

**С.П.Блинов**

# **ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Учебно - методическое пособие

ИЖЕВСК 2011

Министерство образования РФ  
ГОУВПО "Удмуртский государственный университет"  
Математический факультет  
Кафедра математического анализа

**С.П.Блинов**

**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Учебно - методическое пособие

ИЖЕВСК 2011

УДК 517.53/4(075.8)

ББК 22.16

Б 23

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ*

**С.П.Блинов**

Б 23 **Операционное исчисление:** учеб.-метод. пособие.

Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет" 2011. 22 с.

Учебно-методическое пособие содержит методические указания по операционному исчислению для студентов математического факультета, необходимый теоретический материал для решения задач, примеры решения задач и варианты контрольных работ.

УДК 517.53/4(075.8)

ББК 22.16

© С.П.Блинов, 2011

© ГОУВПО "Удмуртский госуниверситет" , 2011

# 1. Интегралы, зависящие от параметра

**Определение 1.1** Функция  $w = f(z)$  называется регулярной (аналитической) в области  $G$ , если она дифференцируема (разлагается в ряд Тейлора) в некоторой окрестности каждой точки области  $G$ .

**Теорема 1.1.** Пусть  $D$  - область в комплексной плоскости,  $\gamma$  - кусочно-гладкая ограниченная кривая, функция  $f(\varsigma, z)$

- 1) непрерывна по  $(\varsigma, z)$  при  $\varsigma \in \gamma, z \in D$ ,
- 2) регулярна по  $z$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $\varsigma \in \gamma$ .

Тогда функция

$$F(z) = \int_{\gamma} f(\varsigma, z) d\varsigma \quad (1)$$

регулярна в области  $D$ .

В случае неограниченной кривой для справедливости теоремы необходимо добавить еще одно ограничение:

**Теорема 1.2.** Пусть  $D$  - область в комплексной плоскости,  $\gamma$  - кусочно-гладкая неограниченная кривая, функция  $f(\varsigma, z)$

- 1) непрерывна по  $(\varsigma, z)$  при  $\varsigma \in \gamma, z \in D$ ,
- 2) регулярна по  $z$  в области  $D$  при каждом фиксированном  $\varsigma \in \gamma$ ,
- 3) интеграл (1) сходится равномерно по  $z \in G$ , где  $G$  - любая замкнутая подобласть области  $D$ .

Тогда функция  $F(z)$  регулярна в области  $D$ .

Оказывается интеграл (1) можно дифференцировать под знаком интеграла:

**Теорема 1.3.** Пусть выполнены условия теорем 1 или 2. Тогда

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} f(\varsigma, z) d\varsigma \quad (2)$$

Наиболее употребительны следующие виды интеграла (1).

## 1. Интеграл типа Коши.

Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на ограниченной кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ . Из теоремы 1 следует, что функция

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

называемая интегралом типа Коши, регулярна в каждой области, не содержащей точек кривой  $\gamma$ .

## 2. Преобразование Лапласа.

Пусть функция  $f(t)$  определена на полуоси  $[0, \infty)$ . Преобразованием Лапласа этой функции называется функция

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Если  $f(t)$  на любом конечном интервале имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода и  $|f(t)| \leq C e^{\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ , то  $F(z)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ .

## 3. Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье функции  $f(t)$  определяется равенством

$$F(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-itz} f(t) dt.$$

Если

$$|f(t)| \leq C_1 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0; \quad |f(t)| \leq C_2 e^{\beta t}, \quad t \leq 0,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , то  $F(z)$  регулярна в полосе  $-\alpha < \operatorname{Im}(z) < \beta$ .

## 4. Преобразование Меллина.

Преобразование Меллина функции  $f(t)$  определяется равенством

$$F(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt, \quad (z^t = e^{z \ln(t)}).$$

Если  $f(t)$  непрерывна при  $t > 0$  и

$$|f(t)| \leq C_1 t^\alpha, \quad 0 < t \leq 1, \quad |f(t)| \leq C_2 t^\beta, \quad 1 \leq t < \infty,$$

где  $\alpha < \beta$ ,  $\beta > 0$ , то  $F(z)$  регулярна в полосе  $-\alpha < \operatorname{Re}(z) < -\beta$ .

