Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО "Удмуртский государственный университет"
Математический факультет
Кафедра математического анализа

Н. И. КОРОБЕЙНИКОВА

МОДУЛЬ ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2011

УДК 512(075)
ББК 22.141я7
К 68

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ.

К 68 **Коробейникова Н.И.** Модуль числа. Уравнения и неравенства с модулем: учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2011. 33 с.

Учебно-методическое пособие адресовано студентам первого курса математического факультета. Также оно может быть использовано школьниками старших классов при подготовке к ЕГЭ.

УДК 512(075)
ББК 22.141я7

©Н.И. Коробейникова, 2011
©Издательство "Удмуртский университет", 2011

Содержание

Предисловие

Учебно-методическое пособие предназначено студентам первого курса. Оно содержит теоретический материал, примеры, упражнения и варианты контрольной работы по теме "Абсолютная величина числа". Понятие модуля вещественного числа является фундаментальным в математике. Умение решать уравнения и неравенства, содержащие переменную величину под знаком модуля, требуется для изучения таких дисциплин как аналитическая геометрия, математический анализ и т.д. Результатом освоения данной темы являются сформированные компетеции:

1. ОК-11 — фундаментальная подготовка в области фундаментальной математики и компьютерных наук, готовностью к использованию полученных знаний в профессиональной деятельности;
2. ОК-15 — способность к письменной и устной коммуникации на русском языке;
3. ПК-4 — умение строго доказать утверждение;
4. ПК-7 — умение грамотно пользоваться языком предметной области.

Материал, предназначенный для изучения, представлен шестью параграфами. Качественную подготовку можно гарантировать лишь в том случае, если студент последовательно проработает теоретический материал каждого параграфа и самостоятельно выполнит упражнения.

§1. Абсолютная величина числа

Определение 1.1. Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа a называется само число a, если оно не отрицательно ($a \geqslant 0$) и число $-a$, если a является числом отрицательным ($a < 0$).

Модуль числа a обозначают символом $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Пример 1.1. Найдем $|-6,1|$. Так как под модулем стоит отрицательное число $-6,1$, то $|-6,1| = -(-6,1) = 6,1$.

Пример 1.2. Согласно определению $|\pi - 2| = \pi - 2$ $(\pi > 2)$.

В примерах 1.1, 1.2 левая часть равенств содержит знак модуля, а в правой части его нет. Будем называть эту операцию раскрытием модуля.

Рассмотрим пример, где под знаком модуля стоит переменная величина.

Пример 1.3. Раскроем модуль $|10 - 5x|$. Если выражение, находящееся по знаком модуля, неотрицательно $10 - 5x \geqslant 0$ ($x \leqslant 2$), тогда модуль раскрываем со знаком плюс. Если $10 - 5x < 0$ ($x > 2$), то модуль раскрываем со знаком минус, то есть $|10 - 5x| = -(10 - 5x) = 5x - 10$. Будем записывать это следующим образом

$$|10 - 5x| = \begin{cases} 10 - 5x, & x \leqslant 2, \\ 5x - 10, & x > 2. \end{cases}$$

Упражнение 1. Используя определение, раскрыть модуль в следующих выражениях

1. $|1,27| = \cdots$
2. $|-17,045| = \cdots$
3. $|2\pi - 10| = \cdots$
4. $\left|\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\right| = \cdots$
5. $|2x - 4| = \cdots$

Модуль очень важен в математике. Без него нельзя обойтись, когда под корнем квадратным появляется полный квадрат некоторого выражения: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1.4. Упростить выражение $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, если $x \in [1,5; 2,5]$.

Решение. Так как $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x - 1|$ и $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 3|$, то при $x \in [1,5; 2,5]$ имеем

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 1 - x + 3 = 2.$$

Ответ. 2.

Рассмотрим геометрический смысл модуля. Модуль числа a - это расстояние (в единичных отрезках) от точки отсчета до точки с координатой (a).

Пусть a - положительное число. На рисунке 1.1 представлена иллюстрация геометрического смысла $|a|$ и $|-a|$.

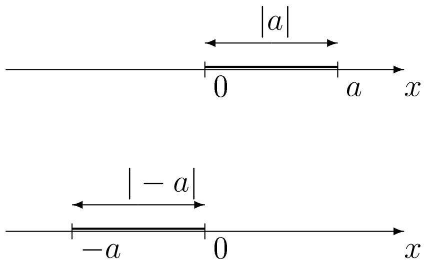

Рис. 1.1

С помощью модуля удобно записывать расстояние между точками на числовой прямой. Возьмем две точки с координатами (a) и (b). Пусть $a < b$, тогда расстояние между этими точками будет равно $|a - b|$.

