(y-z+1)=0$.
11. Найдите уравнение пучка плоскостей, осью которого служит прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.
12. Написать уравнение связки плоскостей, если известны три плоскости из этой связки: $x-2y+z-7=0$, $2x+2y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$.
13. Доказать, что плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x+2y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ принадлежат одной связке плоскостей и найти центр связки.
14. Найти уравнение связки плоскостей с центром связки в точке (5; –1; –4).

Задачи повышенного уровня сложности

15. Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$, и параллельной плоскости

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

16. Найдите проекцию точки $A(3;0;-1)$ на плоскость $3x-2y-z-4=0$.
17. Найдите точку, симметричную точке $A(3;0;-1)$ относительно плоскости $3x-2y-z-4=0$.
18. Найдите уравнение прямой, которая является проекцией прямой $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{1}$ на плоскость $3x-2y+6z+18=0$.
19. Найти проекцию точки A(1; 2; –1) на прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=z$. (Указание: через точку A провести плоскость, перпендикулярную данной прямой.)
20. Найдите точку симметричную точке A(1; 2; –1) относительно прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=z$.
21. В пучке плоскостей $\alpha(2x-3y+z-3)+$ $+\beta(x+3y+2z+1)=0$ найти плоскость: a) проходящую через точку M(1; –2; 3); b) параллельную оси Ox; c) параллельную прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$; d) параллельную плоскости $x-2y+3z-4=0$.
22. Не находя координаты центра связки плоскостей $\alpha(7x-2y-z+1)+\beta(6x+3y-2z-5)+\gamma(x-y)=0$, найдите уравнение плоскости, принадлежащей этой связке, и: a) перпендикулярной вектору $\overline{a}=(3;-3;1)$; b) параллельной плоскости $2x-y+3z-2=0$; c) проходящей через точки A(1; 2; –1) и B(–5; 6; 2); d) проходящей через прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$; e) принадлежащей пучку плоскостей $\alpha(2x-3y+z-3)+$ $+\beta(x+3y+2z+1)=0$.
23. Определить взаимное расположение трех плоскостей:
    a) $x-2y+z-7=0,\quad 2x+2y-z+2=0,$ $x-3y+2z-11=0$; b) $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0,\quad 4x+3y+z+2=0$.
24. Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x-y+3z-1=0,\ x+2y-z+b=0,\ x+ay-6z+10=0$:
    a) пересекаются в одной точке; b) пересекаются по одной прямой; c) пересекаются по трем параллельным прямым, образуя треугольную «трубу».

Домашнее задание

1. Докажите, что прямая $x=3t-2,\ y=-4t+1,\ z=4t-5$, $t\in\mathbb{R}$, параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.
2. Найдите параметрическое уравнение прямой $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$, и докажите, что она лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.
3. Найдите точку встречи прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y=1}{-2}=\frac{z}{6}$ с плоскостью $2x+3y+z-1=0$.
4. Даны вершины треугольника A(1; –2; –4), B(3; 1; –3) и C(5; 1; –7). Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B.
5. Найдите уравнение проекции прямой $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ на плоскость $x+5y-z-25=0$.

Примеры

Пример 1. Определить взаимное расположение прямой и плоскости:

a) $x = 3t - 2,\ y = -4t + 1,\ z = 4t - 5,\ t \in \mathbb{R}$

и $4x - 3y - 6z - 5 = 0$;

b) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ и $4x - 3y + 7z - 7 = 0$;

c) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{6}$ и $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. а) Смотрите рисунки 1 и 2.

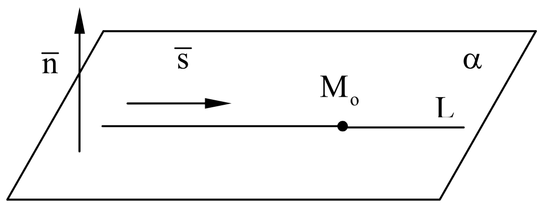

Рис. 1

Выписываем направляющий вектор $\overline{s}$ прямой L и нормальный вектор $\overline{n}$ плоскости α:

$$\overline{s} = (3; -4; 4), \quad \overline{n} = (4; -3; -6).$$

Вычисляем их скалярное произведение

$$\overline{s} \cdot \overline{n} = 12 + 12 - 24 = 0.$$

Следовательно, векторы ортогональные, и либо прямая параллельная плоскости, либо лежит на ней. Выпишем координаты точки, лежащей на прямой $M_o(-2;1;-5)$. Их можно получить, полагая $t = 0$ в параметрическом уравнении прямой. Подставим координаты точки M_o в уравнение плоскости

$$4(-2) - 3 \cdot 1 - 6(-5) - 5 = 14 \neq 0.$$

Точка M_o не лежит на плоскости, следовательно, прямая параллельна плоскости.

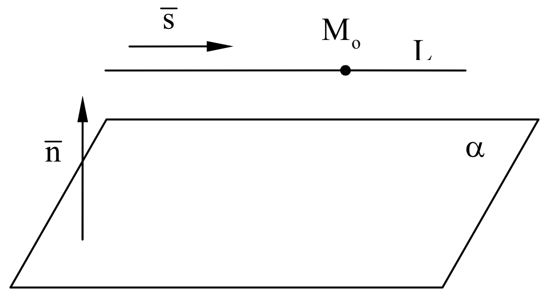

Рис. 2

b) Прямая задана пересечением двух плоскостей с нормальными векторами $\overline{n}_1 = (5; -3; 2)$, $\overline{n}_2 = (2; -1; -1)$. Задачу можно решать двумя способами.

1-й способ. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0. \\ 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \end{cases}$$

Определитель этой системы равен смешанному произведению векторов $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 \cdot \overline{n}$, где $\overline{n} = (4; -3; 7)$ – нормальный вектор данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 5(-7-3) + 3(14+4) + 2(-6+4) = 0.$$

Отсюда следует, что либо все три плоскости лежат в одном пучке, и в этом случае данная прямая лежит на данной плоскости, либо все три плоскости пересекаются по параллельным прямым, и в этом случае данная прямая параллельна данной плоскости. В последнем случае рассматриваемая система решений не имеет. Однако, решая систему, убеждаемся в том, что она имеет решения, например, (–2; –5; 0). Следовательно, данная прямая лежит на данной плоскости.

2-й способ. Найдем каноническое уравнение данной прямой. Векторное произведение $\overline{n}_1 \times \overline{n}_2$ является направляющим вектором данной прямой (смотрите рисунок 3).

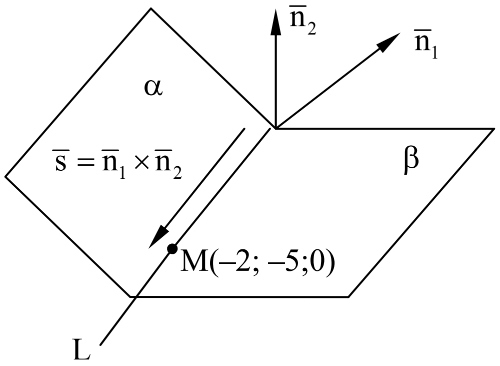

Рис. 3

Вычисляем векторное произведение $\overline{s} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = (5; 9; 1)$, и находим частное решение (–2; –5; 0) системы

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Точка M(–2; –5; 0) лежит на данной прямой. Составляем каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+5}{9} = \frac{z}{1}.$$

Направляющий вектор прямой $s = (5; 9; 1)$ ортогонален нормальному вектору данной плоскости $\overline{n} = (4; -3; 7)$:

$$\overline{n} \cdot \overline{s} = 20 - 27 + 7 = 0.$$

Следовательно, прямая лежит на плоскости или параллельная ей. Подставляем координаты точки прямой (–2; –5; 0) в уравнение плоскости:

$$4(-2) - 3(-5) - 7 = 0.$$

Делаем вывод, что прямая лежит на плоскости.

с) 1-й способ. Смотрите рисунок 4.

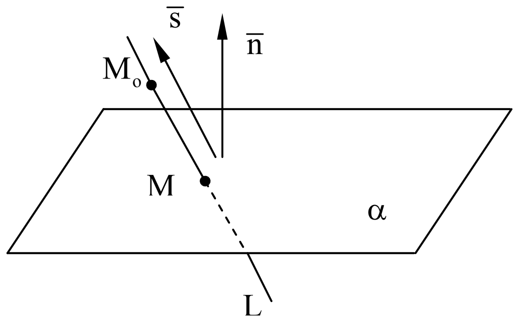

Рис. 4

Выписываем направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости:

$$\overline{s} = (1; -2; 6), \quad \overline{n} = (2; 3; 1).$$

Их скалярное произведение $\overline{n} \cdot \overline{s} = 2 - 6 + 6 = 2 \neq 0$, следовательно, прямая пересекается с плоскостью.

2-й способ. Запишем параметрическое уравнение данной прямой

$$x = 1 + t,\ y = 1 - 2t,\ z = 6t,\ t \in \mathbb{R},$$

и подставим неизвестные x, y, z в уравнение плоскости:

$$2(1+t) + 3(1-2t) + 6t - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получаем единственное решение $t = -2$. Следовательно, прямая пересекается с плоскостью в точке с координатами (–1; 5; –12).
Ответ: a) прямая и плоскость параллельные; b) прямая лежит на плоскости; c) прямая пересекается с плоскостью в точке с координатами (–1; 5; –12).

Пример 2. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{6}$ и плоскостью $x + 2y - 3 = 0$.
Решение. Обозначим прямую буквой L, плоскость – буквой σ. Тогда искомый угол $(L \wedge \sigma) = \frac{\pi}{2} - (\overline{n} \wedge \overline{s})$, где $\overline{n} = (1; 2; 0)$ – нормальный вектор плоскости σ, $\overline{s} = (3; 2; 6)$ – направляющий вектор прямой L.

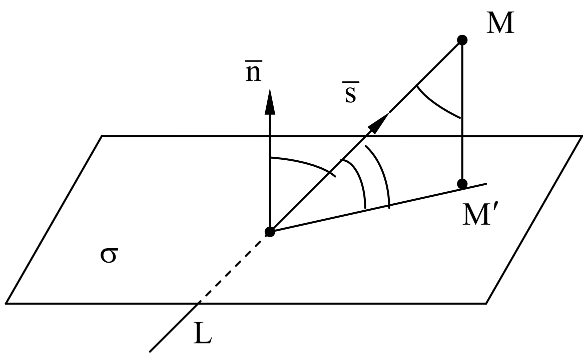

Рис. 5

Вычисляем угол между нормальным и направляющим векторами:

$$(\overline{n} \wedge \overline{s}) = \arccos \frac{\overline{n} \cdot \overline{s}}{|\overline{n}| \cdot |\overline{s}|} = \arccos \frac{7}{\sqrt{5} \cdot 7} = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Отсюда находим,

$$(L \wedge \sigma) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{5}}{5} = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Пример 3. Найти точку встречи прямой $3x = 2y = 2z$ с плоскостью $3x - 2y + 6z + 18 = 0$.
Решение. Запишем уравнение прямой в параметрической форме записи:

$$3x = 2y = 2z = t \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{3}t, \ y = \frac{1}{2}t, \ z = \frac{1}{2}t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Подставляем последние равенства в уравнение плоскости:

$$t - t + 3t + 18 = 0 \ \Rightarrow \ t = -6.$$

Подставляя найденное значение параметра t в параметрическое уравнение прямой, получаем координаты искомой точки встречи.
Ответ: (–2; –3; –3).

Пример 4. Найти точки пересечения плоскости $3x - 2y + 6z + 7 = 0$ с координатными осями.
Решение. 1-й способ. Найдем уравнение данной плоскости в отрезках:

$$3x - 2y + 6z = -7 \ \Rightarrow \ \frac{x}{\left(-\frac{7}{3}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{7}{2}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{7}{6}\right)} = 1.$$

Отсюда сразу же находим координаты искомых точек:

$$\left(-\frac{7}{3};0;0\right),\ \left(0;\frac{7}{2};0\right),\ \left(0;0;-\frac{7}{6}\right).$$

2-й способ. Точка встречи прямой с плоскостью есть их общая точка, координаты которой удовлетворяют как уравнению прямой, так и уравнению плоскости, и является, таким образом, решением системы, составленной из их уравнений. Уравнение оси Ох имеет вид:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

– пересечение координатных плоскостей Oxz и Oxy. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0, \\ 3x-2y+6z+7=0 \end{cases}$$

и находим абсциссу точки пересечения данной плоскости с осью Ох: $x=-\frac{7}{3}$, и координаты этой точки $\left(-\frac{7}{3};0;0\right)$.