## 2. Основные свойства преобразования Лапласа

Рассматриваются комплекснозначные функции, определенные на действительной оси.

**Определение 2.1** Функция  $f(t)$  называется *оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1. на любом конечном интервале функция  $f(t)$  непрерывна кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода,
2.  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ,
3. существуют такие числа  $C$  и  $\alpha$ , что при  $t \geq 0$  выполняется неравенство  $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ .

Ее преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

называется *изображением функции*  $f(t)$ .

Связь между оригиналом и изображением обозначается так:

$$f(t) \rightleftharpoons F(p) \text{ или } F(p) \rightleftharpoons f(t). \quad (3)$$

**Определение 2.2** Число

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}\}$$

называется *показателем роста* функции  $f(t)$ .

Из предыдущего параграфа следует, что функция  $F(p)$  является регулярной в полу-плоскости  $\operatorname{Re}(p) > \alpha_0$ . Легко доказать, что

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

**Пример 2.1.** Функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

является оригиналом ( $C = 1$ ,  $\alpha = 0$ ) и ее изображение  $F(p) = 1/p$ . Следовательно,

$$\theta(t) \rightleftharpoons \frac{1}{p}. \quad (4)$$

Для функции  $f(t)$ , удовлетворяющей условиям 1) и 3), функция  $\theta(t) \cdot f(t)$  является оригиналом. Обычно в этом произведении множитель  $\theta(t)$  опускают, считая функцию  $f(t)$  равной нулю при  $t < 0$ . Тогда равенство (4) можно переписать в виде

$$1 \rightleftharpoons \frac{1}{p}. \quad (5)$$

Преобразование Лапласа обладает следующими свойствами.

### 1. Линейность.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$  и  $g(t) \rightleftharpoons G(p)$ , то для любых комплексных чисел  $\lambda$  и  $\mu$

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \rightleftharpoons \lambda F(p) + \mu G(p). \quad (6)$$

### 2. Подобие.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , то для любого  $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (7)$$

### 3. Дифференцирование оригинала

Если  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$  - оригиналы и  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , то

$$f^{(n)}(t) \rightleftharpoons p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0), \quad (8)$$

где  $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

### 4. Дифференцирование изображения.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , то

$$F^{(n)} \rightleftharpoons (-1)^n f(t). \quad (9)$$

### 5. Интегрирование оригинала.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightleftharpoons \frac{F(p)}{p}. \quad (10)$$

### 6. Интегрирование изображения.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , и  $\frac{f(t)}{t}$  - оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \rightleftharpoons \int_p^\infty F(\tau) d\tau \quad (11)$$

## 7. Запаздывание оригинала.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , и  $f(t) = 0$  при  $t < \tau$ , то

$$f(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-p\tau} F(p). \quad (12)$$

## 8. Изображение периодической функции.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ , и  $f(t)$  периодическая функция с периодом  $T$ , то

$$F(p) = \frac{\int_0^T e^{-pt} f(t) dt}{1 - e^{-Tp}}. \quad (13)$$

## 9. Смещение изображения.

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$  и  $\lambda$  комплексное число, то

$$e^{\lambda t} f(t) \rightleftharpoons F(p - \lambda). \quad (14)$$

## 10. Изображение свертки.

**Определение 2.3** Сверткой функций называется функция, которая обозначается  $(f * g)$  и определяется равенством

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Если  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$  и  $g(t) \rightleftharpoons G(p)$ , то

$$(f * g)(t) \rightleftharpoons F(p)G(p). \quad (15)$$

### 3. Восстановление оригинала по изображению

#### 1. Формула обращения преобразования Лапласа – формула Меллина.

**Теорема 3.1.** Пусть функция  $f(t)$  – оригинал,  $F(p)$  – его изображение. Если функция  $f(t)$  непрерывна в точке  $t$  и имеет в этой точке конечные односторонние производные, то

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

Интеграл берется вдоль любой прямой  $\operatorname{Re}(p) = b > \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  – показатель роста функции и понимается в смысле главного значения.

