Удмуртский государственный университет

На правах рукописи

Сивков Дмитрий Анатольевич

УДК 517.984

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВОЗМУЩЕНИЯМИ МИНИМАЛЬНОГО РАНГА

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2005

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики
Удмуртского государственного университета.

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, профессор Г. Г. Исламов
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор П. М. Симонов, доктор физико-математических наук, доцент С. Н. Попова
Ведущая организация	—	Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Защита состоится «   »   2006 г. в   часов на заседании специализированного совета К.212.275.04 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Удмуртском государственном университете (426034, Ижевск, ул. Университетская, (корпус) 4, аудитория 222).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «   »   2006 г.

Ученый секретарь специализированного совета,
кандидат физико-математических наук

Н. Н. Петров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Классической задачей управления динамическим объектом является задача о нахождении для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}$$

такого управления $u = Ux$, что спектр матрицы $A+BU$ совпадает с заданным множеством. Здесь управление $u = Ux$ называется обратной связью.

В 1987 г.[1] Г. Г. Исламовым была впервые поставлена и решена задача о минимальном ранге линейной обратной связи для случая управления спектром линейных операторов в конечномерных пространствах. В 1989 г.[2] получено обобщение на случай автономных систем с бесконечным числом степеней свободы, а в 1999 г.[3] Г. Г. Исламов распространил результаты о минимальном ранге на случай периодических систем с конечным числом степеней свободы.

Была поставлена задача переноса результатов на случай периодических по времени систем с бесконечным числом степеней свободы, так как разработанная техника исследования задачи о минимальном ранге обратной связи позволяет это сделать.

[1]Исламов Г. Г. Об управлении спектром динамической системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, №8. С. 1299–1302.

[2]Исламов Г. Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Изв. вузов. Математика. 1989. №1. С. 35–41.

[3]Исламов Г. Г. Об одном свойстве мультипликаторов линейных периодических систем // Изв. вузов. Математика. 1999. №2. С. 57–59.

Цель работы

Целью диссертационной работы является постановка задачи о назначении дискретного спектра для системы

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad A(t) = A(t+\omega), \quad t, \omega \in \mathbb{R},$$

где конечномерное управление $u(t)$ формируется в виде линейной обратной связи

$$u(t) = -B(t)F(t)^{-1}x(t),$$

$F(t) = X(t)\exp(-tK)$, $K = \frac{1}{\omega}\ln X(\omega)$, $X(t)$ — матрицант системы $\dot{x} = A(t)x$, и ω-периодическая оператор-функция $B(t)$ имеет наименьший возможный ранг, и решение этой задачи для случаев, когда $x(t)$ принадлежит бесконечномерному гильбертовому или банаховому пространству.

Общие методы исследования

В работе использовались методы теории периодических систем и теории показателей Ляпунова. При построении примеров производился численный расчет и визуализация результатов с использованием пакета Wolfram Research Mathematica 5.1.

Научная новизна

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и получены автором самостоятельно.

1. Для радиотехнических схем, состоящих из нескольких связанных электрических колебательных контуров, получен математический вид обратной связи минимального ранга, меняющей спектр собственных колебаний заданным образом, и рассчитаны конструктивные эле-

менты схемы, соответствующие полученному виду возмущений. Рассмотрены случаи простого и кратного спектра.

2. Приведен вид возмущения минимального ранга, переводящего собственные значения λ_{l_k} конечной кратности самосопряженного оператора из заданного множества Ω в заданное множество Θ. Для нормы возмущения дана неулучшаемая оценка снизу.

3. Для стационарного оператора Гамильтона с потенциалом вида

$$U(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

построены простые возмущения минимального ранга, изменяющие спектр оператора заданным образом.

4. Доказана теорема о минимальном ранге возмущения конечномерной периодической системы с ω-периодическим по времени t оператором $A(t)$, при каждом t действующем в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$.

5. Для неавтономной системы с ω-периодическим по времени оператором $A(t)$, действующем в сепарабельном гильбертовом пространстве и компактном при каждом t, приведен вид возмущения минимального ранга, переводящего дискретные собственные значения оператора монодромии данной системы из заданного множества Ω в заданное множество Θ. Рассмотрены случаи как простого, так и кратного спектра. Получены оценки снизу нормы возмущения.