Аналогично, полагая в уравнении плоскости $x=0, z=0$, находим ординату точки пересечения плоскости с осью Оу: $y=\frac{7}{2}$, и координаты этой точки $\left(0;\frac{7}{2};0\right)$. Полагая в уравнении плоскости $x=0, y=0$, находим аппликату точки пересечения плоскости с осью Oz: $z=-\frac{7}{6}$, и координаты этой точки $\left(0;0;-\frac{7}{6}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{7}{3};0;0\right),\ \left(0;\frac{7}{2};0\right),\ \left(0;0;-\frac{7}{6}\right)$.

Пример 5. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;1;-6)$, и перпендикулярную плоскости $4x+3y+5z-11=0$.

Решение. Смотрите рисунок 6.

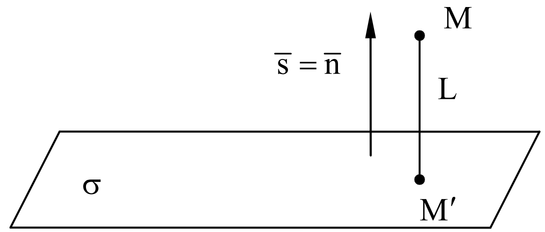

Рис. 6

Нормальный вектор плоскости является направляющим вектором для прямой, перпендикулярной этой плоскости

$$\overline{s}=\overline{n}=(4;3;5).$$

Осталось подставить в каноническое уравнение прямой координаты её направляющего вектора и точки, через которую она проходит.

Ответ: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+6}{5}$.

Пример 6. Найти проекцию точки $M(-2;1;-6)$ на плоскость $4x+3y+5z-15=0$.

Решение. Находим уравнение прямой, проходящей через данную точку М, и перпендикулярную данной плоскости. Смотрите пример 5 и рисунок 6.

Осталось найти точку встречи M' найденной прямой

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+6}{5}$$

с данной плоскостью

$$4x+3y+5z-15=0.$$

Смотрите пример 3.

Ответ: (2; 4; –1).

Пример 7. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;1;-6)$, и перпендикулярной прямой $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+6}{5}$.

Решение. Прямая перпендикулярна плоскости, поэтому направляющий вектор прямой является нормальным вектором для плоскости:

$$\overline{n}=\overline{s}=(4;3;5).$$

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через точку $M(x_o,y_o,z_o)$ с заданным нормальным вектором:

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0.$$

Подставляем в это уравнение координаты нормального вектора плоскости

$$\overline{n}=(A,B,C)=(4;3;5),$$

и координаты точки

$$x_o=-2,\ y_o=1,\ z_o=-6,$$

и получаем:

$$4(x-(-2))+3(y-1)+5(z-(-6))=0,$$

или

$$4x+3y+5z+35=0.$$

Ответ: $4x+3y+5z+35=0$.

Пример 8. Убедиться, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости $x-2y+6z-2=0$, и найти расстояние между ними.

Решение. Сначала убеждаемся в том, что прямая параллельна плоскости. Выписываем направляющий вектор прямой

$$\overline{s}=(2;1;0),$$

нормальный вектор плоскости

$$\overline{n}=(1;-2;6),$$

и вычисляем их скалярное произведение

$$\overline{n}\cdot\overline{s}=0.$$

Следовательно, прямая либо параллельная плоскости, либо лежит на этой плоскости. Точка $M(2;-1;0)$ лежит на прямой. Найдем расстояние от неё до данной плоскости:

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot2-2(-1)+6\cdot0-2|}{\sqrt{1+4+36}}=\frac{2}{\sqrt{41}}.$$

Если бы прямая лежала на плоскости, то расстояние d было бы равно нулю. Следовательно, прямая параллельная плоскости, и расстояние между ними равно $\frac{2}{\sqrt{41}}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{41}}$.

Пример 9. Составить уравнение пучка плоскостей, если известны уравнения двух плоскостей из этого пучка:

$$x-2y+6z-2=0 \quad и \quad 4x+3y+5z-15=0.$$

Решение. Сначала нужно убедиться, что плоскости пересекаются (т.е. не параллельные и не совпадают). Выписываем координаты их нормальных векторов

$$\overline{n}_1=(1;-2;6) \quad и \quad \overline{n}_2=(4;3;5),$$

и вычисляем отношение их соответствующих координат:

$$\frac{1}{4}\neq\frac{-2}{3}\neq\frac{6}{5}.$$

Следовательно, их нормальные векторы не коллинеарные,

а это означает, что плоскости пересекаются, и лежат в одном пучке плоскостей. Осталось записать уравнение этого пучка плоскостей.
Ответ: $\alpha(x-2y+6z-2)+\beta(4x+3y+5z-15)=0$.

Пример 10. Найти каноническое уравнение оси пучка плоскостей $\alpha(x-2y-z+1)+\beta(2x-y+2z-3)=0$.
Решение. Плоскости

$$x-2y-z+1=0 \quad \text{и} \quad 2x-y+2z-3=0$$

лежат в данном пучке и пересекаются по прямой, которая и является осью этого пучка плоскостей. Следовательно, система уравнений

$$L:\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

есть уравнение оси пучка. Осталось найти каноническое уравнение этой прямой.
Ответ: $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-5}$.

Пример 11. Найти уравнение пучка плоскостей с осью пучка $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-5}$.
Решение. Каноническое уравнение прямой в пространстве можно рассматривать как систему двух уравнений, каждое из которых есть уравнение плоскости. Эти плоскости пересекаются по данной прямой. Имея две плоскости из пучка плоскостей, можно записать его уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{-4} \\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{z-5}{-5} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -4x-8=3y-9 \\ -5x-10=3z-15 \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 5x+3z-5=0 \end{cases}.$$

Ответ: $\alpha(4x+3y-1)+\beta(5x+3z-5)=0$.

Пример 12. Написать уравнение связки плоскостей, если известны три плоскости из этой связки: $x-2y+z-7=0$, $2x+2y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$.
Решение. Сначала мы должны убедиться в том, что эти плоскости пересекаются в одной точке. Необходимым и достаточным условием этого является отличие от нуля смешанного произведения нормальных векторов данных трех плоскостей. Выписываем координаты нормальных векторов:

$$\overline{n}_1=(1;-2;1), \quad \overline{n}_2=(2;2;-1), \quad \overline{n}_3=(1;-3;2),$$

и вычисляем их смешанное произведение:

$$\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2\cdot\overline{n}_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Плоскости пересекаются в одной точке.
Ответ: $\alpha(x-2y+z-7)+\beta(2x+2y-z+2)+$
$+\gamma(x-3y+2z-11)=0$.

Пример 13. Найти центр связки плоскостей:

$$\alpha(x-2y+z-7)+\beta(2x+2y-z+2)+\gamma(x-3y+2z-11)=0.$$

Решение. Координаты центра связки плоскостей есть решение (единственное) системы уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+z-8=0 \\ 2x+2y-z+2=0. \\ x-3y+2z-11=0 \end{cases}$$

Решая систему, находим ответ.

Ответ: $(2; -3; 0)$.

Пример 14. Найти уравнение связки плоскостей с центром связки в точке $(2; -3; 0)$.

Ответ: $A(x-2)+B(y+3)+Cz=0$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение связки плоскостей и её центра.
2. Найдите точки пересечения плоскости $3x-2y+z-6=0$ с координатными осями.
3. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящую через точку A(0; 4; –3), и перпендикулярную плоскости $2x+3y-2z+17=0$.

Вариант 2

1. Определение пучка плоскостей и его оси.
2. Составьте общее уравнение плоскости, перпендикулярную прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{6}$, и проходящей через точку A(–2; 3; –4).
3. Найдите параметрическое уравнение прямой, перпендикулярную плоскости $x-2y+2z-9=0$, и проходящую через точку $A(-2; 1; -3)$.

Вариант 3

1. Перечислите все случаи взаимного расположения прямой в пространстве и плоскости.
2. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящую через точку A(–3; 0; –1), и перпендикулярную плоскости $3x-y+1=0$.
3. Докажите, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости $x-2y-2z+1=0$, и найдите расстояние между ними.

Вариант 4

1. Перечислите все случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, если известно, что они не имеют общих точек.
2. Найдите точку встречи прямой $3x=2y=2z$ с плоскостью $3x-2y+6z-12=0$.
3. Найдите уравнение связки плоскостей с центром связки в точке с координатами (5; –1; –4).

Тест

1. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости:
   a) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ и $x-2y+6z-2=0$;
   b) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ и $x-2y+6z-2=0$;
   c) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ и $3x-2y+6z-2=0$.
2. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{6}$ и плоскостью $x+2y-3=0$.
3. Найти точку встречи прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{6}$ с плоскостью $2x+3y+z-1=0$.
4. Найти точку пересечения координатной оси абсцисс с плоскостью $2x+3y+z-1=0$.
5. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M(2; 0; –3), и перпендикулярной плоскости $y=x$.
6. Найти проекцию точки $M(1; -1; -1)$ на плоскость $2x+3y+z-1=0$.
7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку B(1; –1; –1), и перпендикулярной к прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$.
8. Убедиться, что прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ параллельна плоскости $x-2y+6z-2=0$, и найти расстояние между ними.
9. Составьте уравнение пучка плоскостей, в котором лежат плоскости $4x-3y-6z-5=0$ и $3x-2y+6z+18=0$.
10. Найти уравнение оси пучка плоскостей

$\alpha(x+y-2)+\beta(y-z+1)=0$.

11. Найти уравнение пучка плоскостей, осью которого служит прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.
12. Составить уравнение связки плоскостей, в которой лежат плоскости $x-3z+2=0$, $y-2x-4=0$, $2z-3=0$, и найти координаты её центра.
13. Найти уравнение связки плоскостей с центром в точке A(1; 2; –1).

Практическое занятие 25
Эллипс

Теорминимум: окружность и ее уравнение, определение эллипса, основная терминология, каноническая для эллипса система координат и каноническое уравнение эллипса, параметрическое уравнение эллипса, касательная к эллипсу, зеркальное свойство эллипса, директрисы и фокальный параметр эллипса.

Задачи для аудиторного решения

1. Напишите уравнение окружности радиуса 5 с центром в точке C(–3; 2).
2. Дано уравнение окружности $x^2+y^2+7x=0$. Найдите координаты его центра и радиус.
3. Определите, какие из следующих точек лежат на эллипсе $8x^2+5y^2=77$, какие внутри и какие вне его: $A(-2;3)$, B(2; –2), C(2; –4); D(–1; 3), E(–4; –3), $F(3;-1)$, G(3; –2).
4. Для эллипса $9x^2+25y^2=225$ найдите все его параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.
5. Дано уравнение эллипса $12x^2+36y^2=432$. Убедитесь, что точка M(3; –3) лежит на эллипсе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данному эллипсу, проходящей через точку M. Постройте чертеж.
6. Дано уравнение $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$. Убедитесь, что оно определяет эллипс, и найдите координаты его центра и уравнения главных осей.
7. Найдите каноническое уравнение эллипса, если: a) его полуоси равны 5 и 2; b) его большая ось $2a=10$, а расстояние между фокусами $2c=8$; c) $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon=3/5$; d) расстояние между его директрисами $2d=5$ и $2c=4$; e) $2a=8, 2d=16$; f) $M(-2\sqrt{5};2)$ – точка эллипса и его малая полуось $b=3$; g) $M_1(4;-\sqrt{3})$, $M_2(2\sqrt{2};3)$ суть точки эллипса.

Задачи повышенного уровня сложности

8. Дано уравнение $x^2+y^2+4x-8y+2=0$. Убедитесь, что оно определяет окружность, и найдите уравнения касательных к ней, проходящих через начало координат.
9. Найдите уравнение окружности, касающейся осей координат, и проходящей через точку A(8; 9).
10. Постройте чертеж эллипса $16x^2+y^2=16$, и найдите все его параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр.
11. Найдите уравнение эллипса, фокальной осью которого является ось ординат, и центр лежит в начале координат, если известно, что: a) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8; b) его малая ось равна 16, а эксцентриситет $\varepsilon=0,6$; c) фокусное расстояние равно 6, а расстояние между директрисами

равно $16\frac{2}{3}$; d) расстояние между директрисами равно $10\frac{2}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0,75$.

12. Определите взаимное расположение прямой и эллипса: $2x - y - 3 = 0$, $9x^2 + 16y^2 = 144$.
13. Из точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведены касательные к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$. Найдите уравнения этих касательных.
14. Докажите, что произведение расстояний от центра эллипса до точки пересечения любой его касательной с фокальной осью и до основания перпендикуляра, опущенного из точки касания на фокальную ось, есть величина постоянная, равная квадрату большой полуоси эллипса.
15. Докажите, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу равно квадрату малой полуоси.
16. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой М, лежащей на этом отрезке.