#### 2. Условия существования оригинала.

**Теорема 3.2.** Пусть функция  $F(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > \alpha_0$  и удовлетворяет условиям:

1. Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(b + i\sigma)| d\sigma$  сходится при любом  $b > \alpha$ ;
2.  $M(R) = \max_{p \in \Gamma_R} |F(p)| \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , где  $\Gamma_R$  – дуга окружности  $|p| = R$ ,  $\operatorname{Re}(p) \geq b > \alpha$ .

Тогда  $F(p)$  – изображение функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (16)$$

где  $b > \alpha$ , интеграл понимается в смысле главного значения.

#### 3. Теоремы разложения.

**Теорема 3.3.** Пусть функция  $F(p)$  регулярна в точке  $p = \infty$ ,  $F(\infty) = 0$  и пусть ряд Лорана в окрестности точки  $p = \infty$  имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}. \quad (17)$$

Тогда оригиналом функции является функция

$$f(t) = \sum_0^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}. \quad (18)$$

Справедлива обратная теорема:

**Теорема 3.4.** Если  $f(t) = \theta(t)g(t)$  – оригинал, где  $g(t)$  целая функция экспоненциального типа, то ее изображение есть функция, регулярная в бесконечно удаленной точке.

**Теорема 3.5.** Пусть мероморфная функция  $F(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > \alpha$  и удовлетворяет условиям:

1. Существует последовательность окружностей

$$C_n : |p| = R_n, \quad R_1 < R_2 < \dots < R_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

такая, что  $\max_{p \in C_n} |F(p)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ ;

2. При любом  $a > \alpha$  интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)| d\sigma$  сходится. Тогда  $F(p)$  – изображение оригинала

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{Res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}], \quad (19)$$

где сумма берется по всем полюсам функции  $F(p)$ .

3. Если

$$F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)},$$

где  $A_n(p)$ ,  $B_m(p)$  – многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно, не имеющие общих нулей и  $n < m$ , то

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \{F(p)e^{pt}(p - p_k)^{m_k}\}|_{p=p_k}, \quad (20)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_l$  – различные нули многочлена  $B_m(p)$ ,  $m_k$  – кратность нуля  $p_k$ .

#### 4. Краткая таблица преобразований Лапласа.

№№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$

4.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$
5.	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7.	$e^{\lambda t} \cos(\omega t)$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
8.	$e^{\lambda t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
9.	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
10.	$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
11.	$\text{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
12.	$\text{ch}(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
13.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
14.	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{\sqrt{p^3}}$
15.	$\frac{2^n t^{n-1/2}}{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{p^{n+1/2}}$
16.	$t^\beta, \quad (\beta > -1)$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}} \quad (\text{Re}(p) > 0)$
17.	$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & t \in (0, h) \\ 0, & t \notin [0, h] \end{cases}$	$\frac{1 - e^{-ph}}{ph}$
18.	$t^{\beta-1} e^{at} \quad (\beta > 0)$	$\frac{\Gamma(\beta)}{(p-a)^\beta}$
19.	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
20.	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
21.	$\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$
22.	$\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2}$	$\frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$
23.	$\frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^3}$	$\frac{1}{p^2(p^2 + \omega^2)}$
24.	$\frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)}{2\omega^3}$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$

№№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
25.	$\frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
26.	$\frac{\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)}{2\omega}$	$\frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
27.	$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
28.	$\frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2 - a^2}$	$\frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$
29.	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{p}} \quad (a \geq 0)$
30.	$erfc \frac{a}{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \quad (a \geq 0)$

Здесь

$$\Gamma(\beta + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\beta dx \quad \text{- Гамма-функция}$$

и

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Более подробные таблицы см. в списке литературы.