6. Для уравнения в частных производных вида

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\right)u(t) + a(t)Du(t) = 0, \quad a(t+\omega) = a(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где D — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, имеющий компактную резольвенту $R(\lambda)$, найден вид возмущения, переводящего заданное подмножество Ω спектра оператора монодромии в заданное множество Θ.

7. Для задачи распространения тепла в тонком стержне с периодическим по времени коэффициентом температуропроводности найден вид возмущения, переводящего заданное подмножество Ω спектра оператора монодромии в заданное множество Θ.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит как теоретический, так и прикладной характер. Её результаты могут быть использованы при решении задач управления периодическими динамическими системами, динамическими системами, описываемыми уравнениями математической физики.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- Научном семинаре кафедры вычислительной математики УдГУ (Ижевск, 2000-2005);
- Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (2004, 2005);
- Научном семинаре кафедры численного и функционального анализа ННГУ (Нижний Новгород, 2005);
- Воронежской зимней математической школе. Современные методы теории функций и смежные проблемы (Воронеж, 2001, 2005);
- Воронежской весенней математической школе. Современные методы теории краевых задач (Воронеж, 2004, 2005);
- Пятой Российской университетско-академической научно-практической конференции (Ижевск, 2001);

Публикации

По результатам выполненных исследований опубликовано 9 работ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации — 108 страниц, список литературы содержит 39 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* отмечено место данной диссертационной работы в современных исследованиях, кратко изложены результаты, полученные диссертантом и другими исследователями в этой области.

Глава 1 носит обзорный характер.

В *первом параграфе главы 1* подробно рассмотрены результаты Е. Л. Тонкова и С. Н. Поповой, относящиеся к вопросам управляемости линейных систем.

Параграф 2 главы 1 посвящен управлению энергетическим спектром квантовомеханической системы (оператор Гамильтона) с помощью возмущения потенциала. Построен численный пример возмущения потенциала, меняющего дискретный спектр заданным образом.

В главе 2 для автономной системы рассмотрена задача о минимальном ранге линейной обратной связи

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax - Kx,\\ \operatorname{rank} K \to \min,\\ \sigma(A-K) \cap \Omega = \emptyset,\\ \Theta \subset \sigma(A-K),\end{gathered} \tag{1}$$

где Ω, Θ — заданные множества, $\sigma(A-K)$ — спектр $A-K$. Таким образом, добавлением линейной обратной связи осуществляется перевод точек дискретного спектра из множества Ω в множество Θ.

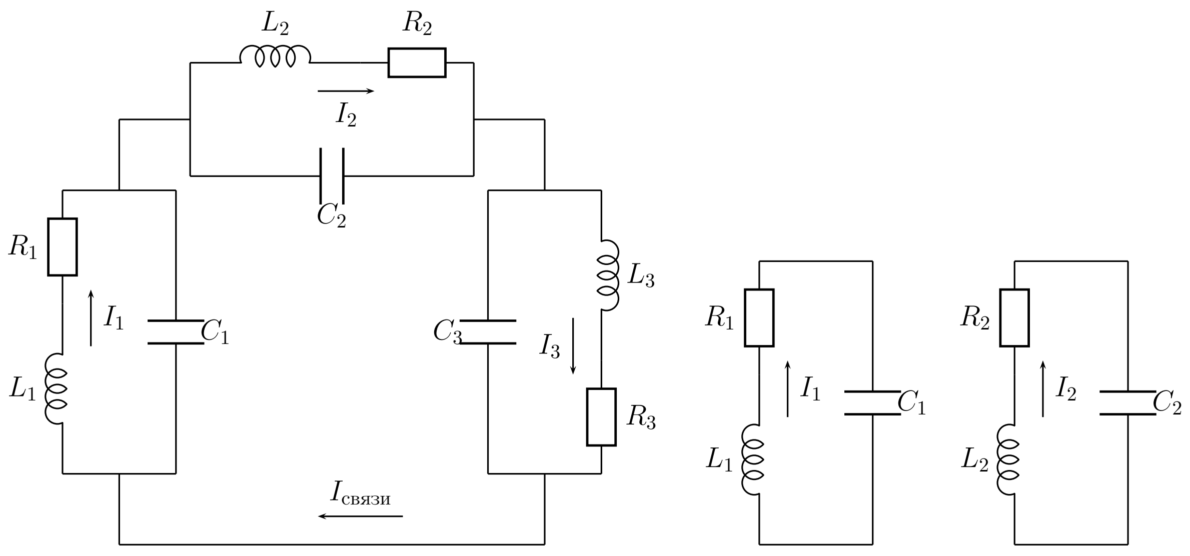
В *первом параграфе главы 2* для случая, когда $x(t)$ — элемент множества n-мерных векторов $\mathcal{F}^n$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, A — элемент множества $n \times n$ матриц $\mathcal{F}^{n\times n}$, а $\mathcal{F}$ — некоторое числовое поле, доказана следующая теорема, устанавливающая минимальное значение ранга возмущения K.