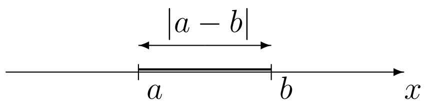

Рис. 1.2

П р и м е р 1.5. Определим длину отрезка AB, если точки A и B на оси имеют координаты (-4) и (3) соответственно. Длина отрезка AB равна модулю разности координат точек, таким образом $|-4-3| = |-7| = 7$.

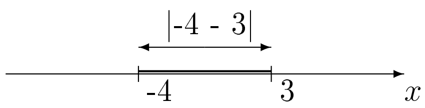

Рис. 1.3

У п р а ж н е н и е 2. На числовой прямой отмечены точки M и N (рис. 1.4). Найдите длину отрезка NM.

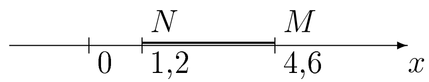

Рис. 1.4

У п р а ж н е н и е 3. Три точки A, B и C лежат на числовой прямой. Их координаты соответственно (40), (-67), (126). Среди отрезков AB, AC, BC, CA, BA и CB определите отрезки, имеющие одинаковую длину. Найти самую большую длину и самую маленькую.

У п р а ж н е н и е 4.

1. Вычислить $\left(\sqrt{28} + \sqrt{12}\right) \cdot \sqrt{10 - \sqrt{84}}$.
2. Вычислить $\sqrt{\sqrt{3} - 2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}$.
3. Вычислить $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}$.
4. Вычислить $\left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^3$.
5. Вычислить $\sqrt{|12\sqrt{3} - 21|} - \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$.
6. Упростить выражение $x|x - 1| + x^2$ при $-1 < x < -2$.
7. Упростить выражение $x + |1 - x| + 2|x - 2|$ при $1 < x < 2$.
8. Вычислить значение выражения
$\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{16 - 8x + x^2}$, если $x = 1,496$.
9. Вычислить $f(2,011)$, если $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

§2. Основные свойства модуля

Свойство 1. Для любого вещественного числа a справедливо неравенство $|a| \geqslant 0$.

Доказательство. Следует из определения.

Свойство 2. Для любого вещественного числа a справедливо равенство $|a| = |-a|$.

Доказательство. Возможны две ситуации:

1) если $a \geqslant 0$, то $-a \leqslant 0$, следовательно

$$|-a| = -(-a) = a = |a|;$$

2) если $a < 0$, тогда $-a > 0$, поэтому $|-a| = -a = |a|$.

Из 1) и 2) получаем, что $|a| = |-a|$.

Следствие 2.1. Для любых вещественных чисел a и b выполняется равенство $|a - b| = |b - a|$.

Геометрический смысл равенства $|a - b| = |b - a|$ заключается в том, что расстояние от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ равно расстоянию от точки $B(b)$ до точки $A(a)$ (рис. 2.1).

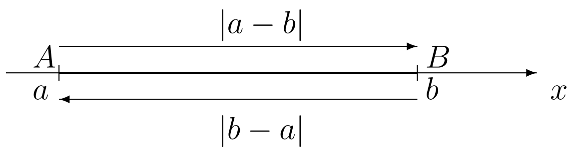

Рис. 2.1

Свойство 3. Для любого вещественного числа a справедливо двойное неравенство $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$ и $-a \leqslant 0$. Отсюда $|a| \geqslant -a$, то есть $-|a| \leqslant a = |a|$;

2) если $a < 0$, тогда $|a| = -a$, а так как $-|a| = a$, то $-|a| = a < |a|$.

Из 1) и 2) получаем, что $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

Свойство 4. Для любых вещественных чисел a и b выполняется равенство $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Доказательство. Произведение $a \cdot b$ может быть в зависимости от a и b как неотрицательным, так и неположительным (отрицательным). Запишем все варианты:

1) $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \geqslant 0$;

2) $a \geqslant 0$ и $b < 0 \Rightarrow a \cdot b \leqslant 0$;

3) $a < 0$ и $b \geqslant 0 \Rightarrow a \cdot b \leqslant 0$;

4) $a < 0$ и $b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

В первом случае $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Далее $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$. В третьем случае $|a \cdot b| = -(a \cdot b) = -a \cdot b = |a| \cdot |b|$. И последний вариант: $|a \cdot b| = a \cdot b = -a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

Свойство 5. Для любых вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) выполняется равенство $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Доказательство. Рассуждения аналогичны тем, что в доказательстве свойства 4.