## 5. Примеры

### Задача № 1. Найти изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 < t < \frac{\pi}{4}; \\ \cos(t), & \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Изображение ищем непосредственно по определению изображения

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\pi/4} e^{-pt} \sin(t) dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-pt} \cos(t) dt = \\ &= \frac{1}{p^2 + 1} \left( 1 - \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}p} + e^{-\frac{\pi}{2}p} \right) \end{aligned}$$

## Задача № 2. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$

$$F(p) = \frac{1}{p^4 - 16} + e^{-\frac{1}{p^2}} - 1.$$

Представим изображение в виде

$$F(p) = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{p^2 - 4} - \frac{1}{p^2 + 4} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! p^{2n}}.$$

Используя теоремы разложений и таблицу изображений, получим

$$f(t) = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} (\operatorname{sh}(2t) - \sin(2t)) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n-1}}{n!(2n-1)!} \right).$$

## Задача № 3. Решить задачу Коши

$$x'(t) + ax(t) = t^2 - \sin(2t), \quad x(0) = 1.$$

Пусть  $X(t)$  - изображение функции  $x(t)$ . Тогда, переходя к изображениям в данном уравнении, получим

$$pX(p) - 1 + aX(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{1}{p+a} \left( 1 + \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2+4} \right).$$

Разложим правую часть на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p+a} + \frac{2}{ap^3} - \frac{2}{a^2p^2} + \frac{2}{a^3p} - \frac{2}{a^3(p+a)} - \\ &- \frac{2}{a^2+4} \left( \frac{1}{p+a} + \frac{a}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+4} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь таблицей преобразования Лапласа, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-at} + \frac{1}{a}t^2 - \frac{2}{a^2}t + \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^3}e^{-at} - \\ &- \frac{2}{a^2+4} \left( e^{-at} + \frac{a}{2} \sin(2t) - \cos(2t) \right). \end{aligned}$$

### Задача № 4. Решить задачу Коши

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = e^{2t} (4t^2 + t + 3 - 12 \cos(3t)), \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$$

Переходим к изображениям:

$$(p^2 X(p) - 2p) - 2(pX(p) - 2) + 3X(p) = \\ \frac{6}{(p-2)^3} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{3}{p-2} - 12 \frac{p-2}{(p-2)^2 + 9}.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 3} \left[ 2(p-2) + \frac{6}{(p-2)^3} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{3}{p-2} - 12 \frac{p-2}{(p-2)^2 + 9} \right].$$

Разлагая на сумму простейших дробей, получим:

$$X(p) = \frac{2}{(p-2)^3} - \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p-2} + \frac{p-2}{(p-2)^2 + 9} - \frac{3}{(p-2)^2 + 9}.$$

Используя таблицы преобразований Лапласа, получим оригинал:

$$x(t) = e^{2t} (t^2 - t + 1 + \cos(3t) - \sin(3t)).$$

### Задача № 5. Решить задачу Коши

$$x'''(t) + x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = (2t - 6) \sin(2t) + 4(t + 1) \cos(2t) + 8,$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = 4.$$

Переходим к изображениям:

$$(p^3 X(p) - p^2 - 4) + (p^2 X(p) - p) + 6(pX(p) - 1) = \\ = -6 \frac{2}{p^2 + 4} + 4 \frac{4p}{(p^2 + 4)^2} + 4 \frac{p}{p^2 + 4} + 4 \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2} + \frac{8}{p}.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{p(p^2 + 4)^2(p^2 + p + 10) + p(p^2 + 4)(4p - 12) + 4p^3 + 16p^2 - 16p + 8(p^2 + 4)^2}{p((p^2 + 4)^2)(p^3 + p^2 + 6p + 8)}.$$

Разлагая на сумму простейших дробей, получим:

$$X(p) = 2 \frac{2p}{(p^2 + 4)^2} + \frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналам, получим

$$x(t) = t \sin(2t) + 1.$$

### Задача № 6. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'(t) + y(t) = 0, \quad y'(t) - x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

Переходим к изображениям:

$$pX(p) + Y(p) = 1, \quad pY(p) - X(p) = 1.$$

Решение системы имеет вид:

$$X(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 1}, \quad Y(p) = \frac{p + 1}{p^2 + 1}.$$

Найдем оригиналы:

$$x(t) = \cos(t) - \sin(t), \quad y(t) = \cos(t) + \sin(t).$$

### Задача № 7. Решить интегральное уравнение Вольтерра

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \sin(3\mathbf{t}) + \int_0^{\mathbf{t}} \operatorname{sh}(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \mathbf{y}(\mathbf{s}) \, d\mathbf{s},$$

Пусть  $f(t) = \sin(3t)$ ,  $K(t) = \operatorname{sh}(t)$ .