Теорема 1. *Минимальный ранг допустимого возмущения равен максимальной геометрической кратности чисел $\lambda \in \Omega$*

$$\max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(\lambda E - A) = \min \operatorname{rank} K, \tag{2}$$

где минимум берется по всем допустимым возмущениям K.

Во *втором параграфе главы 2* для радиотехнических схем, состоящих из нескольких связанных электрических колебательных контуров, получен математический вид обратной связи минимального ранга, меняющей спектр собственных колебаний заданным образом.



а. Простой спектр б. Кратный спектр

Значения параметров системы были выбраны близкими к критическим, значениям, за которыми в системе становятся невозможными собственные колебания.

Были рассчитаны конструктивные элементы схемы, соответствующие математическому виду возмущения, повышающего добротность колебательной системы.

В *третьем параграфе главы 2* рассмотрено обобщение теоремы 1 на случай целенаправленного перевода точек спектра из множества Ω в заданное множество Θ для замкнутого оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Доказана следующая теорема, дающая оценку изменения спектра оператора $A-K$ при его приближенном построении.

Теорема 2. *Для любого ограниченного $\tilde{K}$ справедливо $\sigma(A-K+\tilde{K}) \subset U_\delta(\sigma(A-K))$, где δ такое, что*

$$\|\tilde{K}\| < \min_{\xi \in \partial U_\delta(\sigma(V))} \|R(\xi; V)\|^{-1}.$$

$\partial U_\delta(\sigma(V))$ — граница δ-окрестности множества $\sigma(A-K)$.

В *параграфе 4 главы 2* для самосопряженного оператора A, не зависящего от времени t, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, построен вид возмущения минимального ранга, переводящего простой спектр из заданного множества Ω в заданное множество Θ.

Пусть возмущаемый самосопряженный оператор A действует в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ по закону

$$Au = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k, \quad u \in \mathfrak{H}, \tag{3}$$

где $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ — ортонормированная система элементов из $\mathfrak{H}$ и $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ — однократные собственные значения, образующие точечный спектр $\sigma_p(A)$ оператора A, n — ранг оператора A, $n \leqslant \infty$.

Рассмотрим одноранговое возмущение $K : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ в виде

$$Ku = \langle u, b \rangle a, \quad u \in \mathfrak{H}, \tag{4}$$

где

$$a = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \psi_j, \quad b = \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta}_j \psi_j, \tag{5}$$

$\{\nu_j\}_{j\geqslant 1}$, $\{\beta_j\}_{j\geqslant 1}$ — квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел. Возмущения (4) должны переводить собственные значения оператора A из Ω в некоторое заданное множество Θ так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_p(A - K) = \Theta \cup (\sigma_p(A) \setminus \Omega). \tag{6}$$

Для возмущений вида (4) справедлива теорема, дополняющая работу[4].

Теорема 3. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество* $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ *изолированных собственных значений оператора (3) в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью одноранговогo возмущения вида (4) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_m\}$;

б) $\nu_{k_i} \beta_{k_i} = \dfrac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}$, $i = \overline{1, m}$, *где* $P(\lambda)$ *— многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество множества* $\Theta \cup (\sigma_p(A) \setminus \Omega)$, *причем множество* $\Theta \setminus \sigma_p(A)$ *целиком лежит в множестве корней* $P(\lambda)$.

Дана оценка погрешности перевода собственных значений из Ω в заданное множество Θ.

Для

$$\gamma_j \doteq \nu_{k_j} \beta_{k_j} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda_{k_j} - \kappa_i)}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} (\lambda_{k_j} - \lambda_{k_i})} \doteq f_j(\lambda, \kappa)$$

[4]Исламов Г. Г. Свойства одноранговых возмущений // Изв. вузов. Математика. 1989. №4. С. 29–35.

справедливо
$$d\gamma = \frac{Df}{D\kappa} d\kappa,$$
где λ — вектор $(\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m})^T$, κ — вектор $(\kappa_1, \ldots, \kappa_m)^T$, $f(\lambda, \kappa) = (f_1(\lambda, \kappa), \ldots, f_m(\lambda, \kappa))^T$, $\frac{Df}{D\kappa}$ — матрица Якоби преобразования f по переменным κ.

Для якобиана получено его выражение через значения λ и κ:

$$\left|\frac{Df}{D\kappa}\right| = -\frac{\prod\limits_{i=1}^{m-1}\prod\limits_{j=i+1}^{m}(\kappa_i - \kappa_j)}{\prod\limits_{i=2}^{m}\prod\limits_{j=1}^{i-1}(\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}.$$

В *параграфе 5 главы 2* приведен вид возмущения минимального ранга, переводящего собственные значения λ_{l_k} конечной кратности из заданного множества Ω в заданное множество Θ для следующей задачи.

Пусть A — самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий ортонормированную систему собственных функций $\{\varphi_{i,j}\}$, λ_i — собственные значения оператора A геометрической кратности m_i, причем $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \ldots$. В данном случае для оператора A имеет место спектральное разложение

$$A = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_i \langle \cdot, \varphi_{i,j}\rangle \varphi_{i,j}. \tag{7}$$

Пусть задано некоторое $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$ — непустое подмножество спектра $\sigma(A)$. Необходимо, возмущая оператор A конечномерным возмущением минимального ранга K, перевести все собственные значения λ_{l_k} оператора A из множества Ω в произвольное множество $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$, являющееся подмножеством спектра $\sigma(A - K)$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Для возмущения K вида

$$K = \sum_{s=1}^{m} \langle \cdot, b_s \rangle a_s, \quad a_s \in \mathfrak{H}, \quad b_s \in \mathfrak{H},$$

где

$$a_s = \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s}, m_i)} \nu_{ij} \varphi_{i,j},$$

$$b_s = \sum_{i=1+l_{s-1}}^{\infty} \sum_{j=1+m_{l_{s-1}}}^{\min(m_{l_s}, m_i)} \overline{\beta}_{ij} \varphi_{i,j},$$

$\{\nu_{i'j'}\}, \{\beta_{i'j'}\}, i' = \overline{1, \infty}, j' = \overline{1, m_{i'}}$ — квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, причем будем полагать $l_0 = 0$, $m_0 = 0$, сформулирована и доказана следующая теорема, дополняющая работу 4).

Теорема 4. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество* $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$ *изолированных собственных значений оператора (7) в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$, $\Omega \cap \Theta = \emptyset$ *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *с помощью возмущения вида (), необходимо и достаточно существования двух квадратично суммируемых последовательностей* $\{\nu_{ij}\}, \{\beta_{ij}\}, i = \overline{1, \infty}, j = \overline{1, m_i}$ *таких, что выполнены следующие условия:*

а) $\nu_{ij}\beta_{ij} = 0$ *для всех индексов* i, *не принадлежащих множеству индексов удаляемых собственных чисел* $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$;

б) $\nu_{l_i j}\beta_{l_i j} = \dfrac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{k=1, k\neq i}^{m} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k})}$, *где* $P(\mu) = \prod\limits_{k=1}^{m} (\mu - \theta_k)$ — *многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

Для нормы возмущения дана неулучшаемая оценка снизу

$$\|K\| \geqslant \sum_{i=1}^{m} |P(\lambda_{l_i})| / \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} |\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}|.$$

В *параграфе 6 главы 2* для стационарного оператора Гамильтона с потенциалом вида

$$U(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

построены простые возмущения минимального ранга, изменяющие спектр оператора заданным образом.

Глава 3 посвящена управлению спектром оператора монодромии периодических систем. Она содержит бóльшую часть основных результатов диссертационной работы.

Параграф 1 главы 3 посвящен построению вида возмущения, переводящего собственные значения из заданного множества Ω в заданное множество Θ для произвольной приводимой неавтономной системы в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Этот параграф содержит обоснование подхода, развитого в главе 3.

Пусть задана управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \tag{8}$$

где управление $u(t)$ для каждого t принадлежит $\mathfrak{B}$ и строится по принципу обратной связи

$$u(t) = -K(t)x(t). \tag{9}$$

Пусть система (8) асимптотически эквивалентна системе

$$\dot{y} = By + v(t), \quad v(t) \in \mathfrak{B} \tag{10}$$

с преобразованием Ляпунова

$$y = L(t)x, \quad y \in \mathfrak{B},\ L(t) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \tag{11}$$

и оператор B имеет компактную резольвенту.

Для этого случая сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Для системы (8) такой, что существуют B и $L(t)$, для которых выполнено*

$$A(t) = L^{-1}(t)BL(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t),$$

и произвольного Ω такого, что пересечение множества характеристических показателей $\chi(A(t))$ решений однородной системы $\dot{x} = A(t)x$ с Ω пусто или состоит лишь из конечного числа точек, с управлением

$$u(t) = -L^{-1}(t)SL(t)x,$$

где S — возмущение, переводящее точки спектра $\sigma_p(B)\cap\Omega$ в произвольное заданное множество Θ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$, пересечение $\Omega \cap \chi(A - K)$ пусто.

В том случае, когда оператор $A(t)$ — ω-периодический по времени t, преобразование Ляпунова $L(t)$ известно и может быть получено из представления Флоке.

В *параграфе 3 главы 3* поставлена и разрешена задача о минимальном ранге обратной связи для периодической системы с компактной при каждом $t \in \mathbb{R}$ оператор-функцией $A(t)$.

В банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ рассмотрена управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где при каждом t линейный оператор $A(t)$, действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$, компактен, а $x(t)$ и $u(t)$ являются элементами $\mathfrak{B}$. Кроме того, пусть $A(t)$ — ω-периодический по времени t, сильно измеримый и интегрируемый по Бохнеру на отрезке $[0, \omega]$ оператор.

Для оператора Коши $X(t)$ соответствующей невозмущенной однородной системы следует существование представления Флоке

$$X(t) = F(t) \exp(tQ) \tag{13}$$

в виде произведения периодической дифференцируемой оператор-функции $F(t)$, имеющей ограниченный обратный оператор $F^{-1}(t)$, на операторную экспоненту $\exp(tQ)$ с постоянным оператором Q.

Рассмотрено возмущение $u(t)$ следующего вида

$$u(t) = -K(t)x(t) = -B(t)F^{-1}(t)x(t).$$

Наложено требование, чтобы возмущение, привносимое в систему, имело минимально возможный ранг, понимаемый в следующем смысле.

Определение 1. *Если оператор B из множества $[\mathfrak{B}]$, то его рангом назовем число* $\operatorname{rank} B = \dim\{Bz | z \in \mathfrak{B}\}$.

Данная задача носит экстремальный характер и может быть записана в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{rank} B \to \min, \\ \sigma(X(\omega)) \cap \Omega = \emptyset. \end{gathered} \tag{14}$$

Сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть Ω — произвольное подмножество $\mathbb{C}$ такое, что его замыкание $\overline{\Omega}$ не содержит единицу. Тогда*

$$\max_{\rho \in \Omega} \dim \ker(X(\omega) - \rho I) = \min \operatorname{rank} B,$$

где минимум берется по всем ω-периодическим операторам $B(t)$, для ко-

торых спектр оператора монодромии возмущенной системы (12) не пересекается с множеством Ω.

В следующей теореме дана оценка погрешности приближенного построения возмущения.

Теорема 7. *Пусть* Ω *— замкнутое подмножество комплексной плоскости и* Q *— ограниченный оператор, определенный на всем пространстве* $\mathfrak{B}$, *либо* Ω *— компактное подмножество и* Q *— замкнутый оператор. Тогда всякий конечномерный оператор* $\tilde{K}(t) = F(t)\tilde{S}F^{-1}(t)$ *такой, что* $\operatorname{rank}\tilde{S} = \operatorname{rank} S$, $\|S - \tilde{S}\| < \min_{\lambda\in\Omega} \|R(\lambda; Q - S)\|^{-1}$, *также будет решением задачи (14).*

Параграф 4 главы 3 посвящен построению вида возмущения, изменяющего спектр оператора монодромии заданным образом.

Для сепарабельного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ рассмотрена управляемая система (12). В спектре $\sigma\big(X(\omega)\big)$ задано подмножество собственных значений, не содержащее единицы, $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ такое, что любое собственное значение ρ из Ω имеет конечную геометрическую кратность. Кроме того, задано множество $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}$ такое, что $\Theta \cap \Omega = \emptyset$.

Для возмущения $u(t)$ справедлива теорема.

Теорема 8. *Пусть* $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ *— заданное подмножество спектра* $\sigma\big(X(\omega)\big)$, $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_l\}$ *— заданное множество такое, что* $\Omega \cap \Theta = \emptyset$. *Тогда возмущение вида* $u(t) = -F(t)SF^{-1}(t)x(t)$ *переводит* Ω *в* Θ, *где вид* S *определен теоремой 4.*

Для изучения асимптотического поведения решения дана оценка нормы возмущения $K(t)$ при $t = \omega$:

$$\|K(\omega)\| \geqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{|P(\exp(\omega\lambda_{k_i}))|}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |\exp(\omega\lambda_{k_i}) - \exp(\omega\lambda_{k_j})|}.$$

Отсюда автоматически следует оценка

$$\max_{t\in[0,\omega]} \|K(t)\| \geqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{|P(\exp(\omega\lambda_{k_i}))|}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |\exp(\omega\lambda_{k_i}) - \exp(\omega\lambda_{k_j})|}.$$

В *параграфе 5 главы 3* для уравнения вида

$$P_t u(t) + a(t)Du(t) = 0, \qquad (15)$$

где $u(t)$ — для каждого $t \in \mathbb{R}$ является элементом $\mathfrak{H}$,
$P_t = \alpha\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial \cdot}{\partial t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$,
$a(t)$ — ω-периодическая непрерывная функция,
D — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, имеющий компактную резольвенту $R(\lambda) = (D - \lambda I)^{-1}$, $\mathfrak{H}$ — некоторое гильбертово пространство, найден вид возмущения, переводящего заданное подмножество $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ спектра $\sigma\big(X(\omega)\big)$ в заданное множество Θ.

Пусть оператор D имеет в $\mathfrak{H}$ полную ортонормированную систему собственных функций $\{\psi_n\}$ таких, что они являются решениями спектральной задачи

$$D\psi_n = \lambda_n \psi_n.$$

Уравнение (15) представимо в виде нормальной системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{u} = w, \\ \dot{w} = -\frac{\beta}{\alpha}w - \frac{1}{\alpha}a(t)Du. \end{cases} \qquad (16)$$

Для данной системы эволюционный оператор $X(t)$ представим в виде:

$$X(t) = F(t)\exp(tQ), \qquad (17)$$

где

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha} \int_0^t (a(s) - \mu)\, ds & 1 \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n,$$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_n}{\alpha}\mu & -\frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix} (\cdot, \psi_n)\psi_n, \quad \mu = \int_0^{\omega} a(s)\, ds.$$

Возмущение, переводящее заданное подмножество $\Omega = \{\rho_{k_1}, \ldots, \rho_{k_l}\}$ спектра $\sigma\big(X(\omega)\big)$ в заданное множество Θ, имеет вид

$$u(t) = -F(t)SF^{-1}(t)x(t),$$

где вид S определен теоремой 4(стр. 12).

В *параграфе 6 главы 3* для однородной задачи распространения тепла в тонком стержне построено возмущение, переводящее заданные собственные значения в единицу.

Публикации по теме диссертации

1. Сивков Д.А. К вопросу об управлении спектром периодических систем // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2001. С. 241–242.
2. Сивков Д.А. К вопросу об управлении спектром периодических систем // Пятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция. Ижевск, 2001. Т.10. С. 10–11.
3. Сивков Д.А. Задача управления спектром уравнения теплопроводности на пространственной сетке // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели. Тезисы докладов. Челябинск, ЧелГУ, 2002. С. 97–98.
4. Сивков Д.А. Управление спектром оператора монодромии периодической системы с компактной оператор-функцией возмущениями ми-

нимального ранга // Вестн. Удм. Ун-та. 2002. Сер. Математика. №1. С. 92–95.

5. Сивков Д.А. Управление спектром оператора монодромии одноранговыми возмущениями // Современные методы теории краевых задач. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2004. С. 206–207.
6. Сивков Д.А. Управление спектром оператора монодромии уравнения в частных производных // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. - Воронеж, ВГУ, 2005. С. 207–208.
7. Сивков Д.А. Об управлении спектром оператора монодромии одноранговым возмущениям // Вестн. Удм. ун-та. 2005. Сер. Математика. №1. С. 167–176.
8. Сивков Д.А. Управление спектром периодических систем возмущениями минимального ранга // Известия Ин-та матем. и информ. / УдГУ. Ижевск. 2005. Вып. 3(33). С. 3–94.
9. Сивков Д.А. О допустимом управлении спектром оператора монодромии уравнения в частных производных // Современные методы теории краевых задач. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2005. С. 144.