Упражнение 5. Докажите, что для любого вещественного числа a выполняется равенство $|a|^2 = |a^2| = a^2$.

Свойство 6. Для любых вещественных чисел a и b выполняется неравенство $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первый способ. Сумма $a+b$ может быть в зависимости от a и b как неотрицательной, так и неположительной (отрицательной). Запишем все варианты:

1) если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0 \Rightarrow a+b \geqslant 0$, следовательно

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|;$$

2) если $a < 0$ и $b < 0 \Rightarrow a+b < 0$, тогда

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|;$$

3) если $a \geqslant 0$, $b < 0$ и $|a| \geqslant |b| \Rightarrow a+b \geqslant 0$, тогда

$$|a+b| = a+b = a-(-b) = |a| - |b| < |a| + |b|;$$

4) если $a \geqslant 0$, $b < 0$ и $|a| < |b| \Rightarrow a+b < 0$, тогда

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = -|a| + |b| < |a| + |b|;$$

5) если $a < 0$, $b \geqslant 0$ и $|a| \geqslant |b| \Rightarrow a+b \leqslant 0$, следовательно

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b = |a| - |b| < |a| + |b|;$$

6) если $a < 0$, $b \geqslant 0$ $|a| < |b| \Rightarrow a+b > 0$, тогда

$$|a+b| = a+b = -|a| + |b| < |a| + |b|.$$

Второй способ. Предположим противное -

$$|a+b| > |a| + |b|.$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, возведем неравенство в квадрат $|a+b|^2 > (|a|+|b|)^2$. Поскольку $|a|^2 = a^2$, тогда $a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2$. Пришли к противоречию $|a| \cdot |b| < ab$. Наше предположение неверно, значит справедливо обратное.

Свойство 7. Для любых вещественных чисел a и b выполняется неравенство $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых двух чисел a и b имеем $a = b + (a-b)$. По свойству 6 справедливо неравенство

$$|a| = |b + (a-b)| \leqslant |b| + |a-b|.$$

Откуда получаем $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

У п р а ж н е н и е 6. Докажите, что любых двух веществеых чисел a и b равенство $|a| + |b| = a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0. \end{cases}$

У п р а ж н е н и е 7. Докажите, что для любых двух вещественых чисел a и b равенство $|a+b| = |a| + |b|$ выполняется тогда и только тогда, когда $ab \geqslant 0$.

У п р а ж н е н и е 8. Докажите, что для любых двух вещественых чисел a и b равенство $|a-b| = |a| + |b|$ выполняется тогда и только тогда, когда $ab \leqslant 0$.

У п р а ж н е н и е 9. Докажите, что для любых двух вещественых чисел a и b неравенство $|a| - |b| \geqslant 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^2 - b^2 \geqslant 0$.

У п р а ж н е н и е 10. Докажите, что для любых двух вещественых чисел a и b равенство $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0, \\ \vdots \\ a_n = 0. \end{cases}$

§3. Основной прием решения уравнений

П р и м е р 3.6. Решить уравнение $|x| = 3$.

Р е ш е н и е. Модуль x - это расстояние от начала отсчета (0) до точки с координатой (x). Расстояние равно трем. Таких точек на числовой оси две. Их координаты (3) и (-3).

О т в е т. $x = \pm 3$.

П р и м е р 3.7. Решить уравнение $|x| = -6$.

Р е ш е н и е. В правой части уравнения стоит отрицательное число, что противоречит свойству 1 модуля. Поэтому уравнение решений не имеет.

О т в е т. Решений нет.

П р и м е р 3.8. Решить уравнение $|x - 4| = 0$.

Р е ш е н и е. Расстояние между точкой на числовой прямой с координатой (x) и точкой с координатой (4) равно нулю. Очевидно, что данная ситуация будет возможна, если эти точки совпадут.

О т в е т. $x = 4$.

П р и м е р 3.9. Решить уравнение $|x + 1| = 2$.

Р е ш е н и е. Расстояние между точкой на числовой прямой с координатой (x) и точкой с координатой (-1) равно 2 ед. Изобразим точку с координатой (-1) на числовой прямой.

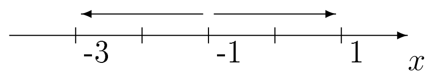

Рис. 3.1

Отсчитаем в право и в лево от этой точки по две масштабные единицы, тогда справа получим току с координатой (1), а слева с координатой (-3). Таким образом, уравнение имеет два решения.