Тогда  $f(t) \rightleftharpoons F(p) = \frac{3}{p^2 + 9}$ ,  $K(t) \rightleftharpoons G(p) = \frac{1}{p^2 - 1}$ . Интеграл в уравнении является сверткой функций  $K(t)$  и  $y(t)$ . Изображение свертки равняется произведению изображений. Поэтому, переходя к изображениям в уравнении, получим:

$$Y(p) = F(p) + G(p) * Y(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - G(p)} = \frac{3(p^2 - 1)}{(p^2 + 9)(p^2 - 1)} = \frac{3}{11} \left( \frac{10}{3} \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{p^2 - 2} \right).$$

Переходим к оригиналам:

$$y(t) = \frac{10}{11} \sin(3t) + \frac{3}{11\sqrt{2}} \sin(t).$$

### Задача № 8. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -1 < x < 1$$

$$\mathbf{u}(0, x) = x - 1, \quad \mathbf{u}(t, 1) = 1, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(t, 0) = -a^2.$$

Переходим к изображениям:

$$pU(p, x) - (x - 1) = a^2 U(p, x), \quad U(p, 1) = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(p, 0) = -\frac{a^2}{p}.$$

Будем искать решение этой задачи в виде

$$U(p, x) = -\frac{a^2}{p}(x - 1) + V(p, x),$$

Тогда для  $V(p, x)$  получим задачу:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{a^2}{p}V = 0, \quad V(p, 1) = \frac{1}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(p, 0) = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид  $V(p, x) = Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$ . Для определения и используя граничные условия, получим систему

$$Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}} + Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}} = \frac{1}{p}, \quad \frac{\sqrt{p}}{a}(A - B) = 0.$$

Отсюда

$$A = B = \frac{1}{p} - \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}}}$$

Таким образом,

$$U(p, x) = -\frac{a^2}{p}(x - 1) + \frac{1}{p} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}}} (e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x})$$

Используя геометрический ряд

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

разложим функцию  $U(p, x)$  в ряд:

$$U(p, x) = -\frac{a^2}{p}(x - 1) + \frac{1}{p} \frac{1}{1 + e^{-2\frac{\sqrt{p}}{a}}} (e^{\frac{\sqrt{p}}{a}(x-1)} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+1)}) =$$

$$= -\frac{a^2}{p}(x - 1) + \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(-x+1+2n)} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+1+2n)}).$$

Переходим к оригиналам:

$$u(t, x) = -a^2(x - 1) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( erfc\left(\frac{-x + 2n + 1}{2a\sqrt{t}}\right) + erfc\left(\frac{x + 2n + 1}{2a\sqrt{t}}\right) \right),$$

где

$$erfc(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_s^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

**Задача № 9. Решить задачу о колебании струны ( $0 < x < L$ ) с закрепленными концами при заданном начальном отклонении и начальной скорости:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad 0 < x < L$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

Переходим к изображениям:

$$p^2 U(p, x) - pu_0(x) - u_1(x) = a^2 U_{xx}(p, x), \quad U(p, 0) = U(p, L) = 0.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$U_0(p, x) = C \operatorname{ch}\left(\frac{p}{a} x\right) + D \operatorname{sh}\left(\frac{p}{a} x\right).$$

Частное решение ищем в виде

$$V(p, x) = c \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + d \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

Подставляя эту функцию в уравнение, получим

$$c = \frac{p}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2}, \quad d = \frac{2}{p^2 + \left(\frac{2a\pi}{L}\right)^2}.$$

Таким образом, общее решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} U(p, x) &= U_0(p, x) + V(p, x) = \\ &= C \operatorname{ch}\left(\frac{p}{a} x\right) + D \operatorname{sh}\left(\frac{p}{a} x\right) + \frac{p}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \frac{2}{p^2 + \left(\frac{2a\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right). \end{aligned}$$

Из граничных условий следует  $C = D = 0$ . Таким образом,

$$U(p, x) = \frac{p}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \frac{2}{p^2 + \left(\frac{2a\pi}{L}\right)^2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

Переходим к оригиналам

$$u(t, x) = \cos\left(\frac{a\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \left(\frac{L}{a\pi}\right) \sin\left(\frac{2a\pi}{L} t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