Домашнее задание

1. Для эллипса $36x^2 + 100y^2 = 3600$ найдите все его параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.
2. Дано уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$. Убедитесь, что оно определяет эллипс, и найдите координаты

его центра и уравнения главных осей.
3. Найдите каноническое уравнение эллипса, если: a) его малая ось $2b = 24$, фокусное расстояние $2c = 10$; b) большая ось $2a = 20$, эксцентриситет $\varepsilon = 0,6$; c) $2b = 6$, $2d = 13$; d) M(2; –2) – точка эллипса и его большая полуось a = 4; e) $M(2; -\frac{5}{3})$ – точка эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon = 2/3$.
4. Определите, при каких значениях m прямая $y = -x + m$ пересекает эллипс, касается его, проходит вне эллипса.

Примеры

Пример 1. Написать уравнение окружности радиуса 3 с центром в точке C(2; –1), и найти координаты точек пересечения окружности с осями координат.

Решение. Уравнение данной окружности имеет вид:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Полагая в уравнении окружности $x = 0$, находим координаты точек пересечения окружности с осью ординат:

$$(0-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow (y+1)^2 = 5 \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Полагая в уравнении окружности $y = 0$, находим координаты точек пересечения окружности с осью абсцисс:

$$(x-2)^2 + (0+1)^2 = 9 \Rightarrow (x-2)^2 = 8 \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, $(0, -1 \pm \sqrt{5})$, $(2 \pm 2\sqrt{2}, 0)$.

Пример 2. Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y + 7 = 0$.

Решение. Сгруппируем переменные и выделим полные квадраты:

$$3(x^2-2x)+3\left(y^2+\frac{8}{3}y\right)+7=0,$$

$$3(x^2-2x+1-1)+3\left(y^2+2\cdot\frac{4}{3}y+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)+7=0,$$

$$3(x^2-2x+1)-3+3\left(y^2+2\cdot\frac{4}{3}y+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)-3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+7=0,$$

$$3(x-1)^2+3\left(y+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}+4=0,$$

$$3(x-1)^2+3\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{3},$$

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Ответ: радиус окружности $R=\frac{2}{3}$, центр $C\left(1;-\frac{4}{3}\right)$.

Пример 3. Какие из следующих точек лежат на эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, какие из них лежат внутри него, какие – вне: $A(-4;0)$, $B(0;2)$, $C\left(\frac{9}{5};\frac{8}{5}\right)$, $D\left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$, $E\left(\frac{3}{2};\sqrt{3}\right)$?

Решение. Эллипс является замкнутой кривой, которая разделяет все точки плоскости на точки, лежащие на эллипсе, точки, лежащие внутри эллипса, и точки, лежащие вне эллипса. Если точка лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса. Если точка (x, y) лежит внутри эллипса, тогда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1.$$

Если же точка с координатами (x, y) лежит вне эллипса, то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1.$$

Подставляя координаты данных точек в уравнение эллипса, находим, что точками эллипса являются все данные точки, кроме точек A и D. Так как

$$\frac{(-4)^2}{9}+\frac{0}{4}=\frac{16}{9}>1,$$

то точка A лежит вне эллипса. Для точки D имеем:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}<1,$$

то точка D лежит внутри эллипса.

Ответ: точки B, C и E лежат на эллипсе, точка A лежит вне эллипса, точка D лежит внутри эллипса.

Пример 4. Для эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, найти все его основные параметры: большую и малую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения директрис и расстояние между ними, фокальный параметр. Построить чертеж, отметить на нем найденные параметры.

Решение. Находим большую и малую полуоси эллипса:

$$a^2=9,\ b^2=4\ \Rightarrow\ a=3,\ b=2.$$

Находим координаты вершин эллипса и отмечаем их на чертеже: $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;2)$, $B_2(-2;0)$. Рисуем прямоугольник (штриховой линией) со сторонами

$$x=\pm 3,\ y=\pm 2,$$

и вписываем в него эллипс. Смотрите рисунок 1. После построения эллипса штриховые стороны прямоугольника можно с чертежа удалить. Найдем координаты фокусов эллипса и фокусное расстояние:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow F_1(-\sqrt{5}; 0),\ F_2(\sqrt{5}; 0),$$

$$2c = 2\sqrt{5}.$$

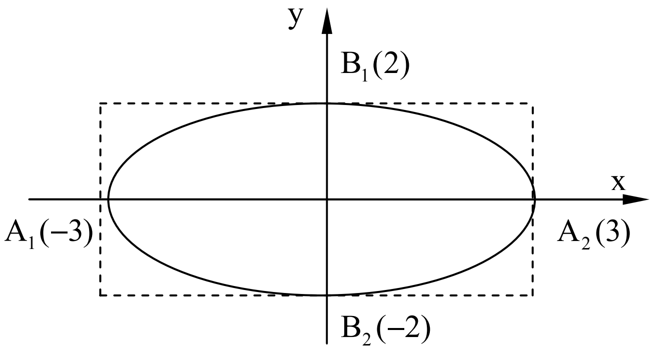

Рис. 1

Отмечаем точки F_1 и F_2 на оси абсцисс. Находим эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Находим уравнения директрис и расстояние между ними:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{9\sqrt{5}}{5},\ 2d = \frac{2a}{\varepsilon} = \frac{18\sqrt{5}}{5},$$

и изображаем их на чертеже (смотрите рисунок 2).

Находим фокальный параметр эллипса $p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{5},\ \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3},\ 2d = \frac{18}{\sqrt{5}},\ p = \frac{4}{3}$.

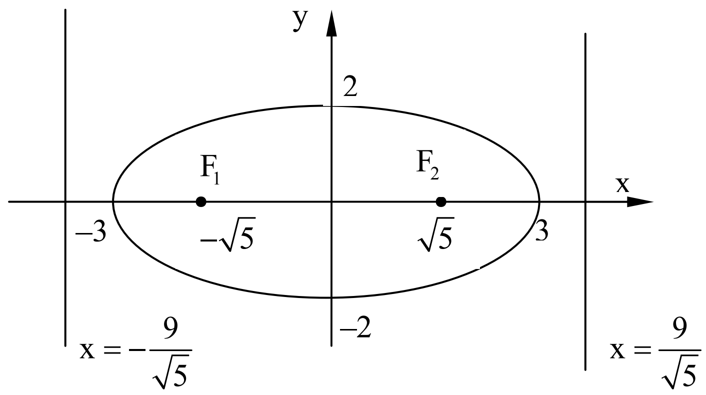

Рис. 2

Пример 5. Найти каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6 и расстояние между директрисами равно 16.

Решение. Так как $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5},\ 2d = \frac{2a^2}{c} = 16$, где 2d обозначает расстояние между директрисами, то отсюда получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными a и c:

$$\begin{cases} 5c = 3a \\ a^2 = 8c \end{cases},$$

решая которую, получаем $a = \frac{24}{5},\ c = \frac{72}{25}$. Вычисляем b^2:

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{24^2}{25} - \frac{72^2}{625} = \frac{(5\cdot 24)^2 - 72^2}{625} =$$

$$\frac{(120-72)(120+72)}{625} = \frac{48\cdot 192}{625} = \left(\frac{96}{25}\right)^2.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{96}{25}\right)^2}=1$.

Пример 6. Дано уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Найдите фокальные радиусы точек эллипса, лежащие на прямой $y=x$.

Решение. Находим координаты точек пересечения данного эллипса с данной прямой:

$$\begin{cases} y=x \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}.$$

Решая систему, находим $M_1\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{12}{5}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{12}{5};-\dfrac{12}{5}\right)$. Фокальные радиусы точки M(x,y) находим по формулам:

$$r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x.$$

Вычисляем эксцентриситет:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{16-9}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Получаем

$$r_1(M_1)=4+\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{12}{5}=\frac{20+3\sqrt{7}}{5},\ r_2(M_1)=\frac{20-3\sqrt{7}}{5},$$

$$r_1(M_2)=4+\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=\frac{20-3\sqrt{7}}{5},\ r_2(M_2)=\frac{20+3\sqrt{7}}{5}.$$

Ответ: $r_1(M_1)=\dfrac{20+3\sqrt{7}}{5}$, $r_2(M_1)=\dfrac{20-3\sqrt{7}}{5}$,

$r_1(M_2)=\dfrac{20-3\sqrt{7}}{5}$, $r_2(M_2)=\dfrac{20+3\sqrt{7}}{5}$.

Пример 7. Найти каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между его директрисами равно 10 и в канонической для данного эллипса системе координат точка $M(-\sqrt{5};2)$ лежит на эллипсе.

Решение. Из условий задачи следует, что

$$2d=\frac{2a^2}{c}=10\ \Rightarrow\ a^2=5c\ \text{ и }\ \frac{5}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1.$$

Так как a, b и c связаны соотношением $b^2=a^2-c^2$, то получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Исключим из этой системы a^2 и b^2. Получаем

$$b^2=5c-c^2\ \text{ и }\ \frac{5}{5c}+\frac{4}{5c-c^2}=1.$$

Решая последнее уравнение, получаем $c=3$. Далее, находим

$$a^2=15,\ b^2=a^2-c^2=15-9=6.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{6}=1$.

Пример 8. Найти уравнение касательной, проведенной к эллипсу $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{6}=1$ в точке $M(-\sqrt{5};2)$.

Решение. Так как данная точка лежит на эллипсе (смотрите предыдущий пример), то воспользуемся уравнением касательной к эллипсу, проведенной в данной точке эллипса:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Подставляя в это уравнение данные задачи, получаем

$$-\frac{\sqrt{5}}{15}x+\frac{2}{6}y=1 \quad \text{или} \quad -\sqrt{5}x+5y-15=0.$$

Ответ: $y=\frac{x}{\sqrt{5}}+3$.

Пример 9. Найти уравнение главных осей и координаты центра эллипса, если его уравнение имеет вид $9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$.

Решение. Группируем переменные и выделяем полные квадраты:

$$9(x^2-2x)+25(y^2+4y)=116,$$

$$9(x^2-2x+1)-9+25(y^2+4y+4)-100=116,$$

$$9(x-1)^2+25(y+2)^2=15^2,$$

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Следовательно, фокальная (большая) ось эллипса имеет уравнение $y=-2$, малая ось эллипса имеет уравнение $x=1$, $C(1;-2)$ – центр эллипса.

Ответ: $x=1$, $y=-2$, $C(1;-2)$.

Пример 10. Из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ под тупым углом α к оси абсцисс выпущен луч света. Найдите уравнение прямой, на которой лежит отраженный от зеркала эллипса луч, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

Решение. Найдем уравнение прямой, на которой лежит выпущенный из левого фокуса $F_1(-c;0)$ луч. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через заданную точку (x_0,y_0):

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad \text{или} \quad y=-2(x+c).$$

Находим с:

$$c^2=a^2-b^2=45-20=25 \Rightarrow c=5,$$

уравнение выпущенного луча $y=-2(x+5)$. Находим точку отражения:

$$\begin{cases} y=-2(x+5) \\ \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1 \end{cases}.$$

Решая систему, приходим к квадратному уравнению:

$$x^2+9x+18=0.$$

Решая уравнение, находим его корни $x_1=-6$, $x_2=-3$. Из условия задачи следует, что второй корень уравнения является посторонним, так как абсцисса точки отражения луча находится левее первого фокуса $F_1(-5;0)$. Таким образом, абсцисса точки отражения $x=-6$. Находим ординату точки отражения

$$y=-2(x+5)=-2(-6+5)=2.$$

Получаем, что точка C(–6; 2) есть точка отражения луча. Согласно зеркальному свойству эллипса, выпущенный из левого фокуса луч света отразившись от зеркала эллипса проходит через фокус $F_2(5;0)$. Таким образом, прямая, на которой лежит отраженный луч проходит через фокус $F_2(5;0)$ и точку C(–6; 2). Используем уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставляя координаты точек F_2 и С, получаем:

$$\frac{x-5}{-6-5}=\frac{y}{2} \quad \text{или} \quad 2x+11y-10=0.$$

Ответ: $2x + 11y - 10 = 0$.