О т в е т. $x = -3;\ x = 1$.

У п р а ж н е н и е 11. Используя геометрический смысл модуля, решить следующие уравнения.

1. $|2x| = 4$.
2. $|1 - x| = 5$.
3. $|3x - 5| = -9$.
4. $|2x + 8| = 0$.

П р и м е р 3.10. Решить уравнение $|3x + 1| = 5 - x$.

Р е ш е н и е. В данном случае решать используя геометрический смысл модуля не представляется возможным. Воспользуемся определением 1.1, раскроем модуль

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+1\geqslant 0,\\ 3x+1=5-x,\end{cases}\\ \begin{cases}3x+1<0,\\ -(3x+1)=5-x,\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -\frac{1}{3},\\ 4x=4,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{3},\\ -2x=6.\end{cases}\end{array}\right.$$

О т в е т. $x=-3;\ x=1$.

Приведем **АЛГОРИТМ** решения уравнений (неравенств) с модулем:

1) отмечаем нули подмодульных выражений на числовой прямой;

2) в каждом получившемся промежутке определяем знаки подмодульных выражений;

3) решаем уравнение(неравенство), на каждом промежутке и проверяем принадлежность решения данному множеству;

4) записываем ответ исходного уравнения (неравенства), как объединение решений по всем промежуткам.

П р и м е р 3.11. Решить уравнение $|x-2|+|4-x|=3$.

Р е ш е н и е. Определим знаки подмодульных выражений.

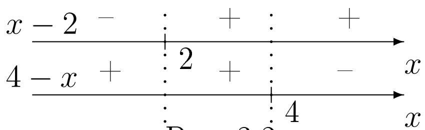

Рис. 3.2

Раскроем модули:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ -x+2+4-x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ x-2+4-x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x-2-4+x=3,\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ -2x=-3,\end{cases}\\ \begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ 2=3.\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ 2x=9.\end{cases}\end{array}\right.$$

О т в е т. $x=1,5;\ x=4,5$.

П р и м е р 3.12. Решить уравнение $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

Р е ш е н и е. Определим знаки подмодульных выражений.

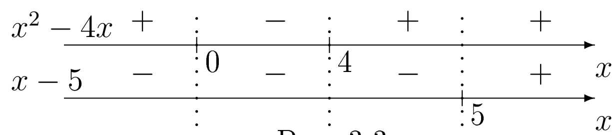

Рис. 3.3

Раскроем модули:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;\,0]\cup[4;\,5),\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x+5}=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(0;\,4),\\ \dfrac{-x^2+4x+3}{x^2-x+5}=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[5;\,+\infty),\\ \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-5}=1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;\,0]\cup[4;\,5),\\ x^2-x+5\neq 0,\\ x^2-4x+3=x^2-x+5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(0;\,4),\\ x^2-x+5\neq 0,\\ -x^2+4x+3=x^2-x+5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in[5;\,+\infty),\\ x^2+x-5\neq 0,\\ x^2-4x+3=x^2+x-5,\end{cases}\end{array}\right.$$

О т в е т. $x = -\frac{2}{3}$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$.

У п р а ж н е н и е 12.

1. Решить уравнение $x|x| + 8x - 7 = 0$.
2. Решить уравнение $|x^2 - 5x + 4| = 5x - 4$.
3. Решить уравнение $|x - 2|x - 6x + 8 = 0$.
4. Решить уравнение $x^2 - 2|x - 1| = 2$.
5. Решить уравнение $\frac{x^2 + 5x - 6}{|x - 2|} = 2$.
6. Решить уравнение $x^2 + 2x + 3\frac{|x - 1|}{x - 1} = 0$.
7. Решить уравнение $|x - 3| = -x^2 + 4x - 3$.
8. Решить уравнение $||x| - 2| = 2$.
9. Решить уравнение $x + |x + 1| + |x + 2| = 3$.
10. Решить уравнение $|2x + 4| - 3|5 - x| = x$.
11. Решить уравнение $|x^2 - 5x + 4| + |x^2 - 5x + 6| = 2$.
12. Решить уравнение $\frac{|x - 1|}{|x + 3| - 1} = 1$.
13. Решить уравнение $x|x| + 2|x - 2| = 3$.
14. Найдите значения x, при которых $y = 6$, если $y = |x+8|-|x|$.
15. Найдите нули функции $f(x) = |x + 2|x - 1|| - 4x + 1$.