## 6. Варианты контрольных работ

**Задача № 1. Найти изображение оригинала**

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f_1(t), & t < 1; \\ f_2(t), & 1 < t < 2; \\ f_3(t), & 2 < t < 3; \\ f_4(t), & t > 3; \end{cases}$$

№ вар.	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$	$f_4(t)$
1.	$t-1$	0	$t-2$	0
2.	0	$t-1$	$3-t$	0
3.	0	$-b$	$b$	$b$
4.	$t-1$	1	$t-2$	0
5.	$2b$	$-b$	$-b$	0
6.	$t$	$t-2$	$2-t$	0
7.	$-2b$	-1	$t-2$	$b$
8.	$t$	$1-t$	$t-2$	-1
9.	-1	1	1	-1
10.	$t$	-1	$3-t$	$t-2$

№ вар.	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$	$f_4(t)$
11.	$1-t$	$-2b$	$t-2$	$3-t$
12.	$-b$	-1	$-b$	3
13.	$-t$	$t-2$	$3-t$	$3-t$
14.	$-t$	$t-1$	-1	$2t-1$
15.	$t-1$	$-t$	$3-t$	$-t$
16.	$2-t$	0	$3-t$	$3-t$
17.	0	$3t-1$	$-t$	$4t$
18.	$1-t$	$t-6$	$4t$	$-t$
19.	$3-t$	-2	$-t$	$2-t$
20.	$t-2$	$3-t$	$t-2$	$t$

**Задача № 2. Найти оригинал  $f(t)$  по изображению  $F(p)$**

№ вар.	$F(p)$	№ вар.	$F(p)$
1.	$\frac{3p - 2}{(p - 1)(p^2 - 6p + 10)}$	2.	$\frac{2 - p}{(p - 1)(p^2 - 4p + 5)}$
3.	$\frac{2}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)}$	4.	$\frac{2 - p}{(p)(p^2 - 2p + 5)}$
5.	$\frac{2p + 3}{(p - 1)(p^2 - p + 1)}$	6.	$\frac{2 - 3p}{(p - 2)(p^2 - 4p + 5)}$
7.	$\frac{1 - p}{(p)(p^2 + 3p + 3)}$	8.	$\frac{5p}{(p + 2)(p^2 - 2p + 2)}$
9.	$\frac{1}{(p - 2)(p^2 + 2p + 3)}$	10.	$\frac{5}{(p - 1)(p^2 + 4p + 5)}$
11.	$\frac{e^{-p/2}}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)}$	12.	$\frac{p}{(p^1 + 1)(p^2 - 2)}$
13.	$\frac{1}{(p^3)(p^2 - 4)}$	14.	$\frac{1}{(p)(p^3 + 1)}$
15.	$\frac{3p + 2}{(p + 1)(p^2 + 4p + 5)}$	16.	$\frac{1}{(p)(p^2 + p + 1)}$
17.	$\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$	18.	$\frac{p + 5}{(p + 1)(p^2 - 2p + 5)}$
19.	$\frac{1}{(p^2)(p^2 + 1)}$	20.	$\frac{p + 3}{(p)(p^2 + 2p + 3)}$

**Задача № 3. Решить задачу Коши**

$$\mathbf{x}'(t) + n\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{n},$$

где  $n$  - номер варианта.

№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$	№	$f(t)$
1.	$1 + t \cos(2t)$	2.	$t - t \sin(2t)$	3.	$e^t + 2t^2$	4.	$t^6 - 2$
5.	$t^8 - \operatorname{ch}(t)$	6.	$t^8 + e^t \sin(t)$	7.	$t^4 + 2t \sin(3t)$	8.	$t^5 - te^t$
9.	$t^2 + \operatorname{sh}(t)$	10.	$1 - \operatorname{ch}(t)$	11.	$2t^2 - \operatorname{sh}(t)$	12.	$t^7 + t^2 e^{-2t}$
13.	$te^t + 1$	14.	$t^7 - \sin(3t)$	15.	$t^5 + \operatorname{ch}(t)$	16.	$t^3 - 2e^{-3t}$
17.	$t - \cos(2t)$	18.	$t^3 + te^{-2t}$	19.	$t^6 + \cos(-2t)$	20.	$t^4 - e^t \cos(t)$