Пример 11. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, если известно его фокусное расстояние $2c = 24$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Решение. Для данного расположения эллипса сохраняем все старые обозначения всех его параметров. Тогда искомое уравнение будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

где a – большая полуось эллипса, b – его малая полуось,

$$b^2 = a^2 - c^2,\ \varepsilon = \frac{c}{a},\ p = \frac{b^2}{a},\ 2d = \frac{2a}{\varepsilon},$$

уравнения директрис имеют вид:

$$y = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Имеем,

$$c = 12,\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow a = 13,\ b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 144 = 25.$$

Ответ: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение окружности.
2. Для эллипса $x^2 + 4y^2 = 16$ найдите:
   a) большую и малую оси; b) фокусное расстояние.

Вариант 2

1. Определение радиуса окружности.
2. Для эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ найдите его полуоси и эксцентриситет.

Вариант 3

1. Определение эллипса.
2. Для эллипса $x^2 + 9y^2 = 36$ найдите эксцентриситет и расстояние между директрисами.

Вариант 4

1. Определение кривой второго порядка.
2. Для эллипса $4x^2 + 25y^2 = 100$ найдите уравнения его директрис и фокальный параметр.

Тест

1. Напишите каноническое уравнение окружности, радиус которой равен 2.
2. Напишите уравнение окружности с центром в точке C(0; 2) и радиуса 3.
3. Найдите центр и радиус окружности $x^2 + y^2 = 2x$.
4. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его большая ось равна 4, а малая ось равна 2.
5. Определите взаимное расположение эллипса $x^2 + 5y^2 = 25$ и точки M(4, –2).
6. Докажите, что через внутреннюю точку эллипса нельзя провести к нему касательную.
7. Найдите фокусное расстояние эллипса $x^2 + 2y^2 = 1$.
8. Найдите эксцентриситет эллипса $x^2 + 2y^2 = 2$.
9. Найдите директрисы эллипса $x^2 + 2y^2 = 4$.
10. Найдите фокальный параметр эллипса $x^2 + 3y^2 = 9$.
11. Напишите уравнение касательной к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 3$, проходящей через точку $M(1;\ 1)$.
12. Найдите каноническое уравнение эллипса, если известны расстояние между директрисами и эксцентриситет: $2d = 32,\ \varepsilon = 0,5$.
13. Найдите каноническое уравнение эллипса, если известны малая ось и эксцентриситет: $2b = 10,\ \varepsilon = \frac{12}{13}$.

Практическое занятие 26
Гипербола

Теорминимум: определение гиперболы, каноническая для гиперболы система координат и каноническое уравнение гиперболы, асимптоты гиперболы, касательная к гиперболе, зеркальное свойство гиперболы, директрисы и фокальный параметр гиперболы.

Задачи для аудиторного решения

1. Для гиперболы $16x^2-9y^2=144$ найдите все его параметры: действительную и мнимую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис и расстояние между директрисами, фокальный параметр. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.
2. Дано уравнение гиперболы $20x^2-16y^2=320$. Убедитесь, что точка M(6; 5) лежит на гиперболе и найдите её фокальные радиусы. Найдите уравнение касательной к данной гиперболе, проходящей через точку M. Постройте чертеж.
3. Дано уравнение $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$. Убедитесь, что оно определяет гиперболу, и найдите координаты её центра и уравнения главных осей. Найдите полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Выполните чертеж.
4. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если даны: a) её полуоси равны 5 и 4; b) её мнимая ось $2b=8$, а расстояние между фокусами $2c=10$; c) $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon=1{,}5$; d) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и фокусное расстояние $2c=20$; e) расстояние между директрисами $2d=6{,}4$ и $2b=6$; f) точки M(6; –1) и

$N(-8;2\sqrt{2})$ гиперболы; g) точка M(4,5; –1) гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$; h) уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x=\pm\frac{16}{5}$.

Задачи повышенного уровня сложности

5. Для гиперболы $16x^2-9y^2=-144$ найдите полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. (Обозначения действительной и мнимой полуосей оставить такими же, как и в канонической для гиперболы системе координат.)
6. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если даны: a) $a=18, b=6$ (буквой a по прежнему обозначает действительную полуось); b) фокусное расстояние $2c=10$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$; c) уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между действительными вершинами равно 48; d) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{7}{5}$; e) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 6,4.
7. Определите взаимное расположение прямой и гиперболы: $2x-y-10=0,\quad 5x^2-20y^2=100$.
8. Определите, при каких значениях m прямая $y=\frac{5}{2}x+m$ пересекает гиперболу $36x^2-9y^2=144$, касается её,

проходит вне её.

9. Составьте уравнение касательных к гиперболе $64x^2 - 16y^2 = 1024$, параллельных прямой $10x - 3y + 9 = 0$.
10. Составьте уравнения касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведенных из точки C(–1; –7).
11. Эксцентриситет гиперболы равен 2, центр её лежит в начале координат, один из фокусов F(12; 0). Найдите расстояние от точки гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей данному фокусу.
12. Через левый фокус гиперболы $25x^2 - 144y^2 = 3600$ проведен перпендикуляр к её действительной оси. Найдите расстояние от фокусов до точек пересечения этого перпендикуляра с гиперболой.
13. Из правого фокуса гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$ под углом α к оси абсцисс направлен луч света. Найдите уравнение прямой, на которой лежит отраженный от гиперболы луч, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.
14. Докажите, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух её асимптот есть величина постоянная.
15. Докажите, что площадь параллелограмма, ограниченного асимптотами гиперболы и прямыми, проведенными через любую её точку параллельно асимптотам, есть величина постоянная.
16. Докажите, что произведение расстояний от фокусов гиперболы до любой её касательной есть величина постоянная.
17. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом.

Домашнее задание

1. Для гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$ найдите все её параметры: действительную и мнимую полуоси, координаты вершин и фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис и расстояние между ними, фокальный параметр. Постройте чертеж и отметьте на нем все найденные параметры.
2. Дано уравнение $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$. Убедитесь, что оно определяет гиперболу, и найдите координаты её центра и уравнения главных осей. Найдите полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис. Выполните чертеж.
3. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если даны: a) её действительная ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = 1,25$; b) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и фокусное расстояние $2c = 26$; c) уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами $2d = 12\frac{4}{5}$; d) точка M(–5; 3) гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$; e) точка M(–3; 2,5) гиперболы и уравнения директрис $x = \pm\frac{4}{3}$.

Примеры

Пример 1. Для гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, найти все её основные параметры: действительную и мнимую полуоси, координаты вершин и

фокусов, фокусное расстояние, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис и расстояние между ними, фокальный параметр. Построить чертеж, отметить на нем найденные параметры.
Решение. Смотрите рисунок 1.

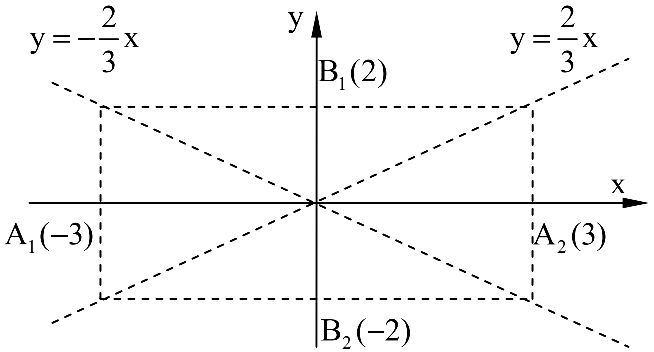

Рис. 1

Находим действительную и мнимую полуоси гиперболы:

$$a^2 = 9,\ b^2 = 4 \Rightarrow a = 3,\ b = 2.$$

Находим координаты вершин гиперболы и отмечаем их на чертеже:

$$A_1(-3; 0),\ A_2(3; 0),\ B_1(0; 2),\ B_2(-2; 0).$$

Рисуем основной прямоугольник гиперболы (штриховой линией) со сторонами

$$x = \pm 3,\ y = \pm 2,$$

проводим его диагонали, и продолжаем их, изображая асимптоты гиперболы: $y = \pm \frac{2}{3}x$. Осталось изобразить ветви гиперболы. Смотрите рисунок 2.

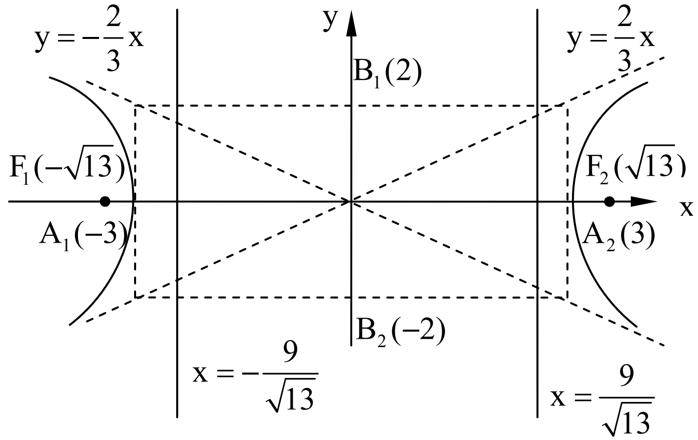

Рис. 2

Найдем координаты фокусов гиперболы и фокусное расстояние:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow F_1(-\sqrt{13}; 0),\ F_2(\sqrt{13}; 0),$$

$$2c = 2\sqrt{13}.$$

Отмечаем точки F_1 и F_2 на оси абсцисс. Находим эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Находим уравнения директрис и расстояние между ними:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{9\sqrt{13}}{13},\ 2d = \frac{2a}{\varepsilon} = \frac{18\sqrt{13}}{13},$$

и изображаем их на чертеже. Находим фокальный параметр гиперболы $p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $a=3,\ b=2,\ 2c=2\sqrt{13},\ \varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3},\ 2d=\frac{18\sqrt{13}}{13},\ p=\frac{4}{3}$, рисунок 2.

Пример 2. Найти каноническое уравнение гиперболы, если его эксцентриситет равен 1,5 и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

Решение. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2},\ 2d=\frac{2a^2}{c}=\frac{8}{3}$, где 2d обозначает расстояние между директрисами, то отсюда получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными a и c:

$$\begin{cases} 2c=3a \\ 3a^2=4c \end{cases},$$

решая которую, получаем $a=2,\ c=3$. Вычисляем b^2: $b^2=c^2-a^2=9-4=5$.

Ответ: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

Пример 3. Убедиться, что точка M(–5; 2,25) лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, и найти её фокальные радиусы.

Решение. Подставляем координаты точки M в уравнение гиперболы:

$$\frac{5^2}{16}-\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9}=\frac{25}{16}-\frac{9}{16}=1,$$

откуда следует, что точка M лежит на гиперболе. Фокальные радиусы точки M(x,y) находим по формулам:

$$r_1=|a+\varepsilon x|,\ r_2=|a-\varepsilon x|.$$

Вычисляем эксцентриситет:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{16+9}}{4}=\frac{5}{4}.$$

Получаем

$$r_1(M)=\left|4+\frac{5}{4}\cdot(-5)\right|=\frac{|16-25|}{4}=\frac{9}{4},\ r_2(M)=\frac{41}{4},$$

Ответ: $r_1(M)=\frac{9}{4},\ r_2(M)=\frac{41}{4}$.

Пример 4. Эксцентриситет гиперболы равен 1,5, её центр лежит в начале координат, одна из директрис дана уравнением $x=-8$. Вычислить расстояние от точки M гиперболы с абсциссой, равной 14, до фокуса, соответствующего данной директрисе.

Решение. По условию задачи требуется вычислить фокальный радиус $r_1=F_1M=|a+\varepsilon x|$. Так как уравнение данной директрисы $x=-\frac{a}{\varepsilon}=-8$, то отсюда находим $a=8\varepsilon=12$.

Следовательно, $r_1=F_1M=|a+\varepsilon x|=12+\frac{3}{2}\cdot 14=33$.

Ответ: 33.

Пример 5. Найти каноническое уравнение гиперболы, если в канонической для гиперболы системе координат известны уравнения её асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$, и одна из точек гиперболы имеет координаты M(4,5; –1).

Решение. Из уравнений асимптот находим, что $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$. Так как точка M лежит на гиперболе, то её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, откуда находим

$$\frac{(4,5)^2}{a^2}-\frac{(-1)^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{81}{4a^2}-\frac{1}{b^2}=1.$$

Получаем систему двух уравнений с неизвестными a и b. Решаем эту систему.

$$\begin{cases} \frac{81}{4a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \\ 2a=3b \end{cases}.$$

Возведем второе уравнение в квадрат и подставим в первое:

$$\frac{81}{9b^2}-\frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=8 \Rightarrow a^2=\frac{9}{4}b^2=18.$$

Ответ: $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1.$

Пример 6. Найти уравнения касательных, проведенной к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных прямой $4x+3y-7=0$.