16. Найти абсциссы точек, в которых график функции $y = |x^2 - 4x| - 5$ пересекает ось Ox.
17. Найдите произведение корней уравнения $\frac{|x^2 - 9|}{x - 3} \cdot x - 4x - 12 = 0$.
18. При каких значениях x значения функций $y = |3x - 9|$ и $y = \frac{4}{|x - 3|} - (x - 3)^2$ совпадают?
19. Найти произведение корней уравнения $|3x - 4| = \sqrt{(x + 2)^2}$.

§4. Решение уравнений с помощью свойств модуля

В данном параграфе приведены примеры уравнений, решение которых основано на свойствах модуля. Безусловно эти уравнения можно решать по определению, раскрывая модули. Можно решить задания двумя способами и сравнить решения.

Уравнение вида $|f(x)| = a$

Если $a < 0$, тогда уравнение решений иметь не будет. Если $a = 0$, тогда исходное уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$. Если $a > 0$, тогда исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

П р и м е р 4.13. Решить уравнение $|x^3 - 4x^2 + x - 2| = 2$.

Р е ш е н и е. $|x^3-4x^2+x-2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-4x^2+x-2=2, \\ x^3-4x^2+x-2=-2. \end{array}\right.$

Решим первое равнение: $x^3-4x^2+x-4=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x-4)=0$, отсюда получаем корень $x=4$. Преобразуем второе уравнение к виду $x(x^2-4x+1)=0$, имеем ещё три решения $x=0$, $x=2\pm\sqrt{3}$.

О т в е т. $x=0$; $x=4$; $x=2\pm\sqrt{3}$.

Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$

Данное уравнение равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x), \end{array}\right. \\ g(x)\geqslant 0. \end{array}\right.$

П р и м е р 4.14. Решить уравнение $|x^2-6x-3|=x-3$.

Р е ш е н и е. $|x^2-2x-3|=x-3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-6x-3=x-3, \\ x^2-6x-3=-x+3, \end{array}\right. \\ x-3\geqslant 0. \end{array}\right.$

О т в е т. $x=6$; $x=7$.

Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений
$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

П р и м е р 4.15. Решить уравнение $|x-7|=|5x+1|$.

Р е ш е н и е. $\left[\begin{array}{l} x-7=5x+1, \\ x-7=-5x-1. \end{array}\right.$

О т в е т. $x=-2$; $x=1$.

Уравнение вида $|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x)$

Данное уравнение равносильно системе неравенств $\left\{\begin{array}{l} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0. \end{array}\right.$

П р и м е р 4.16. Решить уравнение

$$|x^2+x-6|+|x^2-x-6|=2x^2-12.$$

Р е ш е н и е. В правой части уравнения стоит сумма подмодульных выражений, следовательно переходим к системе неравенств: $\left\{\begin{array}{l} x^2+x-6\geqslant 0, \\ x^2-x-6\geqslant 0. \end{array}\right.$ Решаем неравенства отдельно.

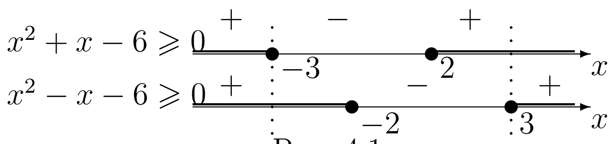

Рис. 4.1

Решением системы является пересечение решений этих неравенств.

О т в е т. $x\in(-\infty;\,-3]\cup[3;\,+\infty)$.

Уравнение вида $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$

Данное уравнение равносильно неравенству $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$.

П р и м е р 4.17. Решить уравнение $|3x-2|=|x-1|+|2x-1|$.

Р е ш е н и е. Так как $x-1+2x-1=3x-2$, то исходное уравнение можно заменить неравенством $(x-1)(2x-1)\geqslant 0$.

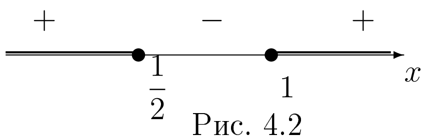

Рис. 4.2

О т в е т. $x \in (-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$.

Уравнение вида $|f(x) - g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$

Данное уравнение равносильно неравенству $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$.

П р и м е р 4.18. Решить уравнение $|3x-7| = |7x-5|+|4x+2|$.

Р е ш е н и е. Заметим, что в левой части под модулем стоит разность подмодульных выражений из правой части. Значит решение этого уравнения можно свести к решению неравенства $(7x-5)(4x+2) \leqslant 0$.

Рис. 4.3

О т в е т. $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right]$.