**Задача № 4. Решить задачу Коши**

$$\mathbf{x}''(\mathbf{t}) + \mathbf{a}\mathbf{x}'(\mathbf{t}) + \mathbf{b}\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}'(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_1.$$

№ вар.	a	b	f(t)	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>
1.	-3	-4	1	0	-1
2.	0	-4	t	1	1
3.	2	-3	-t	-1	0
4.	-2	-3	t <sup>2</sup>	2	0
5.	-6	8	e <sup>t</sup>	-2	3
6.	2	-8	-e <sup>t</sup>	3	1
7.	-2	-8	sin(t)	-3	6
8.	-8	12	cos(t)	4	5
9.	4	-12	sin(2t)	-4	-2
10.	-4	-12	cos(2t)	3	0

№ вар.	a	b	f(t)	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>
11.	-2	1	0	-1	0
12.	0	-1	5t	0	1
13.	-3	2	-t <sup>2</sup>	2	3
14.	0	1	te <sup>t</sup>	-1	-2
15.	0	4	-te <sup>t</sup>	1	-3
16.	-11	30	-t <sup>2</sup> e <sup>-t</sup>	2	-4
17.	-1	-6	t sin(t)	-2	0
18.	1	-6	-t cos(2t)	3	0
19.	-5	4	sh(t)	0	1
20.	3	-4	ch(t)	-1	0

**Задача № 5. Решить задачу Коши**

$$\mathbf{x}'''(\mathbf{t}) + \mathbf{a}\mathbf{x}''(\mathbf{t}) + \mathbf{b}\mathbf{x}'(\mathbf{t}) + \mathbf{c}\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}),$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}'(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}''(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_2.$$

№ вар.	a	b	c	f(t)	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1.	-2	1	0	2t	0	-1	0
2.	-1	0	0	-3t	0	1	-1
3.	1	0	0	0	-1	-1	2
4.	2	1	0	sh(t)	0	1	2
5.	-3	3	-1	ch(t)	2	0	-1
6.	1	-1	1	-t <sup>2</sup>	0	0	2
7.	-1	-1	1	-t	-2	1	0
8.	0	-3	2	2	1	-1	2
9.	3	0	2	te <sup>-t</sup>	-1	0	2
10.	0	-3	2	te <sup>t</sup>	0	2	-1

№ вар.	a	b	c	f(t)	x <sub>0</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
11.	2	-4	4	e <sup>-t</sup>	-1	1	2
12.	-2	-4	4	e <sup>t</sup>	3	1	0
13.	-6	12	-4	sin(t)	0	-2	1
14.	6	12	-4	cos(t)	-1	-1	2
15.	-1	-5	3	-t <sup>2</sup>	1	0	-1
16.	-5	3	3	t <sup>2</sup>	1	-1	0
17.	-4	4	0	-t	0	2	1
18.	4	4	0	t	-2	0	1
19.	-5	7	-3	1	-1	1	2
20.	-7	15	-3	0	1	-1	0

**Задача № 6. Решить систему дифференциальных уравнений**

$$x'(t) + ay(t) = 0, \quad y'(t) + cx(t) = 0, \quad x(0) = b, \quad y(0) = d.$$

№ вар.	a	b	c	d
1.	-2	1	2	1
2.	-1	2	-1	2
3.	1	-1	-4	3
4.	2	1	-2	4
5.	-3	3	3	5
6.	1	-1	-1	6
7.	-1	-1	1	7
8.	-2	-3	2	8
9.	3	4	-3	9
10.	4	-3	-4	10

№ вар.	a	b	c	d
11.	-2	1	2	11
12.	-1	-1	4	12
13.	1	3	-9	13
14.	2	1	-8	14
15.	-3	3	3	15
16.	1	-1	-1	16
17.	-1	-1	1	17
18.	4	-3	-4	18
19.	3	4	-3	19
20.	9	-3	-1	20

**Задача № 7. Решить интегральное уравнение Вольтерра**

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \int_0^t e^{c(t-s)} \mathbf{y}(s) \, ds,$$