Решение. Уравнение касательной к гиперболе, проведенной в точке $M(x_o;y_o)$ гиперболы, имеет вид:

$$\frac{x_o}{20}x-\frac{y_o}{5}y=1.$$

По условию данная прямая и касательная перпендикулярны, следовательно, скалярное произведение их нормальных векторов равно нулю:

$$4\cdot\frac{x_o}{20}+3\cdot\left(-\frac{y_o}{5}\right)=0 \text{ или } x_o=3y_o.$$

Точка $M(x_o;y_o)$ лежит на гиперболе, поэтому её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы:

$$\frac{x_o^2}{20}-\frac{y_o^2}{5}=1.$$

Имеем два уравнения с неизвестными x_o и y_o. Решаем получившуюся систему:

$$\begin{cases} x_o=3y_o \\ \frac{x_o^2}{20}-\frac{y_o^2}{5}=1 \end{cases}.$$

Подставляя x_o из первого уравнения во второе, получаем

$$\frac{9y_o^2}{20}-\frac{y_o^2}{5}=1 \text{ или } y_o=\pm 2 \Rightarrow x_o=\pm 6.$$

Имеем две точки касания: (6; 2) и (–6; –2). Подставляя их в уравнение касательной к гиперболе, получаем искомые уравнения касательных:

$$\frac{6}{20}x-\frac{2}{5}y=1, \quad \frac{-6}{20}x-\frac{(-2)}{5}y=1.$$

Ответ: $3x-4y-10=0, \quad 3x-4y+10=0.$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение фокальных радиусов точки гиперболы.
2. Для гиперболы $x^2-4y^2=16$ найдите:

   a) действительную и мнимую оси; b) фокусное расстояние.

Вариант 2

1. Определение фокусного расстояния гиперболы.
2. Для эллипса $4x^2-9y^2=36$ найдите:

   a) действительную и мнимую оси;
   b) эксцентриситет.

Вариант 3

1. Определение эксцентриситета гиперболы.
2. Для гиперболы $x^2-9y^2=36$ найдите эксцентриситет и расстояние между директрисами.

Вариант 4

1. Определение гиперболы.
2. Для гиперболы $4x^2 - 25y^2 = 100$ найдите уравнения её асимптот, уравнения директрис и фокальный параметр.

Тест

1. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если его действительная ось равна 4, а мнимая ось равна 6.
2. Определите, лежит ли точка M(4, –2) на гиперболе $x^2 - 5y^2 = 4$.
3. Найдите фокусное расстояние гиперболы $x^2 - 2y^2 = 1$.
4. Найдите эксцентриситет гиперболы $x^2 - 2y^2 = 2$.
5. Найдите директрисы гиперболы $x^2 - 2y^2 = 4$.
6. Найдите уравнения асимптот гиперболы $4x^2 - y^2 = 1$.
7. Найдите фокальный параметр гиперболы $4x^2 - 3y^2 = 1$.
8. Напишите уравнение касательной проходящей через точку M(1; 1) к гиперболе $2x^2 - y^2 = 1$.
9. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если известны расстояние между директрисами и эксцентриситет: $2d = 32$, $\varepsilon = 2$.
10. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если известны мнимая ось и эксцентриситет: $2b = 10$, $\varepsilon = 1{,}5$.
11. Найдите каноническое уравнение гиперболы, если известны её асимптоты и фокальный параметр: $y = \pm\frac{x}{2}$, $p = \frac{1}{2}$.
12. Напишите уравнение равнобочной гиперболы, фокальная ось которой совпадает с осью ординат, а её основной прямоугольник является квадратом с центром в начале координат и со стороной 1.
13. Докажите, что через начало координат нельзя провести касательную к гиперболе.

Практическое занятие 27
Парабола

Теорминимум: определение параболы, каноническая для параболы система координат и каноническое уравнение параболы, касательная к параболе, зеркальное свойство параболы, директриса и фокальный параметр параболы, ветви параболы.

Задачи для аудиторного решения

1. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она симметрична относительно оси абсцисс и её ветви направлены вправо, зная, что: а) фокальный параметр $p = 3$; б) парабола проходит через точку с координатами M(1; 2).
2. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она симметрична относительно оси абсцисс и её ветви направлены влево, зная, что: a) фокальный параметр $p = 0{,}5$; b) парабола проходит через точку с координатами M(–1; 3).
3. Определите, какие линии определяются следующими уравнениями: a) $y = 2\sqrt{x}$; b) $y = 2\sqrt{-x}$; c) $x = -3\sqrt{-y}$.
4. На параболе $y^2 = 16x$ найдите точки, фокальный радиус которых равен 13.
5. Найдите фокальный параметр параболы, координаты её вершины и фокуса, уравнение её директрисы, и изобразите на чертеже: a) $y^2 = 4x - 8$; b) $x^2 = 2 - y$; c) $y = 4x^2 - 8x + 7$; d) $x = 2y^2 - 12y + 14$.
6. Составьте уравнение параболы, если известны координаты её фокуса F(7; 2) и уравнение её директрисы $x = 5$. Изобразите чертеж данной параболы.
7. Определите взаимное расположение параболы $y^2 = -5x$ и прямой $5x - y - 15 = 0$.
8. При каких значениях углового коэффициента прямая $y = kx + 2$: a) пересекает параболу $4x - y^2 = 0$; b) касается ее; c) проходит вне этой параболы.

Задачи повышенного уровня сложности

9. Из точки A(5; 9) проведены касательные к параболе $4x = y^2$. Составьте уравнение хорды, соединяющей

точки касания.

10. Определите точки пересечения параболы $y^2 = 3x$ и гиперболы $5x^2 - 20y^2 = -100$. Выполните чертеж.
11. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20 м. Величина его прогиба на расстоянии 2 м от точки крепления, считая по горизонтали, равна 14,4 см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы. (Ответ: 40 см.)
12. Доказать, что две параболы, имеющие общую ось симметрии и общий фокус, расположенный между их вершинами, пересекаются под прямым углом.
13. Доказать, что если две параболы со взаимно перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках, то эти точки лежат на одной окружности.

Домашнее задание

1. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если она симметрична относительно оси ординат и её ветви направлены вверх, зная, что: a) фокальный параметр $p = 5$; b) парабола проходит через точку с координатами M(1; 2).
2. Вычислите фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.
3. Для параболы $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$ найдите её фокальный параметр, координаты её вершины и фокуса, уравнение её директрисы. Найдите ось симметрии данной параболы, и изобразите её на чертеже.
4. Составьте уравнение параболы, если известны координаты её фокуса F(4; 3) и уравнение её директрисы $y = -1$. Изобразите чертеж данной параболы.

Примеры

Пример 1. Для параболы, заданной каноническим уравнением $y^2 = 4x$, найти: фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, уравнение директрисы. Построить чертеж.

Решение. Находим фокальный параметр $p = 2$, координаты фокуса F(1; 0) и уравнение директрисы $x = -1$. Строим чертеж.

Ответ: $p = 2,\ F(1;0),\ x = -1$.

Пример 2. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, расположена симметрично оси абсцисс и проходит через точку A(9; 6).

Решение. Подставляем координаты данной точки в каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$.

$$6^2 = 2p \cdot 9.$$

Из полученного уравнения находим фокальный параметр:

$$p = 2.$$

Ответ: $y^2 = 4x$.

Пример 3. Убедиться, что точка M(5; 10) лежит на параболе $y^2 = 20x$, и найти её фокальный радиус.

Решение. Подставляем координаты точки M в уравнение параболы:

$$10^2 = 20 \cdot 5.$$

Так как получили верное равенство, то данная точка M лежит на данной параболе. Находим фокальный параметр $p = 10$. Для вычисления фокального радиуса точки M используем формулу:

$$r = x + \frac{p}{2} = 5 + \frac{10}{2} = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 4. Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 20x$, проведенной в точке M(5; 10).

Решение. Фокальный параметр параболы $p = 10$. Воспользуемся уравнением касательной, проведенной к параболе в точке (x_0, y_0)

$$y_o y = p(x + x_o).$$

Имеем, $10y = 10(x+5)$ или $y = x + 5$.

Ответ: $y = x + 5$.

Пример 5. Найти фокальный параметр и определить расположение относительно координатных осей следующих парабол: a) $y^2 = 6x$; b) $x^2 = 4y$; c) $y^2 = -4x$; d) $x^2 = -2y$.

Ответ: a) $p = 3$, парабола с вершиной в начале координат, расположена симметрично относительно оси абсцисс, ветви параболы направлены вправо; b) $p = 2$, парабола с вершиной в начале координат, расположена симметрично относительно оси ординат, ветви параболы направлены вверх; c) $p = 2$, парабола с вершиной в начале координат, расположена симметрично относительно оси абсцисс, ветви параболы направлены влево; d) $p = 1$, парабола с вершиной в начале координат, расположена симметрично относительно оси ординат, ветви параболы направлены вниз.

Пример 6. Составить уравнение параболы, если известны координаты её фокуса F(–6; 0) и уравнение директрисы $x - 6 = 0$.

Решение. Так как начало координат находится на фокальной оси параболы посередине между фокусом и директрисой, а направление фокальной оси противоположно направлению оси абсцисс, то уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = -2px.$$

где фокальный параметр p равен расстоянию от фокуса до директрисы:

$$p = 12.$$

Ответ: $y^2 = -24x$.

Пример 7. Установите, что уравнение $y^2 = 4 - 6x$ определяет параболу, найдите её фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Определите её ось симметрии и направление ветвей.

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$y^2 = -6\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

Если взять параболу $y^2 = -6x$ и выполнить её параллельный перенос по оси абсцисс вправо на величину, равную $\frac{2}{3}$, то получаем параболу с данным уравнением. Следовательно, данное уравнение является уравнением параболы. Далее, для параболы $y^2 = -6x$ имеем: фокальный параметр $p = 3$, координаты вершины (0; 0), координаты фокуса $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, уравнение директрисы $x = \frac{3}{2}$. После параллельного переноса параболы вдоль оси абсцисс на $\frac{2}{3}$, величина её фокального параметра не изменится, а абсциссы координат вершины параболы и её фокуса увеличатся на $\frac{2}{3}$:

$A\left(\frac{2}{3};0\right)$, $F\left(-\frac{5}{6};0\right)$. Директриса параболы также сдвинется по оси абсцисс вправо на $\frac{2}{3}$: $x=\frac{13}{6}$.

Ответ: $p=3$, координаты вершины $A\left(\frac{2}{3};0\right)$, координаты фокуса $F\left(-\frac{5}{6};0\right)$, уравнение директрисы $x=\frac{13}{6}$, осью симметрии является ось абсцисс, ветви направлены влево.

Пример 8. Установите, что уравнение $y=\frac{1}{4}x^2+x+2$ определяет параболу, найдите её фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Определите её ось симметрии и направление ветвей.

Решение. Данное уравнение можно рассматривать как квадратичную функцию, графиком которой, как известно, является парабола. Так как старший коэффициент положительный, то ветви параболы направлены вверх. Для нахождения координат её вершины можно использовать формулы:

$$x_в=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=-2,\quad y_в=\frac{1}{4}x_в^2+x_в+2=1.$$

Отсюда следует, что осью симметрии (фокальной осью) является прямая $x=-2$, координаты вершины A(–2; 1). Для нахождения фокального параметра выделим в квадратном трехчлене полный квадрат:

$$y=\frac{1}{4}x^2+x+2=\frac{1}{4}(x+2)^2+1.$$

Заметим, что из последнего уравнения сразу же следуют координаты вершины параболы A(–2; 1). Перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$(x+2)^2=4(y-1).$$

Это уравнение параболы, которое получается из уравнения параболы $x^2=4y$ после её параллельного переноса, сначала, вдоль оси абсцисс влево на 2 единицы, а затем вдоль оси ординат вверх на одну единицу. Так как фокальный параметр параболы при этом не изменится, то

$$p=2.$$

Фокус параболы $x^2=4y$ имеет координаты (0; 1), её директриса имеет уравнение $y=-1$. После параллельного переноса, получаем координаты фокуса F(–2; 2), уравнение директрисы $y=0$.

Ответ: $p=2$, координаты вершины A(–2; 1), координаты фокуса F(–2; 2), уравнение директрисы $y=0$, ось симметрии $x=-2$, ветви направлены вверх.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение фокального радиуса точки параболы.
2. Для параболы $y^2=16x$ найдите фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Постройте чертеж.

Вариант 2

1. Определение фокального параметра параболы.
2. Для параболы $y^2=-8x$ найдите фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Постройте чертеж.

Вариант 3

1. Определение канонической для параболы системы координат.
2. Для параболы $x^2=12y-6$ найдите фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Постройте чертеж.