Уравнение вида $\alpha^2 \cdot |f(x)| + \beta^2 \cdot |g(x)| = 0$

Данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

П р и м е р 4.19. Решить уравнение

$$2|x^2 + 3x - 40| + 7|x^2 - 7x + 10| = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} x^2 + 3x - 40 = 0, \\ x^2 - 7x + 10 = 0. \end{cases}$ Первое уравнение имеет корни -8 и 5. Корни второго уравнения 2 и 5. Решение системы - $x = 5$.

О т в е т. $x = 5$.

У п р а ж н е н и е 13.

1. Решить уравнение $|x^2 - x - 5| = 1$.
2. Решить уравнение $|x^2 - x - 1| = 1$.
3. Решить уравнение $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$.
4. Решить уравнение $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$.
5. Решить уравнение $|x + 4| = |5x - 3|$.
6. Решить уравнение $|x^2 - 1| = |x^2 - 2x|$.
7. Решить уравнение $|4x + 7| + |2x - 3| = 6x + 4$.
8. Решить уравнение $|x^2 - 4x| + |16 - x^2| = 16 - 4x$.
9. Решить уравнение $|2 - x| = |10 - 2x| + |x - 8|$.
10. Решить уравнение $|2x^2 - 2x + 2| = |x^2 + x| + |x^2 - 3x + 2|$.
11. Решить уравнение $|18 - 3x| = |10 - 2x| + |x - 8|$.
12. Решить уравнение $|y + 3x - 13| + |x + 4y - 19| = 0$.
13. Решить уравнение $|2x + 3y - 5| + |3x - y - 2| = 0$.
14. Решить уравнение
$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 0$.

§5. Простейшие неравенства с модулем

Неравенства вида

$$|x| < a, \qquad |x| \leqslant a, \qquad |x| > a, \qquad |x| \geqslant a,$$

где $a > 0$, будем называть простейшими неравенствами с модулем.

Пусть $|x| < a$, геометрически это означает, что расстояние между точками $O(0)$ и $A(x)$ должно быть меньше a. На рисунке 5.1 видно, что точка A может находиться на интервале $(-a;\, a)$. То есть x удовлетворяет двойному неравенству $-a < x < a$.

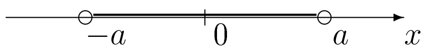

Рис. 5.1

В случае нестрогого неравенства $|x| \leqslant a$, точка $A(x)$ находится на отрезке $[-a;\, a]$.

Если $|x| > a$, тогда расстояние между $O(0)$ и $A(x)$ должно быть больше a. Это будет возможно при условии, что точка $A(x)$ лежит либо правее точки с координатой (a), либо левее точки с координатой $(-a)$ (см. рис. 5.2). Таким образом,

$$x \in (-\infty;\, -a) \cup (a;\, +\infty).$$

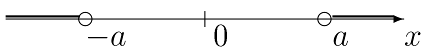

Рис. 5.2

Простейшие неравенства с модулем можно заменять на равносильные двойные неравенства или на совокупности неравенств:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \qquad |x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a, \qquad (5.1)$$

$$|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a, \end{array}\right. \qquad |x| \geqslant a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant a, \\ x \leqslant -a. \end{array}\right. \qquad (5.2)$$

П р и м е р 5.20. Используя геометрический смысл модуля, решить неравенство $|4x - 2| < 5$.

Р е ш е н и е. Будем считать, что нам дано следующее: расстояние между точками $A(4x)$ и $B(2)$ меньше 5. Отметим на числовой прямой точку $B(2)$. Вправо и влево от точки $B(2)$ отмерим 5 маштабных единиц. Получаем точки с координатами (7) и (-3) соответственно.

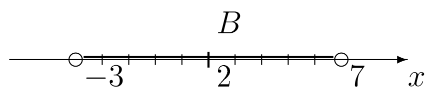

Рис. 5.3

Таким образом, точка $A(4x)$ принадлежит интервалу $(-3;\, 7)$. Тогда $x \in \left(-\dfrac{3}{4};\, \dfrac{7}{4}\right)$.

Отметим, что данную задачу можно было решать, используя формулу 5.1, тогда $-5 < 4x - 2 < 5$. Решив двойное неравенство, получим ответ.

О т в е т. $x \in \left(-\dfrac{3}{4};\, \dfrac{7}{4}\right)$.

У п р а ж н е н и е 14. Используя геометрический смысл модуля, решить следующие неравенства.

1. $|2x-3|<1$.
2. $|3-x|\leqslant 5$.
3. $|5x+7|<-3$.
4. $|x+2|>-4$.
5. $|3x-4|\geqslant 8$.
6. $|4x+5|>2$.
7. $|9x-2,7|\leqslant 0$.