№ вар.	a	b	c
1.	-2	1	2
2.	-1	2	-1
3.	1	3	-4
4.	2	4	-2
5.	-3	5	3
6.	1	6	-1
7.	-1	7	1
8.	-2	8	2
9.	3	9	8
10.	4	10	-5

№ вар.	a	b	c
11.	2	11	2
12.	-1	12	1
13.	-2	13	2
14.	3	14	3
15.	-1	15	1
16.	1	7	16
17.	2	8	17
18.	-3	18	6
19.	-10	19	-2
20.	1	20	4

**Задача № 8. Найти решение уравнения теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -L < x < L$$

$$u(0, x) = bx + c, \quad u(t, L) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0.$$

№ вар.	L	b	c	u <sub>0</sub>
1.	1	1	0	0
2.	2	2	1	1
3.	3	-3	4	0
4.	4	4	3	4
5.	5	-5	4	9
6.	6	6	-4	16
7.	7	3	3	25
8.	8	-1	6	36
9.	9	-2	-10	49
10.	10	4	3	64

№ вар.	L	b	c	u <sub>0</sub>
11.	11	-4	-3	0
12.	12	2	2	4
13.	13	0	-2	-4
14.	14	-1	6	2
15.	15	-4	1	3
16.	16	6	0	6
17.	17	8	-5	-6
18.	18	-3	9	-20
19.	19	-4	-3	4
20.	20	9	2	-6

**Задача № 9. Решить задачу о колебании струны ( $0 < x < L$ ) с закрепленными концами при заданном начальном отклонении и начальной скорости:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad 0 < x < L$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad u(0, x) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x).$$

№ вар.	L	u <sub>0</sub>	u <sub>1</sub>
1.	1	$\sin(\pi x)$	0
2.	2	$2 \sin(\frac{\pi x}{2})$	0
3.	3	$-2 \sin(\frac{2\pi x}{3})$	0
4.	4	$-3 \sin(\frac{3\pi x}{4})$	0
5.	5	$3 \sin(\frac{2\pi x}{5})$	0
6.	6	$-4 \sin(\frac{5\pi x}{6})$	0
7.	7	$4 \sin(\frac{2\pi x}{7})$	0
8.	8	$5 \sin(\frac{3\pi x}{8})$	0
9.	9	$-5 \sin(\frac{\pi x}{9})$	0
10.	10	$6 \sin(\frac{3\pi x}{10})$	0

№ вар.	L	u <sub>0</sub>	u <sub>1</sub>
11.	11	0	$2 \sin(\frac{\pi x}{11})$
12.	12	0	$3 \sin(\frac{3\pi x}{12})$
13.	13	0	$4 \sin(\frac{4\pi x}{13})$
14.	14	0	$5 \sin(\frac{5\pi x}{14})$
15.	15	0	$6 \sin(\frac{7\pi x}{15})$
16.	16	0	$7 \sin(\frac{3\pi x}{16})$
17.	17	0	$8 \sin(\frac{2\pi x}{17})$
18.	18	0	$-2 \sin(\frac{5\pi x}{18})$
19.	19	0	$5 \sin(\frac{\pi x}{19})$
20.	20	0	$-3 \sin(\frac{\pi x}{20})$

## Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдэйи А., Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969.
2. Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965.
3. Диткин В.А., Прудников А.П., Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
4. Диткин В.А., Прудников А.П., Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1966.
5. Диткин В.А., Прудников А.П., Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1967.
6. Лыков А.В., Теория теплопроводности. М.: ГИТТЛ. 1952.
7. Свешников А.Е., Тихонов А.Н., Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1979.
8. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
9. Чудесенко В.Ф., Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. С.-Петербург · Москва · Краснодар: Лань, 2007.
10. Шостак Р.Я., Операционное исчисление (краткий курс). М.: 1972.

*Учебное издание*

**Блинов Семен Павлович**

**Операционное исчисление**

Учебно-методическое пособие

Напечатано в авторской редакции с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 12.05.11 Формат 60x84 1/16.

Печать офсетная. Усл. п. л. 1,22. Уч.-изд. л. 1,1.

Тираж 50 экз. Заказ №

Издательство "Удмуртский университет"

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.