Вариант 4

1. Определение параболы.

2. Для параболы $x^2 = 10 - 5y$ найдите фокальный параметр, координаты вершины и фокуса, и уравнение директрисы. Постройте чертеж.

Тест

1. Найдите фокальный параметр параболы $y^2 = 32x$.
2. Найдите координаты вершины и координаты фокуса параболы $y^2 = 22x$.
3. Найдите уравнение директрисы параболы $y^2 = 13x$.
4. Найдите уравнение оси симметрии параболы $(y-1)^2 = x$.
5. Найдите координаты вершины параболы $(y-1)^2 = 2x - 2$.
6. Найдите уравнение параболы, если известно, что её вершина находится в начале координат, осью её симметрии является ось абсцисс, и парабола проходит через точку M(–2; 1).
7. Напишите уравнение касательной к параболе $y = -x^2$ в точке с координатами (–1; –1).
8. На параболе $y^2 = -5x$ найдите точку с ординатой, равной –10, и найдите её фокальный радиус.
9. Постройте чертеж параболы $x^2 + 8x - 9y - 29 = 0$.
10. Составьте уравнение параболы, если известны координаты её фокуса F(2; 1) и уравнение директрисы $y = 2$.

Практическое занятие 28
Алгебра матриц

Теорминимум: основные определения, действия с матрицами и их свойства, нулевая и единичная матрицы, противоположная матрица.

Задачи для аудиторного решения

1. Решить матричное уравнение $2A + 3B - 0{,}5X = O$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$.
2. Вычислить произведение строки $A = (1, 1, -2)$ на столбец $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Вычислить произведение матриц AB и BA, если $A = (2, -3, 4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$.
4. Проверить равенства $AB = BA$, $(AB)^2 = A^2B^2$, $(AB)^2 = A(BA)B$, $(AB)^t = B^tA^t$, $(AB)^t = A^tB^t$ если:

   а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

   б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Вычислить A^2, A^3 и A^n, где $n \in \mathbb{N}$, если:

   а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Дан многочлен $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Вычислить $f(A)$, где

   а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.
7. Вычислить e^A, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Задачи повышенного уровня сложности

8. Докажите, что множество матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$ относительно сложения является абелевой группой.
9. Докажите, что множество матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$ относительно сложения матриц и умножения матриц на скаляры из поля $\mathbb{F}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}$.
10. Докажите, что множество квадратных матриц n-го порядка над полем $\mathbb{F}$ относительно сложения и умножения матриц является некоммутативным кольцом с единицей.
11. Выпишите все квадратные матрицы 2-го порядка над полем из двух элементов: $F_2 = \{0;1\}$. Решите матричное уравнение $X^2 + E = O$, где E – единичная матрица, O – нулевая.
12. Проверьте, что матрица $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ является решением матричного уравнения $X^2 + E = O$. Покажите, что любая матрица 2-го порядка вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ может быть представлена в виде $A = a \cdot E + b \cdot I$.
13. Докажите, что в кольце квадратных матриц n-го порядка над полем $\mathbb{F}$ существуют делители нуля.

Домашнее задание

1. Вычислить: а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить $A \cdot A^t - A^t A$, где $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Примеры

Пример 1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти матрицу, противоположную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -2$.

Решение. Используем правило умножения матрицы на число:

$$(-2) \cdot A = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -8 & -10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(-2)\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -6\\ -8 & -10 & 12\end{pmatrix}$.

Пример 4. Решить матричное уравнение $3X+2A=O$, где $A=(0,-2,3,1)$, O – нулевая матрица.

Решение. $X=-\frac{2}{3}A=-\frac{2}{3}(0,-2,3,1)=\left(0,\frac{4}{3},-2,-\frac{2}{3}\right)$.

Ответ: $X=\left(0,\frac{4}{3},-2,-\frac{2}{3}\right)$.

Пример 5. Найти произведение строки $(1,2,3,4)$ на столбец $\begin{pmatrix}-1\\ 6\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$.

Решение. $(1,2,3,4)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 6\\ -2\\ 5\end{pmatrix}=1\cdot(-1)+2\cdot 6+3\cdot(-2)+4\cdot 5=25$.

Ответ: 25.

Пример 6. Найти произведение матриц AB:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 5 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & 7\\ -3 & 5 & -4 & 8\\ 2 & 3 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение. Умножение матриц удобно производить, пользуясь схемой "креста". Изображаем "крест" – два перпендикулярных друг другу отрезка прямых, первую матрицу пи-

шем в третью четверть, вторую – в первую.

$$\begin{array}{rrr|rrrr}
 & & & 0 & -1 & -2 & 7\\
 & & & -3 & 5 & -4 & 8\\
 & & & 2 & 3 & 4 & -1\\ \hline
2 & -3 & 4 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\
-1 & 5 & -6 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}
\end{array}$$

Умножаем первую строку матрицы A на первый столбец матрицы B:

$$c_{11}=2\cdot 0+(-3)(-3)+4\cdot 2=17.$$

Умножаем первую строку матрицы A на следующие столбцы матрицы B:

$$c_{12}=2(-1)+(-3)5+4\cdot 3=-5,\quad c_{13}=2(-2)+(-3)(-4)+4^2=24,$$

$$c_{14}=2\cdot 7+(-3)8+4(-1)=-14.$$

Далее, аналогично, умножаем по очереди вторую строку матрицы A на все столбцы матрицы B:

$$c_{21}=(-1)0+5(-3)+(-6)2=-27,\quad c_{22}=(-1)^2+5^2+(-6)3=8,$$

$$c_{23}=(-1)(-2)+5(-4)+(-6)4=-42,$$

$$c_{24}=(-1)7+5\cdot 8+(-6)(-1)=39.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}17 & -5 & 24 & -14\\ -27 & 8 & -42 & 39\end{pmatrix}$.

Заметим, что матрицу B на матрицу A умножить нельзя, так как ширина матрицы B равна 4, а высота матрицы A равна 2, то есть они не равны.

Пример 7. Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

Ответ: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Пример 8. Найти A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Используем схему креста:

$$\begin{array}{rr|rr|rr} & & 1 & 2 & 1 & 2 \\ & & -2 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 4 & -11 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & -3 & 2 & -11 \end{array}.$$

Ответ: $A^3 = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}$.

Пример 9. Найти значение многочлена $p(x) = x^2 - 3x + 2$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $p(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} +$

$+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $p(A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение строки данной длины.
2. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -19 & -21 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить $\frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. Определение диагональной матрицы.
2. Вычислить $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -19 & -21 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Решить матричное уравнение $2X + 7\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

Вариант 3

1. Правило сложения матриц.
2. Вычислить $A^2 - 3 \cdot E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица.
3. Решить матричное уравнение $6X - 5\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0$.

Вариант 4

1. Правило умножения матрицы на число.
2. Вычислить $4A^2 + 3 \cdot E$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица.
3. Решить матричное уравнение $6X + \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = 6E$.

Тест

1. Вычислить сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.
2. Вычислить произведение матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = -3$.
3. Вычислить $2A - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 9 & 0 & -7 & 11 \end{pmatrix}$,

   $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.
4. Решить матричное уравнение $3A + 2B - 4E + 6X = 0$, где E – еди-

ничная матрица, $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\3&-2&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2&3\\-2&-3&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

5. Вычислить произведение $(1,1,-2,3)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$.

6. Вычислить произведение матриц AB и BA, где

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\9&0&-7&11\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\\-3&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

7. Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\9&0&-7&11\end{pmatrix}$.

8. Вычислить $(A^tA)^2$, если $A=(1,0,-1)$.

9. Найдите значение многочлена $q(x)=x^3-x^2+x-1$ от матрицы $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$.

Практическое занятие 29
Определители

Теорминимум: перестановки конечного множества, их количество, инверсии, четность перестановки, транспозиция и ее свойства, определитель, член определителя и его знак. Правило знаков.

Задачи для аудиторного решения

1. Определить число инверсий в перестановках:
   а) (2, 3, 5, 4, 1); б) (1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8);
   в) (6, 3, 1, 2, 5, 4); г) (7, 5, 6, 4, 1, 3, 2);
   д) (1, 3, 5, …, $2n-1$, 2, 4, 6, 8, …, 2n);
   е) $(n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1)$.
2. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м

месте перестановки?
3. Сколько инверсий образует наибольшее число перестановки, стоящее на k-м месте?
4. Перейти от перестановки 7, 5, 3, 9, 1, 6, 2, 8, 4 к начальной перестановке 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 за наименьшее число транспозиций.
5. Выяснить, какие из следующих произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:
   а) $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$; б) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;
   в) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$; г) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$;
   д) $a_{12}a_{23}a_{34}\ ...\ a_{n-1,n}a_{n,1}$.
6. Выбрать числа m и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{m5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.
7. Пользуясь только определением определителя выпишите все члены определителя 2-го и 3-го порядков.
8. Пользуясь определением вычислить определитель
   $$\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&2\\0&3&3&3\\4&4&4&4\end{vmatrix}.$$
9. С каким знаком входит в определитель произведение элементов:
   а) главной диагонали; б) побочной диагонали?
10. Пользуясь только определением определителя вычислите определитель:
    а) диагональной матрицы; б) треугольной матрицы;
    в) матрицы, у которой все элементы выше побочной диагонали равны нулю.
11. Пользуясь только определением определителя выпи-

шите все члены определителя 4-го порядка, которые входят в определитель со знаком плюс.

12. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

Задачи повышенного уровня сложности

13. Докажите, что при транспозиции соседних элементов перестановки число инверсий изменяется на 1.
14. Докажите, что при транспозиции любых элементов перестановки число инверсий изменяется на нечетное число.
15. В какой перестановке множества чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?
16. Докажите, что любую транспозицию можно выполнить с помощью смежных транспозиций.
17. Найти сумму инверсий во всех перестановках множества из четырех элементов.
18. Докажите, что от любой перестановки, содержащей k инверсий можно перейти к начальной перестановке с помощью k смежных транспозиций.
19. Известно, что число инверсий в перестановке $(a_1, a_2, ..., a_n)$ равно k. Сколько инверсий в перестановке $(a_n, a_{n-1}, ..., a_1)$?
20. Вычислите определитель, пользуясь его определением:

$$а) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \; б) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Домашнее задание

1. Выбрать числа m и k так, чтобы произведение $a_{47}a_{63}a_{1m}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.
2. Пользуясь определением вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

3. Выпишите все члены определителя $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$, содержащие в качестве сомножителей x^4 и x^3.

Примеры

Пример 1. Какие из следующих упорядоченных наборов чисел образуют перестановку множества $\{1,2,3,4,5,6\}$:

а) (2, 1, 3, 5, 4, 1, 6); б) (2, 3, 5, 4, 6); в) (2, 3, 5, 4, 1, 6)?

Решение. В наборе а) число 1 встречается два раза, а в наборе б) число 1 отсутствует, поэтому эти наборы чисел не являются перестановками множества $\{1,2,3,4,5,6\}$. В наборе в) все числа данного множества встречаются в точности по одному разу без повторений и пропусков, и поэтому этот набор чисел является перестановкой данного множества.

Ответ: в)

Пример 2. Выписать все пары чисел, образующих инверсию в перестановке (1, 3, 2, 5, 4, 6).

Ответ: (3, 2), (5, 4).

Пример 3. Определить четность перестановки (1, 3, 2, 5, 4, 6).

Решение. Число пар, образующих инверсию в данной перестановке равно двум (смотрите предыдущий пример):

$$\varepsilon\,(1,3,2,5,4,6) = 2\,.$$

Ответ: четная.

Пример 4. Выполнить транспозицию (15) в перестановке (1, 3, 2, 5, 4, 6).

Решение. $(1,3,2,5,4,6) \xrightarrow{(15)} (5,3,2,1,4,6)$.

Ответ: (5, 3, 2, 1, 4, 6).

Пример 5. Привести перестановку (2, 4, 6, 1, 3, 5) к первоначальному виду с помощью транспозиций и определить её четность.

Решение. $(2,4,6,1,3,5) \xrightarrow{(12)} (1,4,6,2,3,5) \xrightarrow{(24)} (1,2,6,4,3,5) \xrightarrow{(36)}$

$\xrightarrow{(36)} (1,2,3,4,6,5) \xrightarrow{(56)} (1,2,3,4,5,6)$. Для приведения перестановки к первоначальному виду нам понадобилось 4 транспозиции. Следовательно, перестановка (2, 4, 6, 1, 3, 5) является четной.

Ответ: четная.