§6. Основной прием решения неравенств с модулем

П р и м е р 6.21. Решить неравенство

$$|x|-2|x-2|+3|x+5|\geqslant 2x.$$

Р е ш е н и е. Определим знаки подмодульных выражений.

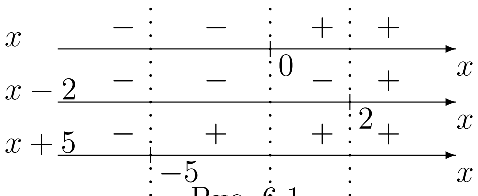

Рис. 6.1

Раскроем модули:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x<-5,\\ -x+2x-4-3x-15\geqslant 2x,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}-5\leqslant x<0,\\ -x+2x-4+3x+15\geqslant 2x,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}0\leqslant x<2,\\ x+2x-4+3x+15\geqslant 2x,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\geqslant 2,\\ x-2x+4+3x+15\geqslant 2x.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Решим каждую систему отдельно.

$$\left\{\begin{array}{l}x<-5,\\ x\leqslant -\dfrac{19}{4}\end{array}\right.$$

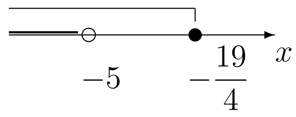

Рис. 6.2

$$\left\{\begin{array}{l}-5\leqslant x<0,\\ x\geqslant -\dfrac{11}{2}\end{array}\right.$$

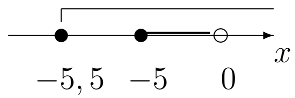

Рис. 6.3

$$\left\{\begin{array}{l}0\leqslant x<2,\\ x\geqslant -\dfrac{11}{4}\end{array}\right.$$

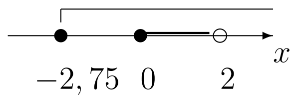

Рис. 6.4

Решением последней системы является промежуток $x\in[2;+\infty)$. Объединяем решение всех систем. Получаем, что x - любое число.

О т в е т. $x\in(-\infty;+\infty)$.

У п р а ж н е н и е 15.

1. Решить неравенство $4|x+2|<2x+10$.

2. Решить неравенство $5x - |2x+1| > 3$.

3. Решить неравенство $x^2 \leqslant |x-2|$.

4. Решить неравенство $3|x+1| \leqslant 3 - x$.

5. Решить неравенство $|x^2+4x+3| \geqslant x+3$.

6. Решить неравенство $\dfrac{x^2-2|x|}{x-3} > 0$.

7. Найдите длину промежутка, являющегося областью решения неравенства $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6} \geqslant 2$.

8. Решить неравенство $|1-3x| - |x+2| > 2$.

9. Решить неравенство $|3x+1| - |x+2| < 1$.

10. Решить неравенство $|x| + |x-1| \leqslant 1$.

11. Решить неравенство $|x+1| + |x-4| > 7$. В ответе укажите наименьшее целое положительное x, удовлетворяющее данному неравенству.

12. Решить неравенство $x|x+5| + 6 > 0$.

13. Решить неравенство $\dfrac{|x+3|+x}{x+2} > 1$.

14. Решить неравенство $x+4 \leqslant 2|x+1|^{-1}$. Найдите наибольшее отрицательное целое x, удовлетворяющее данному неравенству.

15. Решить неравенство $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1} < 2$.

Контрольная работа

Контрольная работа по теме

“Уравнения и неравенства с модулем”

Вариант 1

1. Вычислить $\sqrt{24-12\sqrt{2}} + \sqrt{57-28\sqrt{2}}$.

2. Используя геометрический смысл модуля, решить уравнение $|6x+4| = 7$ и неравенство $|1-2x| \geqslant 3$.

3. Решить уравнение $|x^2+2x+2| + |x^2+2x-3| = 5$.

4. Решить неравенство $|x-1| + x^2 \geqslant 1$.

5. Решить уравнение $|4x-5| + |2x+6| = |6x+1|$.

Контрольная работа по теме

“Уравнения и неравенства с модулем”

Вариант 2

1. Вычислить $\sqrt{43-24\sqrt{3}} + \sqrt{76-42\sqrt{3}}$.

2. Используя геометрический смысл модуля, решить уравнение $|4x-7| = 2$ и неравенство $|4-9x| \leqslant 11$.

3. Решить уравнение $|x^2-3x+7| + |x^2-3x+2| = 9$.

4. Решить неравенство $|5x-10| - x^2 \leqslant 10$.

5. Решить уравнение $|4x-5| + |2x+6| = |2x-11|$.

Контрольная работа по теме
“Уравнения и неравенства с модулем”
Вариант 3

1. Найти значение функции $y = 2x - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ в точке $x_0 = \sqrt{11}$.
2. Используя геометрический смысл модуля, решить уравнение $|4 - 5x| = 6$ и неравенство $|2x + 6| > 4$.
3. Решить уравнение $|x^2 + x + 2| + |x^2 + x - 2| = 4$.
4. Решить неравенство $|3x - 6| + x^2 \leqslant 2$.
5. Решить неравенство $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 + 3x - 18| \leqslant 0$.

Контрольная работа по теме
“Уравнения и неравенства с модулем”
Вариант 4

1. Найти значение функции $y = 3x + \sqrt{9x^2 - 30x + 25}$ в точке $x_0 = 1,2011$.
2. Используя геометрический смысл модуля, решить уравнение $|9 - 2x| = 5$ и неравенство $|4x + 7| < 33$.
3. Решить уравнение $|x^2 - 2x + 2| + |x^2 - 2x - 3| = 5$.
4. Решить неравенство $|2x - 4| - x^2 \geqslant 1$.
5. Решить неравенство $|x^2 - 9x + 20| + |x^2 - x - 12| \leqslant 0$.

Ответы

Упражнение 4.

1. 8. 2. $1 - \sqrt{\sqrt{3} - 1}$. 3. 2. 4. 27.
5. -6. 6. x. 7. 3. 8. 6.
9. 3.

Упражнение 11.

1. ± 2. 2. -4; 6.
3. Решений нет. 4. -4.

Упражнение 12.

1. $\sqrt{23} - 4$. 2. $5 \pm \sqrt{17}$. 3. $-2 \pm 2\sqrt{3}$; $4 + 2\sqrt{2}$.
4. 2; $-1 - \sqrt{5}$. 5. $\dfrac{-7 \pm \sqrt{89}}{2}$. 6. -3.
7. 2; 3. 8. ± 4; 0. 9. -6; 0.
10. 2,75; 9,5 11. $[1,\ 2] \cup [3,\ 4]$. 12. $-0,5$.
13. $-\sqrt{2} - 1$; 1. 14. -1. 15. 0,6.
16. -1; 5. 17. -12. 18. 2; 4.
19. 0,5; 3.

Упражнение 13.

1. $-2;\ 3;\ \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.
2. $\pm 1;\ 0;\ 2$.
3. $1;\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.
4. $-\sqrt{3};\ 1$.
5. $-\dfrac{1}{6};\ \dfrac{7}{4}$.
6. $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.
7. $[1,5;\ +\infty)$.
8. $[-4;\ 0]\cup\{4\}$.
9. $[5;\ 8]$.
10. $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$.
11. $(-\infty;\ 5]\cup[8;+\infty)$.
12. $x=3,\ y=4$.
13. $x=1,\ y=1$.
14. Решений нет.

Упражнение 14.

1. $(1;\ 2)$.
2. $[-2;\ 8]$.
3. Решений нет.
4. $(-\infty;\ +\infty)$.
5. $(-\infty;\ -4/3]\cup[4;\ +\infty)$.
6. $(-\infty;\ -7/4)\cup(-3/4;\ +\infty)$.
7. $0,3$.

Упражнение 15.

1. $(-3;\ 1)$.
2. $x>\dfrac{4}{3}$.
3. $[-2;\ 1]$.
4. $[-3;\ 0]$.
5. $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$.
6. $(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$.
7. $0,5$.
8. $(-\infty;\ -0,75)\cup(1,5;\ \infty)$.
9. $(-1;\ 1)$.
10. $[0;\ 1]$.
11. 6.
12. $(-6;\ -3)\cup(-2;\ +\infty)$.
13. $(-5;\ -2)\cup(-1;+\infty)$.
14. -2.
15. $(-\infty;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

Учебное издание

Наталья Ивановна Коробейникова

МОДУЛЬ ЧИСЛА.
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Учебно-методическое пособие

Напечатано в авторской редакции
с оригинал-макета заказчика
Компьютерный набор и верстка Н.И. Коробейникова
Подписано в печать 01.07.11. Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Усл.печ.л. 2,0. Уч.-изд.л. 1,88.
Тираж 70 экз. Заказ №

Издательство "Удмуртский университет"
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп.4.

Н. И. КОРОБЕЙНИКОВА

МОДУЛЬ ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Ижевск 2011