Пример 6. Найти знак члена определителя 5-го порядка:

а) $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}a_{53}$; б) $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}a_{55}$; в) $a_{31}a_{24}a_{53}a_{15}a_{42}$.

Решение. а) Первые индексы расположены по возрастанию, выписываем последовательность вторых индексов:

(2, 4, 3, 1, 3).

Эта последовательность не образует перестановку множества {1, 2, 3, 4, 5}, так как число 3 встречается в ней два раза.

б) Так как первые индексы образуют первоначальную перестановку, то выписываем последовательность вторых индексов:

(2, 4, 1, 3, 5).

Эта последовательность чисел образует перестановку множества {1, 2, 3, 4, 5}. Найдем её четность. Выпишем все пары чисел, которые образуют в этой перестановке инверсию:

(2, 1), (4, 1), (4, 3).

Количество пар образующих инверсию нечетное число, следовательно, перестановка вторых индексов является нечетной, а сам член определителя имеет знак «минус».

в) Выписываем последовательности первых и вторых индексов:

(3, 2, 5, 1, 4), (1, 4, 3, 5, 2).

Обе последовательности образуют перестановку множества {1, 2, 3, 4, 5}, поэтому данное произведение является членом определителя 5-го порядка. Вычислить знак этого члена можно двумя способами.

1-й способ. Находим четность каждой перестановки. Приведем каждую перестановку к первоначальному виду с помощью транспозиций:

$$(3,2,5,1,4) \xrightarrow{(13)} (1,2,5,3,4) \xrightarrow{(35)} (1,2,3,5,4) \xrightarrow{(45)} (1,2,3,4,5)\,,$$

$$(1,4,3,5,2) \xrightarrow{(24)} (1,2,3,5,4) \xrightarrow{(45)} (1,2,3,4,5)\,.$$

Перестановка первых индексов нечетная, вторых индексов – четная, т.е. $\varepsilon\,(3,2,5,1,4)$ – нечетное число, а $\varepsilon\,(1,4,3,5,2)$ – четное, и знак члена определителя $a_{31}a_{24}a_{53}a_{15}a_{42}$ равен:

$$(-1)^{\varepsilon\,(3,2,5,1,4)+\varepsilon\,(1,4,3,5,2)} = -1\,.$$

2-й способ. Переставим сомножители в данном члене определителя таким образом, чтобы первые индексы образовали первоначальную перестановку:

$$a_{15}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}\,.$$

Выписываем получившуюся перестановку вторых индексов:

(5, 4, 1, 2, 3),

и определяем её четность:

$$(5,4,1,2,3)\xrightarrow{(15)}(1,4,5,2,3)\xrightarrow{(24)}(1,2,5,4,3)\xrightarrow{(35)}(1,2,3,4,5).$$

Перестановка нечетная и знак члена определителя равен

$$(-1)^{\varepsilon(5,4,1,2,3)}=-1.$$

Ответ: а) произведение не является членом определителя; б) знак минус; в) знак минус.

Пример 7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Решение. Выпишем все ненулевые члены определителя. Если в член определителя сомножителем входит нулевой элемент определителя, то такой член определителя равен нулю. Поэтому из каждой строки мы можем выбрать лишь два элемента определителя. Из первой строки выбираем элемент a_{11}. Тогда из второй строки мы без вариантов должны выбрать элемент a_{22}, который стоит во втором столбце, так как элемент a_{21} стоит в первом столбце, из которого элемент уже выбран. Далее, из третьей строки мы можем выбрать либо элемент a_{33}, либо a_{34}. Если мы выбираем элемент a_{33}, то из 4-й строки мы должны без вариантов выбрать элемент a_{44}. Если же в третьей строке мы выбираем элемент a_{34}, то из 4-й строки мы должны без вариантов выбрать элемент a_{43}. Таким образом, мы получаем всего 4 члена определителя:

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},\quad a_{11}a_{22}a_{34}a_{43},\quad a_{12}a_{21}a_{33}a_{44},\quad a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}.$$

Легко находим, что первый и четвертый члены имеют знак

плюс, а второй и третий – знак минус. Получаем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} =$$

$$= a_{11}a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) - a_{12}a_{21}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ответ: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение перестановки элементов конечного множества.
2. Какие следующие последовательности чисел являются перестановками множества $\{1,2,3,4\}$: а) (1,2,3,2,4); б) (4, 3, 1, 2); в) (3, 2, 4)?
3. Выпишите все пары чисел, которые образуют инверсию в перестановке (4,1,3,2) и определите её четность.

Вариант 2

1. Определение четной (нечетной) перестановки.
2. Выпишите все пары чисел, которые образуют инверсию в перестановке (4,1,3,5,2) и определите её четность.
3. Выполните в перестановке (4,1,3,5,2) транспозицию (14) и определите четность получившейся перестановки.

Вариант 3

1. Определение инверсии в перестановке.
2. Определите четность перестановки (4,1,3,6,5,2).
3. Определите знак члена определителя $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$.

Вариант 4

1. Определение члена определителя.
2. Приведите перестановку (4,1,3,6,5,2) к первоначальному виду с помощью транспозиций и вычислите $(-1)^{\varepsilon(4,1,3,6,5,2)}$.
3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Тест

1. Выпишите все перестановки множества {1,2,3}.
2. Какие следующие последовательности чисел являются перестановками множества {1,2,3,4}: а) (1,2,3,1,4); б) (3,1,2); в) (4,1,2,3)?
3. Выпишите все пары чисел, образующие инверсии в перестановке (3,4,1,5,2,6) и определите её четность.
4. Приведите перестановку (3,4,1,5,6,2) к первоначальному виду с помощью транспозиций и определите её четность.
5. Какие из следующих произведений являются членами определителя 4-го порядка: а) $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$; б) $a_{32}a_{21}a_{14}a_{41}$; в) $a_{14}a_{32}a_{23}a_{41}$?
6. Выпишите все члены определителя 3-го порядка, которые входят в определитель со знаком минус.
7. Определите знак члена определителя $a_{14}a_{22}a_{33}a_{45}a_{51}$.
8. Определите знак члена определителя $a_{54}a_{32}a_{13}a_{66}a_{25}a_{41}$.
9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}$, используя только его определение.
10. Решите уравнение $\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & x & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10$.

Практическое занятие 30
Свойства определителей

Теорминимум: свойства определителя, вычисление определителей с использованием его свойств, метод Гаусса приведения определителя к треугольному виду.

Задачи для аудиторного решения

1. Вычислить определители 2-го порядка:

   а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$;

   д) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$; ё) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$;

   ж) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.
2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ по схеме треугольника.
3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{22} и a_{31} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$.
4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам 2-й строки и 3-го столбца.
5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ двумя различ-

ными способами (по схеме треугольника и разложив его по элементам какой-нибудь строки или столбца).

6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, приведя его к треугольному виду.
7. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; ё) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$.

Задачи повышенного уровня сложности

8. При каком значении параметра a число $\sqrt{\begin{vmatrix} a & -24 \\ 12 & -36 \end{vmatrix}}$ является корнем уравнения $x^2 - x - 132 = 0$.
9. Докажите, что для любой ненулевой пары рациональных чисел $(a; b) \neq (0; 0)$ существует хотя бы одна пара рациональных чисел $(x; y)$, такая, что $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 1$.

10. Как изменится определитель, если:
    а) его первый столбец поставить на последнее место, а остальные столбцы сдвинуть влево, сохраняя их расположение;
    б) его строки записать в обратном порядке?
11. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Домашнее задание

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -6 & 14 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x+y & 2y \\ x-y & x-y \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x^2+xy & y^2 \\ y-x & x-y \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, если $\varepsilon^3 = 1$.

Примеры

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$.

Решение. Из определения определителя следует формула вычисления определителя 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \doteq ad - bc.$$

Получаем

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = (-2)(-7) - 3 \cdot 5 = 14 - 15 = -1.$$

Ответ: –1.

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ с использованием схемы треугольников.

Решение. Следующая схема вычисления определителя называется схемой треугольника.

Из определения определителя следует формула вычисления определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \doteq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Изобразим элементы определителя точками и соединим отрезками прямых те точки, которые соответствуют члену определителя. Получим два отрезка прямых и 4 треугольника. Элементы члена определителя $a_{12}a_{23}a_{31}$ находятся в вершинах треугольника, сторона $a_{12}a_{23}$ которого параллельна главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$

Член определителя $a_{13}a_{21}a_{32}$ также образует треугольник с основанием, параллельным главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix}.$$

Эти два члена определителя вместе с членом определителя, который равен произведению элементов главной диагонали имеют знак плюс:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Оставшиеся 3 члена определителя имеют знак минус – это произведение элементов побочной диагонали

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix},$$

и два треугольника $a_{11}a_{23}a_{32}$ и $a_{12}a_{21}a_{33}$ со сторонами, параллельными побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Используя эту схему вычисления, получаем:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot 4\cdot(-3) + (-2)\cdot 1\cdot 7 -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot(-3) - 3\cdot 4\cdot 7 - (-1)\cdot 1\cdot 0 = 12 - 14 - 12 - 84 = -98.$$

Ответ: – 98.

Пример 3. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{21} и a_{33} определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. По определению минора и алгебраического дополнения имеем:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -12,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -14,$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = 11.$$

Ответ: $M_{12} = 12, M_{21} = 14, M_{33} = 11$,
$A_{12} = -12, A_{21} = -14, A_{33} = 11$.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ с помощью разложения определителя по элементам строки или столбца.

Решение. Разложим определитель по элементам 3-й строки:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} =$$

$$= (-3)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot M_{33} = (-3)\cdot 0 - 7\cdot 14 = -98.$$

Ответ: – 98.

Пример 5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

используя его разложение по элементам строк или столбцов.

Решение. Понятно, что при разложении определителя по элементам строки или столбца нужно выбирать строку или столбец с наибольшим количеством нулей.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} = (-2)M_{31} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot a_{12}A_{12} = -2 \cdot 5(-M_{12}) =$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 .$$

Комментарии к решению. Сначала мы разложили определитель по элементам первого столбца, затем получившийся определитель 3 – го порядка разложили по элементам 1 – й строки и в конце вычислили определитель 2 – го порядка.

Пример 6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ методом Гаусса, приводя его к треугольному виду.

Решение. Умножим первую строку на (– 2) и прибавим ко второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2+1\cdot(-2) & 3+0\cdot(-2) & 0+(-1)(-2) \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на 3 и прибавим к третьей:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3+1\cdot 3 & 4+0\cdot 3 & 2+(-1)\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Умножим третий столбец на 4 и прибавим ко второму:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Ответ: – 11.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение пропорциональных столбцов определителя.
2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -8 & 7 & 12 \end{vmatrix}$.

Вариант 2

1. Определение линейной комбинации столбцов определителя.
2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Вариант 3

1. Определение минора элемента определителя.
2. Решить уравнение $\det(A - xE) = 0$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 4

1. Определение алгебраического дополнения элемента определителя.
2. Пусть $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить $\det f(A)$.

Тест

1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 13 \end{vmatrix}$.
2. Решите уравнение $\begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$.
3. Найдите минор элемента определителя $\begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$, стоящего в третьей строке и первом столбце.
4. Найдите алгебраическое дополнение элемента определителя $\begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$, стоящего во второй строке и третьем столбце.
5. Многочлен от переменной x записан в виде определителя 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 4 & -3 & x \\ x^2 & x & -1 \\ -6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. Не вычисляя сам определитель, найдите свободный член этого многочлена.
6. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 5 & -4 & -1 \\ x^2 & x & -2 \\ -7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ и запишите получившийся многочлен по убыванию степеней переменной x.
7. Не вычисляя определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ x^2 & x & -1 \\ -6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ найдите коэффициент при старшей степени переменной x.
8. Не вычисляя определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 4 & -3 & x \\ x^2 & x & -1 \\ -6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ найдите коэффициент при старшей степени переменной x.
9. Приведите определитель $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ к треугольному виду и вычислите его:

10. Какой элемент определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ имеет наибольшее алгебраическое дополнение?
11. Какой элемент определителя $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ имеет наименьшее алгебраическое дополнение?

Практическое занятие 31
Обратная матрица

Теорминимум: обратная матрица, её единственность, обратимые матрицы, невырожденные матрицы, необходимые и достаточные условия существования обратной матрицы, присоединенная и союзная матрицы, свойство ортогональности определителя, формула обратной матрицы.

Задачи для аудиторного решения

1. Вычислить матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; ё) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Решить матричное уравнение $AX = E$, где E – единич-

ная матрица: а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $AX=B$, где
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Задачи повышенного уровня сложности

5. Докажите, что если матрица имеет обратную, то она единственная.
6. Докажите, что множество вещественных квадратных матриц 2-го порядка вида $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, образует поле, изоморфное полю комплексных чисел.
7. Докажите, что множество обратимых матриц n-го порядка над полем $\mathbb{F}$ образует группу относительно умножения. Эта группу обычно обозначают $GL_n(\mathbb{F})$ и называют полной линейной группой над полем $\mathbb{F}$. Будет ли эта группа коммутативной?
8. Выпишите все обратимые матрицы 2-го порядка над полем из двух элементов: $\mathbb{F}_2=\{0;1\}$, т.е. выпишите все элементы полной линейной группы $GL_2(\mathbb{F}_2)$.
9. Составьте таблицу умножения (таблицу Кэли) для полной линейной группы $GL_2(\mathbb{F}_2)$.

Домашнее задание

1. Для данной матрицы A вычислить обратную матрицу A^{-1}, и проверить равенство $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E – единичная матрица соответствующего порядка:

а) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение AX = B, где $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Примеры

Пример 1. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -5 & 7\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}$ найти её присоединенную и союзную.

Решение. Вычисляем миноры и алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы:

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 7\\ -3 & 0\end{vmatrix}=21,\ A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 7\\ 3 & 0\end{vmatrix}=21,$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}0 & -5\\ 3 & -3\end{vmatrix}=15,\ A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 7\end{vmatrix}=19,\ A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 7\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -5\end{vmatrix}=5.$$

Ответ: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 21 & 21 & 15 \\ -3 & -3 & 3 \\ 19 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $A^* = (\tilde{A})^t = \begin{pmatrix} 21 & -3 & 19 \\ 21 & -3 & 7 \\ 15 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Если матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ обратимая, то найдите обратную ей.

Решение. Используя предыдущий пример, вычисляем определитель матрицы A с помощью формулы разложения по элементам 1-го столбца:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} == -1\cdot 21 + 0\cdot(-3) + 3\cdot 19 = 36 .$$

Так как определитель не равен нулю, то матрица A невырожденная, т.е. обратимая. Союзная матрица была вычислена в предыдущем примере. Осталось применить формулу обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 21 & -3 & 19 \\ 21 & -3 & 7 \\ 15 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Замечание. Найдя обратную матрицу можно сделать проверку правильности вычислений. Должны выполняться равенства:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$$

или

$$A \cdot A^* = A^* A = (\det A)\cdot E .$$

Чаще всего бывает удобнее проверять последнее равенство, причем на практике достаточно проверить только равенство

$$A \cdot A^* = (\det A)\cdot E .$$

Проверка:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & -3 & 19 \\ 21 & -3 & 7 \\ 15 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$-21 + 42 + 15 = 36,\ (-1)(-3) + 2(-3) + 3 = 0,\ -19 + 14 + 5 = 0 ,$$
$$-5\cdot 21 + 7\cdot 15 = 0,\quad (-5)\cdot(-3) + 7\cdot 3 = 36,\quad -5\cdot 7 + 7\cdot 5 = 0$$
$$3\cdot 21 - 3\cdot 21 = 0,\quad 3\cdot(-3) - 3\cdot(-3) = 0,\quad 3\cdot 19 - 3\cdot 7 = 36 .$$

Таким образом,

$$A \cdot A^* = 36\cdot E ,$$

в чем и требовалось убедиться. Проверка выполнена.

Пример 3. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } AX = B ;\quad \text{б) } XA = B ,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим матрицу обратную к матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить решение матричных уравнений:

а) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 26 \\ 41 & -82 \end{pmatrix}$;

б) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 44 \\ 14 & -84 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} -13 & 26 \\ 41 & -82 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -7 & 44 \\ 14 & -84 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение обратной матрицы.
2. Вычислите матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 17 & 13 \\ 30 & 23 \end{pmatrix}$ и выполните проверку.

Вариант 2

1. Определение невырожденной матрицы.
2. Вычислите матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и выполните проверку.

Вариант 3

1. Определение союзной матрицы.
2. Вычислите матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и выполните проверку.

Вариант 4

1. Определение обратимой матрицы.
2. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и выполните проверку.

Тест

1. Вычислите матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Решите матричное уравнение $X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ присоединенную.
6. Найдите для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ союзную.
7. Вычислите матрицу обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. При каком значении переменной x для матрицы $A = \begin{pmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ верно равенство $A = A^{-1}$?
9. Решите матричное уравнение $AXA^{-1} = E$, где A – произвольная обратимая квадратная матрица.
10. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ найдите $(A \cdot A^t)^{-1}$.

Практическое занятие 32
Определенные системы линейных уравнений

Теорминимум: основные определения, матричная и векторная формы записи, классификация систем по виду и по множеству решений, методы решений определенных систем (с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера), геометрический смысл систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.

Задачи для аудиторного решения

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}.$$

Выписать матрицу системы, столбец свободных членов, расширенную матрицу системы, столбец неизвестных, и записать систему в векторной и матричной форме.

2. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\\2&-5\end{pmatrix}$. Запишите в скалярной, векторной и матричной форме однородную систему линейных уравнений с данной матрицей коэффициентов.
3. Решить систему линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера:
$$а)\ \begin{cases}3x+4y=1\\5x+7y=19\end{cases};\quad б)\ \begin{cases}4x-7y=13\\9x-16y=6\end{cases}.$$
4. Представьте столбец A в виде линейной комбинации столбцов B и C, если $A=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$.
5. Представьте столбец D в виде линейной комбинации столбцов A, B и C, если
$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}.$$
6. Решить систему линейных уравнений матричным методом или по формулам Крамера:
$$а)\ \begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases};\quad б)\ \begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31\\5x_1+x_2+2x_3=29\\3x_1-x_2+x_3=10\end{cases}.$$

Задачи повышенного уровня сложности

7. При каком значении параметра k система линейных уравнений $\begin{cases}kx_1+x_2-x_3=12\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1+4x_2+7x_3=10\end{cases}$ будет: а) определенной; б) неопределенной?
8. Каков геометрический смысл определенной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными?
9. Решите систему линейных уравнений над полем комплексных чисел: $\begin{cases}i\cdot x_1+2x_2+x_3=1\\x_1+x_2=-i\\x_2+x_3=-1\end{cases}$.
10. Решите систему линейных уравнений над конечным полем $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1+x_3=1\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$.

Домашнее задание

1. Решите одну систему линейных уравнений матричным методом, а другую по формулам Крамера:
$$а)\ \begin{cases}2x_1+x_2+x_3=3\\x_1+2x_2+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=9\end{cases};\quad б)\ \begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}.$$
2. Решить матричное уравнение AXB = C, где
$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\4&-5&2\\5&-7&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9&7&6\\1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&0&-2\\18&12&9\\23&15&11\end{pmatrix}.$$

Примеры

Пример 1. Для данной системы линейных уравнений выписать её матрицу, столбец свободных членов, столбец неизвестных и записать систему в векторной и матричной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

Решение. Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Столбец свободных членов и столбец неизвестных:

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица системы, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных системы,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \; AX = B$$

– матричная форма записи системы,

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + x_3 \cdot A_3 = B$$

– векторная форма записи системы.

Пример 2. По данной матрице записать в скалярной форме и векторной форме однородную систему линейных уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

– скалярная форма записи однородной системы,

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– векторная форма записи однородной системы.

Пример 3. Решить систему линеных уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_2 + 7x_3 = 9 \\ 3x_1 - 3x_2 = -12 \end{cases}.$$

Решение. Сначала мы должны убедиться, что система имеет единственное решение, т.е. является определенной. Выписываем определитель системы и вычисляем его:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 36 .$$

Здесь мы к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки умноженные на 3, затем вынесли из третьей строки за знак определителя общий множитель 3 и разложили получившийся определитель по элементам первого столбца.

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, то данная система линейных уравнений является определенной и её можно решать матричным методом и по формулам Крамера.

В матричной форме система имеет вид $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что решение системы равно $X = A^{-1}B$. Вычисляем матрицу обратную матрице системы:

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 21 & -3 & 19 \\ 21 & -3 & 7 \\ 15 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

и находим стобец решений

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 21 & -3 & 19 \\ 21 & -3 & 7 \\ 15 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} -45 \\ 99 \\ 117 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{5}{4}, \; x_2 = \frac{11}{4}, \; x_3 = \frac{13}{4}$.

Пример 4. Решить систему линеных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

Решение. Вычисляем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 11 & -6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 60 .$$

Здесь мы к первому столбцу прибавили третий умноженный на 2, а затем ко второму столбцу прибавили третий умноженный на –1, после чего разложили получившийся определитель по элементам первой строки.

Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180 , \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60 .$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1 .$$

Ответ: $x_1 = 3, \; x_2 = 1, \; x_3 = 1$.

Пример 5. Представить столбец $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ в виде линейной комбинации столбцов $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

Решение. Задача заключается в нахождении неизвестных x и y в равенстве

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}.$$

Это равенство представляет собой векторную форму записи системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}3x+5y=4\\4x+6y=5\end{cases}.$$

Решим эту систему матричным методом. В матричной форме система имеет вид $AX=B$, где матрица A и столбец свободных членов B системы равны:

$$A=\begin{pmatrix}3&5\\4&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}.$$

Столбец неизвестных $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ находим из матричного равенства:

$$X=A^{-1}B.$$

Вычисляем обратную матрицу и столбец неизвестных:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-5\\-4&3\end{pmatrix},$$

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6&-5\\-4&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Определение однородной системы линейных уравнений.
2. Дана система линейных уравнений: $\begin{cases}9x+10y=8\\10x+11y=9\end{cases}$.

   а) Запишите систему в матричной форме.
   б) Решите данную систему по формулам Крамера.

Вариант 2

1. Определение совместной системы линейных уравнений.
2. Дана система линейных уравнений: $\begin{cases}16x+17y=15\\17x+18y=16\end{cases}$.

   а) Запишите систему в векторной форме.
   б) Решите данную систему по формулам Крамера.

Вариант 3

1. Определение несовместной системы линейных уравнений.
2. Пусть $A=\begin{pmatrix}22&23\\23&24\end{pmatrix}$ – матрица системы линеных уравнений, столбец свободных членов $B=\begin{pmatrix}21\\22\end{pmatrix}$. Запишите систему в скалярной форме и решите её по формулам Крамера или матричным методом.

Вариант 4

1. Определение неопределенной системы линейных уравнений.
2. Представьте столбец $B=\begin{pmatrix}20\\21\end{pmatrix}$ в виде линеной комбинации столбцов $A_1=\begin{pmatrix}18\\19\end{pmatrix}$ и $A_2=\begin{pmatrix}19\\20\end{pmatrix}$, и найдите её коэффициенты.

Тест

1. Запишите в скалярной форме однородную систему линейных уравнений с матрицей коэффициентов $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&-2&4\end{pmatrix}$.
2. Запишите в векторной форме систему линейных уравнений, если её расширенная матрица равна $(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&-1&5\\7&-3&1&1\end{array}\right)$.

3. Совместна ли система $\begin{cases} x-7y=9 \\ 6x+3y=5 \end{cases}$? Ответ обоснуйте.
4. Используя геометрический смысл системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, докажите, что система $\begin{cases} x-2y=9 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$ является несовместной.
5. Решите систему $\begin{cases} 7x+4y=-3 \\ 9x+5y=2 \end{cases}$ матричным методом.
6. Решите систему $\begin{cases} 7x+4y=3 \\ 3x-3y=-1 \end{cases}$ по формулам Крамера.
7. Найдите коэффициенты x и y из равенства
$x\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix} 19 \\ 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.
8. Докажите, что система линейных уравнений $A^2X=B$, где $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ является определенной.
9. Решите систему $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ 2x_1+6x_2+4x_3=-6 \\ 3x_1+10x_2+8x_3=-8 \end{cases}$.
10. Решите систему $\begin{cases} x-iy=3-i \\ ix+2y=-1+i \end{cases}$ над полем комплексных чисел.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1985. 320 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2002. 240 с.
3. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2003. 416 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. 432 с.
5. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Минск.: Вышэйшая школа, 1968. 504 с.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. 416 с.
7. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Минск.: ТетраСистемс, 2001. 288 с.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1960. 256 с.
9. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие / под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987. 352 с.
10. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1988. 288 с.

Учебное издание

Головизин Вячеслав Владимирович

Практические занятия по курсу
«Алгебра и геометрия». Часть II

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В. Головизин
Верстка В.И. Родионов

Авторская редакция

Подписано в печать 15.03.11. Формат 60 × 84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 7,28.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4
Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru