Т. И. Трофимова

Руководство к решению задач по физике

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

2-е издание, переработанное и дополненное

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям

МОСКВА ▪ ЮРАЙТ ▪ 2011

УДК 53(03)
ББК 22.3я7
Т76

***Автор*:**

Трофимова Таисия Ивановна — профессор, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики Московского государственного института электроники и математики (технического университета). Автор многочисленных учебных пособий, неоднократно переизданных в России и переведенных на иностранные языки.

Трофимова, Т. И.

Т76 Руководство к решению задач по физике : учеб. пособие для бакалавров / Т. И. Трофимова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2011. — 265 с. — Серия : Бакалавр.

ISBN 978-5-9916-1244-9 (Издательство Юрайт)
ISBN 978-5-9692-1170-4 (ИД Юрайт)

Изложены все разделы курса физики для вузов: механика, молекулярная физика, термодинамика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая и квантовая оптика, элементы квантовой физики атомов и молекул, элементы физики атомного ядра и элементарных частиц. Приводятся основные понятия, законы и формулы, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Для студентов технических специальностей вузов и техникумов, а также старшеклассников и абитуриентов, готовящихся к поступлению в технические вузы.

УДК 53(03)
ББК 22.3я7

ISBN 978-5-9916-1244-9
(Издательство Юрайт)
ISBN 978-5-9692-1170-4
(ИД Юрайт)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие **5**

ОСНОВЫ ФИЗИКИ **7**

Раздел I. Физические основы механики **8**

1.1. Элементы кинематики 9
1.2. Элементы динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела 18
1.3. Работа и энергия 24
1.4. Механика твердого тела 32
1.5. Тяготение. Элементы теории поля 42
1.6. Элементы механики жидкостей 49
1.7. Элементы специальной (частной) теории относительности 55

Раздел II. Оновы молекулярной физики и термодинамики **60**

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов 61
2.2. Основы термодинамики 71
2.3. Реальные газы и жидкости 79

Раздел III. Электричество и магнетизм **84**

3.1. Электростатика 85
3.2. Постоянный электрический ток 101
3.3. Магнитное поле 110
3.4. Электромагнитная индукция 119
3.5. Магнитные свойства вещества 126
3.6. Основы теории Максвелла 130

Раздел IV. Колебания и волны **132**

4.1. Механические колебания 133
4.2. Электромагнитные колебания 144
4.3. Упругие волны 152
4.4. Электромагнитные волны 159

Раздел V. Оптика. Квантовая природа излучения **164**

5.1. Элементы геометрической оптики 165

5.2. Интерференция света 169
5.3. Дифракция света 177
5.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом 184
5.5. Поляризация света 191
5.6. Квантовая природа излучения 197

Раздел VI. Элементы квантовой механики 207
6.1. Волновые свойства микрочастиц 208
6.2. Уравнение Шрёдингера и его применение в некоторых задачах 214

Раздел VII. Элементы физики атомов и молекул 225
7.1. Атом водорода по Бору и его квантово-механическое описание 226
7.2. Элементы современной физики атомов и молекул 233

Раздел VIII. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц 239
8.1. Характеристики атомного ядра. Ядерные силы 240
8.2. Радиоактивность 243
8.3. Ядерные реакции и их основные типы 248
8.4. Элементы физики элементарных частиц 252

Приложения 255

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие охватывает все разделы курса физики: основы механики, молекулярная физика, термодинамика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая и квантовая оптика, элементы квантовой физики атомов и молекул, элементы физики атомного ядра и элементарных частиц. Оно соответствует программе курса физики для инженерно-технических специальностей.

Пособие предназначено *для изучения и повторения* курса физики, весьма *полезно при решении задач и подготовке к коллоквиумам, семинарам и экзаменам*.

Пособие может быть использовано студентами и преподавателями вузов и техникумов. Может быть полезно учащимся лицеев и колледжей, а также абитуриентам, готовящимся к поступлению в технические вузы.

О структуре пособия. Пособие состоит из двух частей. В первой части «Основы физики» каждый параграф начинается с перечисления основных физических понятий и законов, знание которых важно для усвоения данной темы. Затем приводятся формулы, необходимые для решения задач. Дальше следуют примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Во второй части — «Толковом словаре физических понятий» даются «расшифровка» основных понятий, терминов, формулировка и выяснение физического смысла законов, объяснение различных физических процессов и явлений. Статьи словаря представлены в алфавитном порядке.

О работе с толковым словарем. Каждая статья, в зависимости от рассматриваемого материала, достаточно подробно (это особенно касается вопросов современной физики) раскрывает его содержание.

Если название статьи содержит несколько слов, включая и прилагательные, на первое место выносится существительное. Например, название статей следует искать на слова «Силы ядерные», «Моменты электронов и атомов механические и магнитные орбитальные», а не на сочетания слов «Ядерные силы», «Орбитальные механические и магнитные моменты электронов и атомов».

Для нахождения термина следует проверить его наличие по всем ключевым словам.

О задачах и их решении. В пособии около 400 задач, примерно 60% из них решены без каких-либо пояснений, поскольку сначала следует изучить материал по данной теме, провести собственный анализ задачи, решив ее, и только затем для сравнения посмотреть готовое решение, которое не всегда бывает единственным.

Все задачи оформлены однотипно (запись условия, перевод данных в СИ, запись необходимых уравнений, их решение в общем виде, подстановка числовых значений в конечную формулу, запись ответа). Цифры в задачах и ответах даны с точностью до трех значащих цифр. Значащие цифры — нули, стоящие в конце чисел, для упрощения записи опускаются.

Единицы физических величин вынесены в приложение, где задаются определяющие их уравнения, приводятся обозначения и определения. В приложении имеются также и другие вспомогательные таблицы.

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Раздел I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

РАЗДЕЛЫ МЕХАНИКИ

- Классическая механика
- Релятивистская механика
- Квантовая механика

РАЗДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

- Кинематика
- Динамика
- Статика

1.1. Элементы кинематики

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Материальная точка
- Абсолютно твердое тело (твердое тело)
- Абсолютно упругое тело
- Абсолютно неупругое тело
- Поступательное движение
- Вращательное движение
- Колебательное движение
- Тело отсчета
- Система координат
- Система отсчета
- Траектория
- Длина пути
- Вектор перемещения
- Скорость
- Средняя скорость
- Мгновенная скорость
- Ускорение и его составляющие
- Среднее ускорение
- Мгновенное ускорение
- Тангенциальная составляющая ускорения
- Нормальная составляющая ускорения
- Кинематические уравнения различных видов движения
- Угловая скорость
- Угловое ускорение
- Период вращения
- Частота вращения

Основные формулы

Средняя и мгновенная скорости материальной точки

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

Модули средней и мгновенной скоростей

$$\langle v \rangle = \left| \langle \vec{v} \rangle \right| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{\left| \Delta \vec{r} \right|}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$v = \left| \vec{v} \right| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left| \Delta \vec{r} \right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

[$\Delta \vec{r}$ — элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки; Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt].

Среднее и мгновенное ускорения материальной точки

$$\langle\vec{a}\rangle=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Тангенциальная и нормальная составляющие ускорения

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n=\frac{v^2}{r}$$

[r — радиус кривизны траектории в данной точке].

Классификация движения в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения:

a_τ	a_n	*Движение*
0	0	прямолинейное равномерное
$a_\tau = a = \text{const}$	0	прямолинейное равномерное
$a_\tau = f(t)$	0	прямолинейное с переменным ускорением
0	const	равномерное по окружности
0	$\neq 0$	криволинейное равномерное
const	$\neq 0$	криволинейное равномерное
$a_\tau = f(t)$	$\neq 0$	криволинейное с переменным ускорением

Полное ускорение при криволинейном движении

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n, \quad a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}.$$

Кинематическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси X

$$x=x_0+vt$$

[x_0 — начальная координата, t — время].

Путь и скорость для равнопеременного движения

$$s=v_0t\pm\frac{at^2}{2}, \quad v=v_0\pm at.$$

Длина пути, пройденного материальной точкой за промежуток времени от t_1 до t_2,

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Свободное падение:

• путь, пройденный телом в свободном падении при $\vec{v}_0 = 0$,

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

[g — ускорение свободного падения];

• скорость тела в произвольный момент времени t

$$\vec{v} = \vec{g}t$$

[начальная скорость падения $\vec{v}_0 = 0$];

• модуль скорости тела при падении с высоты h

$$v = \sqrt{2gh};$$

• время падения тела с высоты h при $v_0 = 0$

$$t = \sqrt{2/hg}.$$

Движение тела, брошенного вертикально вверх (рис. 1):

• движение вертикально вверх с начальной скоростью v_0

$$\begin{cases} 0 = v_0 - gt, \\ 0 - v^2 = -2gt; \end{cases}$$

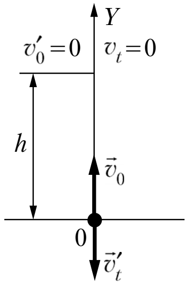


Рис. **1**

• время и высота подъема

$$t = \frac{v_0}{g}, \quad h = \frac{v_0^2}{2g};$$

• свободное падение от максимальной точки подъема

$$(v_t')^2 - 0 = 2gh, (v_t')^2 = 2g\frac{v_0^2}{2g},$$

так как высота падения равна высоте подъема.

Конечная скорость падения равна начальной скорости бросания:

$$v_t' = v_0,$$

$$v_t' = 0 + gt'.$$

Время падения равно времени подъема:

$$t' = \frac{v_t'}{g} = \frac{v_0}{g} = t.$$

Движение тела, брошенного горизонтально с начальной скоростью $\vec{v}_0$ с высоты h, рассматривают как комбинацию двух движений (рис. 2):

• горизонтальное (равномерное) со скоростью $\vec{v}_0$;

• вертикальное свободное падение (равноускоренное с ускорением g)

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Уравнение траектории тела — парабола:

$$y = \frac{g}{2v_0} x^2.$$

Горизонтальная дальность полета

$$s = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Мгновенная скорость и ее модуль в каждой точке траектории

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \; v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Движение тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис. 3). Это движение рассматривают как комбинацию двух движений:

• горизонтальное (равномерное) движение со скоростью $\vec{v}_x$;

• движение тела, брошенного вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_y$.

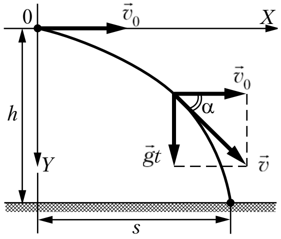


Рис. **2**

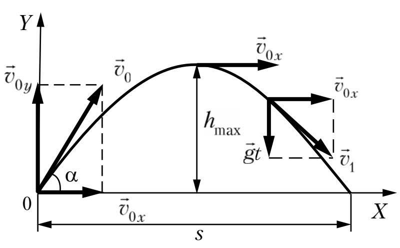


Рис. **3**

Проекции скорости в любой момент времени при подъеме до верхней точки траектории

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \; v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Модули мгновенной скорости в каждой точке траектории при подъеме и спуске

$$v_{п} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2},$$

$$v_{сп} = \sqrt{v_{0x}^2 + (gt)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + g^2 t^2}$$

[$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и $v_{0y} = \sin\alpha$ — проекции начальной скорости на оси координат].

Время подъема тела

$$t_{\text{п}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

[$v_y = 0$; $0 = v_0 \sin\alpha - gt_{\text{п}}$].

Общее время движения

$$t_{\text{общ}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

[время падения равно времени подъема].

Дальность полета тела

$$s = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$$

[$s = v_{0x}t_{\text{общ}} = v_0\, t_{\text{общ}} \cos\alpha$].

Максимальная высота подъема

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\left[h = v_{0y}t_{\text{п}} - \frac{gt_{\text{п}}^2}{2} = v_0 t_{\text{п}} \sin\alpha - \frac{gt_{\text{п}}^2}{2}\right].$$

Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловая скорость равномерного вращательного движения

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

[φ — угол поворота произвольного радиуса от начального движения; t — промежуток времени, за который произошел данный поворот; T — период вращения; n — частота вращения].

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

[φ_0 — начальное угловое перемещение; t — время].

Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

[ω_0 — начальная угловая скорсть].

Связь между линейными (длина пути s, пройденного точкой по дуге окружности радиусом R, линейная скорость v, тангенциальная составляющая ускорения a_τ, нормальная составляющая ускорения a_n) и угловыми величинами:

$$s = R\varphi, \ v = R\omega, \ a_\tau = R\varepsilon, \ a_n = \omega^2 R$$

[φ — угол поворота, ω — угловая скорость, ε — угловое ускорение].

Примеры решения задач

1. Тело брошено со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (рис. 4). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить для момента времени $t = 1{,}5$ с после начала движения: 1) нормальное ускорение; 2) тангенциальное ускорение.

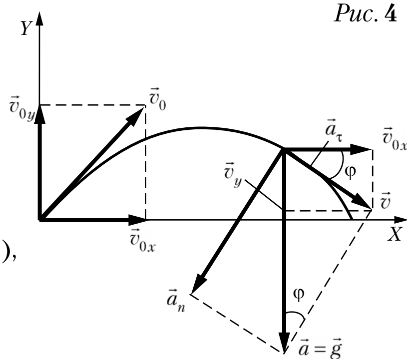
Дано:
$v_0 = 20$ м/с
$\alpha = 30°$
$t = 1{,}5$ с

1) a_n — ?
2) a_τ — ?

Решение:

$v_y = v_{0y} - gt_1$,
$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$.
При h_{max}
$v_y = 0$,
$v_0 \sin\alpha = gt_1$,

Рис. **4**



$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 1{,}02 \text{ с}, \quad t = 1{,}5 \text{ с} > t_1 \text{ (спуск)},$$

$$t' = t - t_1 = 1{,}5 \text{ с} - 1{,}02 \text{ с} = 0{,}48 \text{ с},$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = gt',$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg}\frac{gt'}{v_0 \cos\alpha}, \quad a = g, \ \ a_\tau = g\sin\varphi, \ \ a_n = g\cos\varphi,$$

$$a_n = g\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{gt'}{v_0\cos\alpha}\right), \ a_\tau = g\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{gt'}{v_0\cos\alpha}\right).$$

Ответ: 1) $a_n = 9{,}47$ м/с^2; 2) $a_\tau = 2{,}58$ м/с^2.

2. Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за первые 10 с достигает значения 5 м/с^2. Определить в конце десятой секунды: 1) скорость точки; 2) путь, пройденный точкой.

Дано:
$a = kt$
$t_1 = 10$ с
$a_1 = 5$ м/с^2

1) v_1 — ?
2) s_1 — ?

Решение:

$$a = kt, \quad k = \frac{a}{t} = \frac{a_1}{t_1},$$

$$v = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t kt\,\mathrm{d}t = \frac{kt^2}{2}, \quad v_1 = \frac{kt_1^2}{2} = \frac{a_1 t_1}{2},$$

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{kt^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{kt^3}{6}, \quad s_1 = \frac{kt_1^3}{6} = \frac{a_1 t_1^2}{6}.$$

Ответ: 1) $v_1 = 25$ м/с; $s_1 = 83{,}3$ м.

3. Движение материальной точки в плоскости XY описывается законом $x = At$, $y = At(1 + Bt)$, где A и B — положительные постоянные. Определить: 1) уравнение траектории материальной точки $y(x)$; 2) радиус-вектор $\vec{r}$ точки в зависимости от времени; 3) скорость v точки в зависимости от времени; 4) ускорение a точки в зависимости от времени.

Дано:
$x = At$
$y = At(1 + Bt)$

1) $y(x)$ — ?
2) $\vec{r}(t)$ — ?
3) $v(t)$ — ?
4) $a(t)$ — ?

Решение:

$$x = At, \quad t = \frac{x}{A},$$

$$y = At(1 + Bt) = A\frac{x}{A}\left(1 + B\frac{x}{A}\right) = x + \frac{B}{A}x^2,$$

$$y = x + \frac{Bx^2}{A},$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = At\vec{i} + At(1 + Bt)\vec{j},$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = A\vec{i} + (A + 2ABt)\vec{j},$$

$$v = \sqrt{A^2 + (A + 2ABt)^2} = A\sqrt{1 + (1 + 2Bt)^2},$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2AB\vec{j}, \quad a = 2AB = \mathrm{const}.$$

Ответ: 1) $y = x + \dfrac{Bx^2}{2}$; 2) $\vec{r} = At\vec{i} + (1+Bt)\vec{j}$;

3) $v = A\sqrt{1+(1+2Bt)^2}$; 4) $a = 2AB = \text{const}$.

4. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с$^{-1}$, после выключения тока, сделав $N = 500$ оборотов, остановился. Определить угловое ускорение ε якоря.

Дано:
$n = 50$ с$^{-1}$
$N = 500$

ε — ?

Решение:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2},\ \ \varphi = 2\pi N,$$

$$\omega_0 = 2\pi n,\ \ 2\pi N = 2\pi n t - \frac{\varepsilon t^2}{2},\ \ \omega = \omega_0 - \varepsilon t,\ \ 0 = 2\pi n - \varepsilon t,$$

$$t = \frac{2\pi n}{\varepsilon},\ \ 2\pi N = 2\pi n\frac{2\pi n}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon \cdot 4\pi^2 n^2}{2\varepsilon^2} = \frac{2\pi^2 n^2}{\varepsilon},\ \ \varepsilon = \frac{\pi n^2}{N}.$$

Ответ: $\varepsilon = 15{,}7$ рад/с.

Задачи для самостоятельного решения

5. С башни высотой $h = 30$ м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определить: 1) уравнение траектории тела $y(x)$; 2) скорость v тела в момент падения на Землю; 3) угол φ, который образует эта скорость с горизонтом в точке его падения.

6. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0{,}1$ м/с^2, $D = 0{,}03$ м/с^3). Определить: 1) через какой промежуток времени после начала движения ускорение a тела будет равно 2 м/с^2; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени.

7. Зависимость пройденного телом пути s от времни t определяется уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$ ($A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3). Запишите выражения для скорости и ускорения. Определить для момента времени $t = 2$ с после начала движения: 1) пройденный путь; 2) скорость; 3) ускорение.

8. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орты осей X и Y. Определить для момента $t = 1$ с: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.

9. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 4t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\vec{k}$. Определить: 1) скорость $\vec{v}$; 2) ускорение $\vec{a}$. Вычислить модуль скорости в момент времени $t = 2$ с.

10. Колесо радиусом $R = 80$ см вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2$ рад/с^2. Определить полное ускорение колеса через $t = 1$ с после начала движения.

11. Колесо автомобиля вращается равнозамедленно. За время $t = 2$ мин оно изменило частоту вращения от $n_1 = 240$ мин$^{-1}$ до $n_2 = 60$ мин$^{-1}$. Определить: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

12. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0{,}5$ рад/с^2). Определить к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения.

13. Диск радиусом $R = 10$ см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt^3$ ($A = 2$ рад, $B = 4$ рад/с^2). Определить для точек на ободе колеса: 1) нормальное ускорение в момент времени $t = 2$ с; 2) тангенциальное ускорение для этого же момента; 3) угол поворота φ, при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha = 45°$.

ОТВЕТЫ: **5.** 1) $y = \dfrac{g}{2v_0^2}x^2$; 2) 26,2 м/с; 3) 67,8°. **6.** 1) 10 с; 2) 1,1 м/с^2. **7.** 1) 24 м; 2) 38 м/с; 3) 42 м/с^2. **8.** 1) 6,7 м/с; 2) 8,48 м/с^2. **9.** 16,3 м/с. **10.** $a = \varepsilon R\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4} = 3{,}58$ м/с^2. **11.** 1) $\varepsilon = \dfrac{2\pi(n_1 - n_2)}{t} = 0{,}157$ рад/с^2; 2) $N = n_1 t - \dfrac{(n_1 - n_2)t}{2} = 300$. **12.** 1) 2 рад/с; 2) 1 рад/с^2; 3) 0,8 м/с^2; 3,2 м/с^2; 3,3 м/с^2. **13.** 1) 230 м/с^2; 2) 4,8 м/с^2; 3) 2,67 рад.

1.2. Элементы динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Первый закон Ньютона
- Масса
- Сила
- Инертность тел
- Третий закон Ньютона
- Силы трения
- Механическая система
- Внутренние силы
- Внешние силы
- Замкнутая система
- Закон сохранения импульса
- Инерциальная система отсчета
- Импульс
- Второй закон Ньютона
- Принцип независимости действия сил
- Однородность пространства
- Центр масс системы материальных точек
- Закон движения центра масс
- Уравнение движения тела переменной массы
- Формула Циолковского

Основные формулы

Импульс (количество движения) материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

[m — масса материальной точки; v — ее скорость].

Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\vec{t}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\vec{t}}.$$

Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Третий закон Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

[$\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой].

Сила трения качения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \frac{f_{\text{к}} N}{r}$$

[$f_{\text{к}}$ — коэффициент трения качения; r — радиус катящегося тела; N — сила нормального давления].

Сила трения покоя максимальная

$$(F_{\text{тр}_0})_{\max} = f_0 N$$

[f_0 — коэффициент трения покоя].

Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN$$

[f — коэффициент трения скольжения].

Закон сохранения импульса для замкнутой системы

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

[n — число материальных точек (или тел), входящих в систему; m_i — масса i-й материальной точки (тела); v_i — скорость i-й точки (тела)].

Радиус-вектор центра масс системы материальных точек

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$$

[m_i и $\vec{r}_i$ — соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n — число материальных точек в системе; $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ — масса системы].

Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \; y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \; z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

[m_i —масса i-й материальной точки; x_i, y_i, z_i — координаты точки].

Закон движения центра масс

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты (уравнение Мещерского)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = F + \vec{F}_р$$

[m и $\vec{L}$ — соответственно масса и скорость ракеты в момент времени t; $\vec{F}_р = -\vec{u}\dfrac{dm}{dt}$ — реактивная сила. Если $\vec{u}$ (скорость истечения газов) относительно ракеты противоположна $\vec{v}$ по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с $\vec{v}$, то ракета тормозится].

Формула Циолковского для определения скорости ракеты

$$v = u\ln\frac{m_0}{m}$$

[u — скорость истечения газов; m_0 — начальная масса ракеты, m — конечная масса ракеты].

Примеры решения задач

14. На рис. 5 изображена система блоков, к которым подвешены грузы, масса которых $m_1 = 200$ г и $m_2 = 500$ г. Считая, что груз m_1 поднимается, а неподвижный блок с грузом m_2 опускается, нить и блоки невесомы, силы трения отсутствуют, определить: 1) силу натяжения нити T (рис. 6); 2) ускорения, с которыми движутся грузы.

Дано:
$m_1 = 200$ г $= 0{,}2$ кг
$m_2 = 500$ г $= 0{,}5$ кг

1) T — ?
2) a_1 — ?
a_2 — ?

Решение:

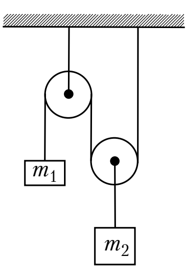


Рис. **5**

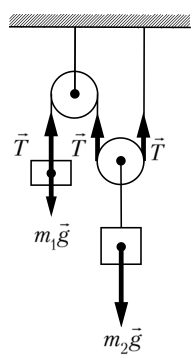


Рис. **6**

$$\begin{cases} a_1 = 2a_2, \\ m_1a_1 = T - m_1g, \\ m_2a_2 = m_2g - 2T; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_1a_2 = T - m_1g, \\ m_2a_2 = m_2g - 2T; \end{cases}$$

$$\frac{m_2}{2m_1} = \frac{m_2g - 2T}{T - m_1g},$$

$$m_2T - m_1m_2g = 2m_1m_2g - 4m_1T, \ \ m_2T + 4m_1T = 2m_1m_2g + m_1m_2g,$$

$$T(m_2 + 4m_1) = 3m_1m_2g, \quad T = \frac{3m_1m_2g}{m_2 + 4m_1},$$

$$a_1 = \frac{T - m_1 g}{m_1} = \frac{2(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1}, \quad a_2 = \frac{m_2 g - 2T}{m_2} = \frac{(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1}.$$

Ответ: 1) $T = 2{,}26$ Н; 2) $a_1 = 1{,}5$ м/с^2; $a_2 = 0{,}75$ м/с^2.

15. Через блок, укрепленный на конце стола, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы, один из которых ($m_1 = 400$ г) движется по поверхности стола, а другой ($m_2 = 600$ г) — вдоль вертикали вниз (рис. 7). Коэффициент f трения груза о стол равен 0,1. Считая нить и блок невесомыми, определить: 1) ускорение a, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения T нити.

Дано:
$m_1 = 400$ г $= 0{,}4$ кг
$m_2 = 600$ г $= 0{,}6$ кг
$f = 0{,}1$.

1) a — ?
2) T — ?

Решение:

$$\begin{cases} m_1 a = T - F_{\text{тр}}, \\ m_2 a = m_2 g - T; \end{cases}$$

$$F_{\text{тр}} = f m_1 g,$$

$$\begin{cases} m_1 a = T - f m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T; \end{cases}$$

$$a = \frac{(m_2 - f m_1)g}{m_1 + m_2}, \quad T = m_2(g - a).$$

Ответ: 1) $a = 5{,}49$ м/с^2; 2) $T = 2{,}59$ Н.

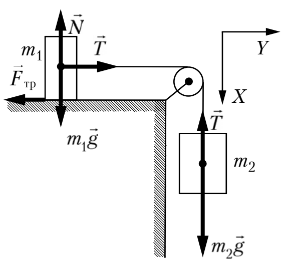


Рис. **7**

16. С железнодорожной платформы, движущейся со скоростью $v_0 = 18$ км/ч, выстрелили из пушки в горизонтальном направлении (рис. 8). Масса платформы с пушкой $M = 15$ т, масса снаряда $m = 20$ кг, а начальная скорость снаряда $v_2 = 500$ м/с. Определить скорость v_1 платформы после выстрела, если выстрел произведен в направлении движения платформы.

Дано:
$v_0 = 18$ км/ч $= 5$ м/с
$M = 15$ т $= 1{,}5 \cdot 10^5$ кг
$m = 20$ кг
$v_2 = 500$ м/с
$v_{02} = v_{01} = v_0$

v_1 — ?

Решение:

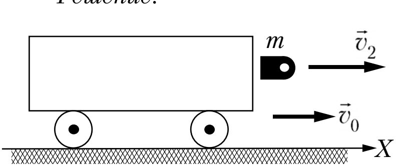


Рис. **8**

$$(M + m)\vec{L}_0 = M\vec{L}_1 + m\vec{L}_2,$$

$$(M + m)v_0 = Mv_1 + mv_2, \qquad v_1 = \frac{(M + m)v_0 - mv_2}{M} = 4{,}34 \text{ м / с}.$$

Так как $m \ll M$, то $v_1 = \dfrac{Mv_0 - mv_2}{M} = v_0 - \dfrac{m}{M}v_2 = 4{,}33$ м/с.

Ответ: $v_1 = 4{,}34$ м/с.

17. Ракета с начальной масой $m_0 = 1{,}5$ кг, начиная движение из состояния покоя вертикально вверх, выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью $u = 800$ м/с. Расход газа $\mu = 0{,}3$ кг/с. Определить, какую скорость приобретает ракета через время $t = 1$ с после начала движения, если она движется: 1) при отсутствии внешних сил; 2) в однородном поле силы тяжести. Оценить относительную погрешность, сделанную для данных условий задачи при пренебрежении внешним силовым полем.

Дано:
$m_0 = 1{,}5$ кг
$u = 800$ м/с
$\mu = 0{,}3$ кг/с
$t_1 = 1$ с

1) v_1 — ?
2) v_2 — ?
3) δ — ?

Решение:

$$1)\ m\vec{a} = \vec{F}_p + \vec{F},\ m = m_0 - \mu t,\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},\ F_\text{р} = \mu u,$$

$$F = 0,\ (m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u,\ dv = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}dt,$$

$$v(t) = \int \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}dt = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t};$$

$$2)\ v_1 = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t_1},\ F_\text{р} = \mu u, F = mg,$$

$$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u - (m_0 - \mu t)g,\ \frac{dv}{dt} = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}dt - g,$$

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt,\ v_2 = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t_1} - gt_1;$$

$$3)\ \delta = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{gt_1}{u \ln \dfrac{m_0}{m_0 - \mu t_1}}.$$

Ответ: 1) $v_1 = 134$ м/с, 2) $v_2 = 124$ м/с, 3) $\delta = 7{,}3\%$.

Задачи для самостоятельного решения

18. К нити подвешен груз массой $m = 500$ г. Определить силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с^2; 2) опускать с ускорением 2 м/с^2.

19. В установке углы α и β с горизонтом соответственно равны 30 и 45°, массы тел $m_1 = 0{,}45$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг (рис. 9). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определить: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) силу натяжения нити.

20. С вершины клина, длина которого $l = 2$ м и высота $h = 1$ м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $f = 0{,}15$. Определить: 1) ускорение, с которым движется тело; 2) время прохождения тела вдоль клина; 3) скорость тела у основания клина.

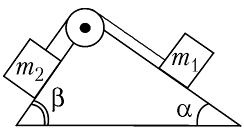


Рис. **9**

21. Платформа, нагруженная песком $M = 2$ т, стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой $m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определить, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда $v = 450$ м/с, а ее направление — сверху вниз под углом $\alpha =$ $= 30°$ к горизонту.

22. Определить координаты центра масс системы, состоящей из четырех шаров массами $2m$, $3m$, $4m$ и m, которые расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см (рис. 10). Направление координатных осей указано на рисунке.

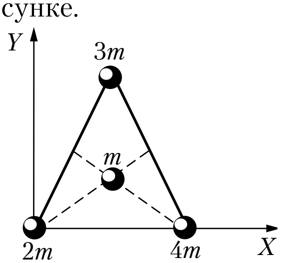


Рис. **10**

23. Ракета, масса которой в начальный момент времени $M = 2$ кг, запущена вертикально вверх. Относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 150$ м/с, расход горючего $\mu = 0{,}2$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить ускорение a ракеты через $t = 3$ с после начала ее движения. Поле силы тяжести считать однородным.

ОТВЕТЫ: **18.** 1) 5,9 Н; 2) 3,9 Н. **19.** 1) 1,33 м/с^2; 2) 2,8 Н. **20.** 1) 3,63 м/с^2; 2) 1,05 с; 3) 3,81 м/с. **21.** 1,55 м/с. **22.** 12 см, 5,77 см.

23. $a = \dfrac{\mu u}{M - \mu t} - g = 11{,}6 \text{ м} / \text{с}^2.$

1.3. Работа и энергия

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Энергия
- Работа силы
- Мощность
- Кинетическая энергия
- Потенциальная энергия
- Полная механическая энергия
- Закон сохранения механической энергии
- Консервативная сила
- Однородность времени
- Закон сохранения и превращения энергии
- Диссипативная сила
- Потенциальное поле
- Консервативные системы
- Диссипативные системы
- Потенциальная кривая
- Удар
- Абсолютно упругий удар
- Абсолютно неупругий удар

Основные формулы

Элементарная работа постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = F_s\,\mathrm{d}s$$

[α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\mathrm{d}\vec{r}$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$ — элементарный путь; F_s — проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $\mathrm{d}\vec{r}$].

Работа, совершаемая переменной силой на пути s,

$$A = \int_s F_s\,\mathrm{d}s = \int_s F\cos\alpha\,\mathrm{d}s.$$

Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N\rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мощность (мгновенная мощность)

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \qquad N = \vec{F}\vec{v} = F_s v = Fv\cos\alpha$$

[$\vec{v}$ — вектор скорости, с которой движется точка приложения силы $\vec{F}$; α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$].

Кинетическая энергия движущегося тела

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

[m — масса тела; v — его скорость].

Связь между силой, действующей на тело в данной точке поля, и потенциальной энергией частицы

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \Pi, \text{ или } \vec{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

[$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей].

Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли на высоту h,

$$\Pi = mgh$$

[g — ускорение свободного падения].

Сила упругости

$$F = -kx$$

[x — деформация; k — жесткость].

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

[x — деформация; k —коэффициент упругости (в случае пружины — жесткость)].

Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = \text{E} = \text{const},$$

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}, \\ \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} = \text{const}. \end{cases}$$

Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = \frac{v_n'}{v_n}$$

[v_n' и v_n — соответственно нормальные составляющие относительной скорости тел после и до удара].

Скорость двух тел массами m_1 и m_2 после прямого *абсолютно упругого центрального удара*

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

[предполагается, что при прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до ($\vec{v}_1, \vec{v}_2$) и после ($\vec{v}_1', \vec{v}_2'$) удара лежат на прямой, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту прямую равны модулям скоростей].

Скорость движения тел после *абсолютно неупругого центрального удара*

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Изменение кинетической энергии тел при *абсолютно неупругом центральном ударе* (разность кинетической энергии тел до и после удара)

$$\Delta T = \left(\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

Примеры решения задач

24. Груз массой $m = 80$ кг поднимают вдоль наклонной плоскости с ускорением $a = 1$ м/с^2 (рис. 11). Длина наклонной плоскости $l = 3$ м, угол α ее наклона к горизонту равен 30°, а коэффициент трения $f = 0{,}15$. Определить: 1) работу, совершаемую подъемным устройством; 2) его среднюю мощность; 3) его максимальную мощность. Начальная скорость груза равна нулю.

Дано:
$m = 80$ кг
$a = 1$ м/с^2
$l = 3$ м
$\alpha = 30°$
$f = 0{,}15$
$v_0 = 0$

1) A — ?
2) $\langle P \rangle$ — ?
3) P_{max} — ?

Решение:

$A = Fl$,
$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}$.
В проекциях на оси X и Y
$ma = F - F_1 - F_{тр}$;
$0 = N - F_2$,
$F_1 = mg\sin\alpha$, $F_2 = mg\cos\alpha$,
$F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha$,
$F = m(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha)$,
$A = Fl = ml(a + g\sin\alpha +$
$+ fg\cos\alpha)$,

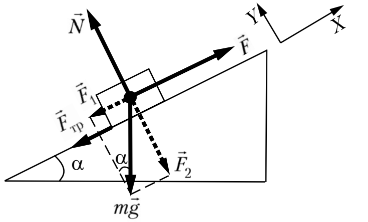


Рис. **11**

$$\langle P\rangle = \frac{A}{t}, \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \quad \langle P\rangle = A\sqrt{\frac{a}{2l}},$$

$$P_{\max} = Fv_{\max} = Fat, \quad P_{\max} = m\sqrt{2al}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Ответ: 1) $A = 1{,}72$ кДж; 2) $\langle P\rangle = 702$ Вт; 3) $P_{\max} = 1{,}41$ кВт.

25. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}, \vec{j}$ – соответственно единичные векторы осей X и Y. Определить мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени t.

Дано:
m
$\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$

$N(t)$ — ?

Решение:

$$N = \vec{F}\vec{v}, \quad \vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j} = m\vec{a},$$

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}) = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \frac{1}{m}\int_0^t (2t\vec{i} + 3t^2\vec{j})\,dt = \frac{1}{m}(t^2\vec{i} + t^3\vec{j}),$$

$$N(t) = (2t\vec{i} + 3t^2\vec{j})\frac{1}{m}(t^2\vec{i} + t^3\vec{j}) = \frac{1}{m}(2t^3 + 3t^5).$$

Ответ: $N(t) = \frac{1}{m}(2t^3 + 3t^5)$.

26. Материальная точка массой $m = 20$ г движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения кинетическая энергия материальной точки оказалась равной 6,3 мДж. Определить тангенциальное ускорение.

Дано:
$m = 20$ г $= 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$R = 10$ см $= 0{,}1$ м
$N = 5$
$T = 6{,}3$ мДж $= 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ Дж

a_τ — ?

Решение:

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad 2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$a_n = \frac{v}{t} = \varepsilon R, \quad \varepsilon = \frac{v}{Rt}, \quad 2\pi N = \frac{vt^2}{2Rt} = \frac{vt}{2R},$$

$$t = \frac{4\pi NR}{v}, \quad a_\tau = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{4\pi NR} = \frac{T}{2\pi mNR}.$$

Ответ: $a_\tau = 0{,}1$ м/с^2.

27. Шайба массой m скользит без трения с высоты h по желобу, переходящему в петлю радиусом R. Определить: 1) силу давления F шайбы на опору в точке, определяемой углом α (рис. 12); 2) угол α.

Дано:
m
h
R

1) F — ?
2) α — ?

Решение:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mgh_1,$$

$$h_1 = R(1+\sin\alpha),$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mgR(1+\sin\alpha),$$

$$mv^2 = 2mgh - 2mgR(1+\sin\alpha),$$

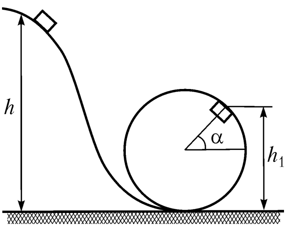


Рис. **12**

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg\sin\alpha = mg\left[\frac{2(h - R(1+\sin\alpha))}{R} - \sin\alpha\right],$$

$$\boxed{F=0}\quad \frac{2h}{R} - 2 - 3\sin\alpha = 0,\ \sin\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right),\ \alpha = \arcsin\alpha\left[\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right].$$

Ответ: 1) $F = mg\left[\frac{2(h - R(1+\sin\alpha))}{R} - \sin\alpha\right]$;

2) $\alpha = \arcsin\alpha\left[\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right]$.

28. Два свинцовых шара массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на нитях длиной $l = 70$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпустили (рис. 13). Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимаются шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе.

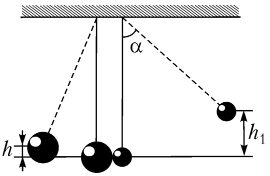


Рис. **13**

Дано:
$m_1 = 2$ кг
$m_2 = 3$ кг
$l = 70$ см $= 0,7$ м
$\alpha = 60^\circ$

1) h — ?
2) ΔT — ?

Решение:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

[v_1 и v_2 — скорости шаров до удара,
v — скорость движения шаров после удара];

$$m_1gh_1 = \frac{m_1v_1^2}{2},\quad v_1 = \sqrt{2gh_1},\quad h_1 = l(1-\cos\alpha),$$

Содержание

$$v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\boxed{v_2 = 0} \quad v = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \frac{2m_1\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)}{m_1+m_2}, \; (m_1+m_2)\frac{v^2}{2} = (m_1+m_2)gh,$$

$$h = \frac{v^2}{g} = \frac{2m_1^2 l \sin^2(\alpha/2)}{(m_1+m_2)^2}, \; \Delta T = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)}{2}v^2 = 2gl\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: 1) $h = 5{,}6$ см; 2) $\Delta T = 4{,}12$ Дж.

29. Зависимость потенциальной энергии П тела в центральном силовом поле от расстояния r до центра поля задается функцией $\Pi(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$ (A = 6 мкДж · м^2, B = 0,3 мДж · м). Определить, при каких значениях r маскимальное значение принимают: 1) потенциальная энергия тела; 2) сила, действующая на тело.

Дано:

$\Pi(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$

$A = 6$ мкДж · м$^2 = 6 \cdot 10^{-6}$ Дж · м^2

$B = 0{,}3$ мДж · м $= 3 \cdot 10^{-4}$ Дж · м

1) $\Pi = \Pi_{\max}$

2) $F = F_{\max}$

r — ?

Решение:

$$\boxed{\Pi = \Pi_{\max}} \quad \frac{d\Pi}{dr} = 0,$$

$$\frac{d\Pi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}\right) = -\frac{2A}{r^3} + \frac{B}{r^2},$$

$$\frac{1}{r^3}(-2A + Br) = 0, \quad 2A = Br, \quad r = \frac{2A}{B}.$$

$$\boxed{F = F_{\max}} \quad \frac{dF}{dr} = 0,$$

$$F = -\frac{d\Pi}{dr} = \frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2},$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{2A}{r^3} - \frac{B}{r^2}\right) = -\frac{6A}{r^4} + \frac{2B}{r^3} = \frac{2}{r^4}(-3A + Br) = 0,$$

$$3A = Br, \quad r = \frac{3A}{B}.$$

Ответ: 1) $r = \frac{2A}{B} = 4$ см; 2) $r = \frac{3A}{B} = 6$ см.

30. Определить, во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1, при его соударении с покоящимся шаром, масса m_2 которого в n раз больше массы m_1 налетающего шара (рис. 14). Удар считать центральным абсолютно упругим.

Дано:

$n = m_2/m_1$

v_1/v'_1 — ?

Решение:

$$\begin{cases} m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2', \\ \dfrac{m_1v_1^2}{2} = \dfrac{m_1v_1'^2}{2} + \dfrac{m_2v_2'^2}{2}, \end{cases}$$

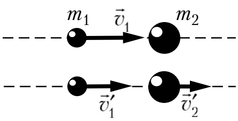


Рис. **14**

$$m_2 = nm_1,$$

$$v_1 = v_1' + nv_2', \quad v_2' = \frac{v_1 - v_1'}{n},$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + nv_2'^2, \quad v_2'^2 = \frac{(v_1 - v_1')^2}{n^2},$$

$$v_2'^2 = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{n} = \frac{(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{n}, \quad \frac{(v_1 - v_1')^2}{n^2} = \frac{(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{n},$$

$$\frac{v_1 - v_1'}{n} = v_1 + v_1', \quad x = \frac{v_1}{v_1'}, \quad \frac{x-1}{n} = x + 1, \quad x = -\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+n}{1-n}, \quad \frac{v_1}{v_1'} = \frac{1+n}{1-n}.$$

Ответ: $\dfrac{v_1}{v_1'} = \dfrac{1+n}{1-n}$.

Задачи для самостоятельного решения

31. Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и далее движется по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным f, определить расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке, до полной остановки.

32. Тело массой $m = 0{,}4$ кг скользит с наклонной плоскости высотой $h = 10$ см и длиной $l = 1$ м. Коэффициент трения тела на всем пути $f = 0{,}04$. Определить: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости; 2) путь, пройденный телом на горизонтальном участке, до остановки.

33. Пренебрегая трением, определить наименьшую высоту h, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом $R = 6$ м, и не оторваться от него в верхней точке петли.

34. Тело брошено под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Используя закон сохранения энергии, определить скорость v тела в высшей точке его траектории.

35. Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$ м и массой $M = 1{,}5$ кг и застревает в нем (рис. 15). Маятник в результате этого отклонился на угол $\varphi = 30^\circ$. Определить скорость пули.

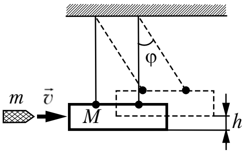


Рис. **15**

36. Сила, действующая на тело в некотором поле консервативных сил, описывается законом $\vec{F} = A(y\vec{i} + x\vec{j})$, где A — некоторая постоянная; $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — соответственно единичные векторы координатных осей X и Y. Определить потенциальную энергию $\Pi(x, y)$ тела в этом поле.

37. Металлический шарик падает вертикально на мраморный пол с высоты $h_1 = 80$ см и отскакивает от него на высоту $h_2 = 72$ см. Определить коэффициент восстановления материала шарика.

38. Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 2$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определить количество теплоты, выделившейся при ударе.

39. Два шара массами $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг подвешены на нитях длиной $l = 1$ м. Первоначально шары сопрокасаются между собой, затем бóльший шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпустили. Считая удар упругим, определить скорость v'_2 второго шара после удара.

ОТВЕТЫ: **31.** $s = h(1 - f\ \mathrm{ctg}\alpha)/f$. **32.** 1) 0,24 Дж; 2) 1,53 м. **33.** $h = \dfrac{5}{2}R$. **34.** $v = v_0 \cos\alpha = 10{,}6$ м/с. **35.** 164 м/с. **36.** $\Pi(x, y) = -Axy + C$, где C — аддитивная постоянная. **37.** $\varepsilon = \sqrt{h_2/h_1} = 0{,}95$. **38.** 3 Дж. **39.** $v'_2 = 2m_1\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}\,/\,(m_1 + m_2) = 3{,}76$ м/с

1.4. Механика твердого тела

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Момент инерции материальной точки
- Момент инерции системы (тела)
- Теорема Штейнера
- Кинетическая энергия тела при его вращении
- Момент силы относительно неподвижной точки
- Момент силы относительно неподвижной оси
- Уравнение динамики вращательного движения твердого тела
- Работа при вращении тела
- Момент импульса относительно неподвижной точки
- Момент импульса относительно неподвижной оси
- Момент импульса твердого тела
- Закон сохранения момента импульса
- Изотропность пространства
- Деформация твердого тела
- Упругая деформация
- Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)
- Пластическая (остаточная) деформация

Основные формулы

Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2$$

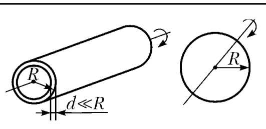
[m — масса точки; r — ее расстояние до оси вращения].

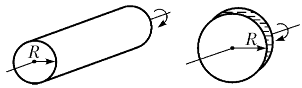
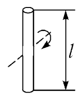
Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

[r_i — расстояние i-й материальной точки массой m_i до оси вращения].

Моменты инерции некоторых однородных тел массы m:

Тело	*Ось вращения*	*Момент инерции J*
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R 	Ось симметрии	mR^2

Тело	*Ось вращения*	*Момент инерции J*
Сплошной цилиндр или диск радиусом R 	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l 	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Шар радиусом R 	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2$$

[J_C — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m — масса тела].

Кинетическая энергия вращения тела

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

[J_z — момент инерции тела относительно оси Z; ω — его угловая скорость].

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

[m — масса тела; v_C — скорость центра масс тела; J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела].

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$$

[$\vec{r}$ — радиус вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы $\vec{F}$].

Модуль вектора момента силы

$$M = F\,l$$

[l — плечо силы].

Момент силы относительно неподвижной оси

$$\vec{M}_z = [\vec{r}\vec{F}]_z$$

Работа при вращении тела

$$\mathrm{d}A = M_z\,\mathrm{d}\varphi$$

[$\mathrm{d}\varphi$ — угол поворота тела; M_z — момент силы относительно неподвижной оси Z].

Момент импульса материальной точки A относительно неподвижной точки O

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}m\vec{v}]$$

[$\vec{p} = m\vec{v}$ — импульс материальной точки; $\vec{L}$ — псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$].

Модуль вектора момента импульса

$$L = rp\sin\alpha = mvr\sin\alpha = pl$$

[α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$; l — плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O].

Момент импульса твердого тела относительно оси вращения

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = J_z\omega$$

[r_i — расстояние от оси Z до отдельной частицы тела; $m_i v_i$ — импульс этой частицы; J_z — момент инерции тела относительно оси Z; ω — его угловая скорость].

Основное уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t},\ M_z = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z\varepsilon$$

[ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции тела относительно оси Z].

Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы

$$\vec{L} = \mathrm{const},\ J_z\omega = \mathrm{const}$$

[J_z — момент инерции тела относительно оси Z; ω — его угловая скорость].

Сопоставление основных величин и уравнений, определяющих вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение:

Поступательное движение		*Вращательное движение*	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Сила	F	Момент силы	M_z или $\vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon$ $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s\, ds$	Работа вращения	$M_z\, d\varphi$
Кинетическая энергия	$T = \dfrac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращения	$T_{вр} = \dfrac{J_z\omega^2}{2}$

Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = F/S$$

[F — растягивающая (сжимающая) сила; S — площадь поперечного сечения].

Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \Delta l/l$$

[Δl — изменение длины тела при растяжении (сжатии); l — длина тела до деформации].

Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d/d$$

[Δd — изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d — диаметр стержня].

Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon$$

[μ — коэффициент Пуассона].

Закон Гука для продольного растяжения (сжатия)

$$\sigma = E\varepsilon$$

[E — модуль Юнга].

Потенциальная энергия упругорастянутого (упругосжатого) стержня

$$\Pi = \frac{E\varepsilon^2}{2}V$$

[E — модуль Юнга; $\varepsilon = \Delta l/l$ — относительное продольное растяжение (сжатие); V — объем тела].

Примеры решения задач

40. Вывести формулу для момента инерции цилиндрической муфты относительно оси, совпадающей с ее осью симетрии (рис. 16). Масса муфты равна m, внутренний радиус r, внешний радиус R.

Дано:
m
r
R

J — ?

Решение:

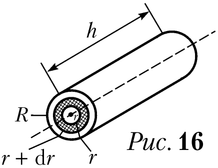


Рис. **16**

$$dJ = r^2 dm,$$

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r h\, dr,$$

$$J = \int_r^R \rho \cdot 2\pi r^3 h\, dr = 2\pi\rho h \int_r^R r^3 dr = 2\pi\rho h \left.\frac{r^4}{4}\right|_r^R = \frac{\pi\rho h}{2}(R^4 - r^4),$$

$$m = m_1 - m_2 = \pi\rho h(R^2 - r^2), \quad J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2).$$

Ответ: $J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$.

41. Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l = 50$ см и массой $m = 360$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей: 1) через конец стержня; 2) через точку, отстоящую от конца стержня на 1/6 его длины (рис. 17).

Дано:
$l = 50$ см $= 0{,}5$ м
$m = 360$ г $= 0{,}36$ кг
$AB = \frac{l}{6}$

1) J_A — ?
2) J_B — ?

Решение:

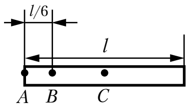


Рис. **17**

$$J = J_C + ma^2,$$

$$J_C = \frac{1}{12}ml^2,$$

$$J_A = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2,$$

$$J_B = \frac{1}{12}ml^2 + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{7}{36}ml^2.$$

Ответ: 1) $J_A = 3 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2; 2) $J_B = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

42. Вентилятор вращается с частотой $n = 600$ об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 50$ оборотов, остановился. Работа A сил торможения равна 31,4 Дж. Определить: 1) момент M сил торможения; 2) момент инерции J вентилятора.

Дано:
$n = 600$ об/мин $= 10$ об/с
$N = 50$
$A = 31{,}4$ Дж

1) M — ?
2) J — ?

Решение:

$$A = M\varphi, \quad \varphi = 2\pi N, \quad \omega_0 = 2\pi n,$$

$$M = \frac{A}{\varphi} = \frac{A}{2\pi N}, \quad M = J\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t}, \quad \varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2},$$

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{2\pi n} = \frac{2N}{n}, \quad J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{MN}{\pi n^2}.$$

Ответ: 1) $M = 0{,}1$ Н · м; 2) $J = 1{,}59 \cdot 10^{-2}$ кг · м^2.

43. К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{тр} = 2$ Н · м. Определить массу m диска, если известно, что его ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2.

Дано:
$R = 0{,}5$ м
$F = 100$ Н
$M_{тр} = 2$ Н · м
$\varepsilon = 16$ рад/с^2

m — ?

Решение:

$$J = \frac{mR^2}{2}, \quad M = FR - M_{тр}, \quad M = J\varepsilon,$$

$$J\varepsilon = FR - M_{тр}, \quad \frac{mR^2}{2}\varepsilon = FR - M_{тр},$$

$$m = \frac{2(FR - M_{тр})}{\varepsilon R^2}.$$

Ответ: $m = 24$ кг.

44. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определить время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что центр масс шарика при скатывании понизился на 30 см (рис. 18).

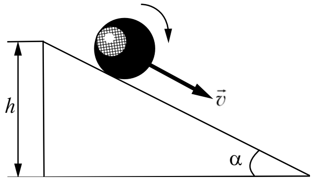


Рис. **18**

Дано:
$\alpha = 30^\circ$
$h = 0{,}3$ м

t — ?

Решение:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad J = \frac{2}{5}mR^2, \quad \omega = \frac{v}{R},$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2}{5}\cdot\frac{v^2}{2R^2}, \quad mgh = \frac{7}{10}mv^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}, \quad l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}, \quad t = \frac{2l}{v}, \quad l = \frac{h}{\sin\alpha},$$

$$t = \frac{2h}{v\sin\alpha} = \sqrt{\frac{7}{10gh}}\frac{2h}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7h}{10g}}.$$

Ответ: $t = 0{,}585$ с.

45. Тело массой $m_1 = 0{,}25$ кг, соединенное невесомой нитью посредством блока (в виде полого тонкостенного цилиндра) с телом массой $m_2 = 0{,}2$ кг, скользит по поверхности горизонтального стола (рис. 19). Масса блока $m = 0{,}15$ кг. Коэффициент трения f тела о поверхность равен 0,2. Пренебрегая трением в подшипниках, определить: 1) ускорение a, с которым будут двигаться эти тела; 2) силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

Дано:
$m_1 = 0{,}25$ кг
$m_2 = 0{,}2$ кг
$m = 0{,}15$ кг
$f = 0{,}2$

1) a — ?
2) T_1 — ?
T_2 — ?

Решение:

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - F_{\text{тр}}, \\ m_2 a = m_2 g - T_2, \\ (T_2 - T_1)R = J\varepsilon, \end{cases}$$

$$F_{\text{тр}} = fN = fm_1 g, \quad J = mR^2,$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \quad (T_2 - T_1)R = \frac{mR^2 a}{R},$$

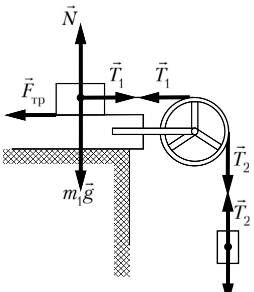


Рис. **19**

$m_2 g - T_2 = m_2 a,$
$T_1 - f m_1 g = m_1 a,$

$$T_2 - T_1 = ma, \quad a = \frac{g(m_2 - f m_1)}{m_1 + m_2 + m},$$
$$T_2 = m_2(g - a), \quad T_1 = T_2 - ma.$$

Ответ: 1) $a = 2{,}45$ м/с^2; 2) $T_1 = 1{,}1$ Н; $T_2 = 1{,}47$ Н.

46. Платформа, имеющая форму однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы (рис. 20). Определить, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы.

Дано:
$m_1 = m/3$
$r_1 = R/2$

ω_2/ω_1 — ?

Решение:

$$L = \text{const}, \quad L = J\omega,$$
$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2},$$
$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}R^2 = \frac{5}{6}mR^2,$$

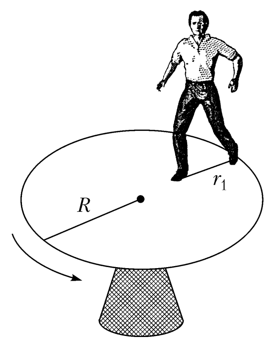


Рис. **20**

$$J_2 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mR^2,$$
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5mR^2 \cdot 12}{6 \cdot 7mR^2} = \frac{10}{7} = 1{,}43.$$

Ответ: $\omega_2/\omega_1 = 1{,}43$.

47. Медная проволока, длина которой $l = 80$ см и площадь поперечного сечения $S = 8$ мм^2, закреплена одним концом в подвесном устройстве, а к ее другому концу прикреплен груз массой $m = 400$ г. Вытянутую проволоку с грузом, отклонив до высоты подвеса, отпускают. Считая проволоку невесомой, определить ее удлинение в нижней точке траектории движения груза. Модуль Юнга для меди $E = 118$ ГПа.

Дано:
$l = 80$ см $= 0{,}8$ м
$S = 8$ мм$^2 = 8 \cdot 10^{-6}$ м^2
$m = 400$ г $= 0{,}4$ кг
$E = 118$ ГПа $= 1{,}18 \cdot 10^{11}$ Па

Δl — ?

Решение:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \Delta l = \frac{El}{ES},$$

$$F = mg + \frac{mv^2}{l + \Delta l}, \quad \frac{mv^2}{2} = mg(l + \Delta l),$$

$$mv^2 = 2mg(l + \Delta l),$$

$$F = mg + \frac{2mg(l + \Delta l)}{l + \Delta l} = 3mg, \quad \Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{3mgl}{ES}.$$

Ответ: $\Delta l = 9{,}98 \cdot 10^{-4}$ м.

48. Определить относительное удлинение алюминиевого стержня, если на его растяжение затрачена работа $A = 6{,}9$ Дж. Длина стержня $l = 1$ м, площадь поперечного сечения $S = 1$ мм^2, модуль Юнга для алюминия $E = 69$ ГПа.

Дано:
$A = 6{,}9$ Дж
$l = 1$ м
$S = 1$ мм$^2 = 10^{-6}$ м^2
$E = 69$ ГПа $= 69 \cdot 10^9$ Па

ε — ?

Решение:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad A = \Pi = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2,$$

$$A = \frac{1}{2}ESl\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}ESl\varepsilon^2, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2A}{ESl}}.$$

Ответ: $\varepsilon = 0{,}014$.

Задачи для самостоятельного решения

49. Шар и сплошной цилиндр одинаковой массы, изготовленные из одного и того же материала, катятся без скольжения с одинаковой скоростью.Определить, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра.

50. Шар радиусом $R = 10$ см и массой $m = 5$ кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ ($B = 2$ рад/с^2, $C = -0{,}5$ рад/с^3). Определить момент сил M для $t = 3$ с.

51. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 5$ см и массой $M = 10$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 1$ кг. Определить: 1) зависимость $s(t)$, согласно которой движется груз; 2) силу натяжения нити T; 3) зависимость $\varphi(t)$, согласно которой вращается вал; 4) угловую скорость ω вала через $t = 1$ с после начала движения; 5) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения точек, находящихся на поверхности вала.

52. Колесо радиусом $R = 30$ см и массой $m = 3$ кг скатывается по наклонной плоскости длиной $l = 5$ м. Угол плоскости наклона $\alpha = 25°$. Определить момент инерции колеса, если его скорость v в конце движения составляла 4,6 м/с.

53. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}15$ кг · м^2, намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота h груза над полом составляла 2,3 м. Определить: 1) время опускания груза до пола; 2) силу натяжения нити; 3) кинетическую энергию груза в момент удара о пол.

54. Человек, стоящий на скамье Жуковского, держит в руках стержень длиной $l = 2{,}5$ м и массой $m = 8$ кг, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Эта система (скамья и человек) обладает моментом инерции $J = 10$ кг · м^2 и вращается с частотой $n_1 = 12$ мин$^{-1}$. Определить частоту n_2 вращения системы, если стержень повернуть в горизонтальное положение.

55. Маховик начинает вращаться из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}4$ рад/с^2. Определить кинетическую энергию T маховика через время $t_2 = 25$ с после начала движения, если через $t_1 = 10$ с после начала движения момент импульса L_1 маховика составлял 60 кг · м^2/с.

56. Медная проволока сечением $S = 8$ мм^2 под действием растягивающей силы удлинилась на столько, на сколько она удлиняется при нагревании на 30 К. Принимая для меди модуль Юнга $E = 118$ ГПа и коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, определить числовое значение этой силы.

ОТВЕТЫ: **49.** В 1,07 раза. **50.** –0,1 Н · м. **51.** 1) $s = 0{,}82t^2$; 2) $T = 8{,}2$ Н; 3) $\varphi = 16{,}4t^2$; 4) $\omega = 32{,}8$ рад/с; 5) $a_\tau = 1{,}64$ м/с^2; $a_n = 53{,}8$ м/с^2. **52.** 0,259 кг · м^2. **53.** 1) 2 с; 2) 4,31 Н; 3) 1,32 Дж. **54.** 8,5 мин$^{-1}$. **55.** $T = L_1 \varepsilon t_2^2 / (2t_1) = 750$ Дж. **56.** 481 Н.

1.5. Тяготение. Элементы теории поля

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Закон всемирного тяготения
- Сила тяжести
- Обобщенный закон Галилея
- Вес тела
- Невесомость
- Поле тяготения
- Однородное поле тяготения
- Центральное поле тяготения
- Линии напряженности поля тяготения
- Работа в поле тяготения
- Потенциал поля тяготения
- Эквипотенциальная поверхность
- Космическая скорость
- Напряженность поля тяготения
- Неинерциальная система отсчета
- Сила инерции
- Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета
- Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (принцип эквивалентности Эйнштейна)

Основные формулы

Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

[F — сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух материальных точек массами m_1 и m_2; r — расстояние между точками; G — гравитационная постоянная].

Сила тяжести

$$P = mg$$

[m — масса тела; g — ускорение свободного падения].

Напряженность поля тяготения

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

[F — сила тяготения, действующая на материальную точку массой m, помещенную в данную точку поля].

Работа в поле тяготения по перемещению тела

$$A = m\left(\frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1}\right)$$

[m — масса тела; G — гравитационная постоянная; M — масса Земли (планеты); R_1 и R_2 — расстояния, определяющие начальное и конечное положения тел].

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

[G — гравитационная постоянная].

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{\Pi}{m}$$

[П — потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля].

Потенциал поля тяготения, создаваемый телом массой M,

$$\varphi = -\frac{GM}{R}$$

[R — расстояние от тела до рассматриваемой точки].

Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\vec{g} = -\mathrm{grad}\varphi \text{ или } \vec{g} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

[$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$ — градиент скаляра φ. Знак минус в формуле показывает, что вектор напряженности $\vec{g}$ направлен в сторону убывания потенциала].

Первая космическая скорость

$$v_1 = \sqrt{gR_З} = 7{,}9 \text{ км/с}$$

[g — ускорение свободного падения; $R_З$ — радиус Земли].

Вторая космическая скорость

$$v_2 = \sqrt{2gR_З} = 11{,}2 \text{ км/с}$$

[g — ускорение свободного падения; $R_З$ — радиус Земли].

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}}$$

[$\vec{a}$ и $\vec{a}'$ — соответственно ускорение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета; $\vec{F}_{\text{ин}}$ — силы инерции].

Силы инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{и}} + \vec{F}_{\text{ц}} + \vec{F}_{\text{к}}$$

[$\vec{F}_{\text{и}}$ — силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением a_0 : $F_{\text{и}} = -ma_0$; $\vec{F}_{\text{ц}}$ — центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $\vec{F}_{\text{ц}} = -m\omega^2 R$; $\vec{F}_{\text{к}}$ — кориолисова сила инерции (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью v' во вращающейся системе отсчета): $\vec{F}_{\text{к}} = 2m[\vec{v}'\omega\ ]$].

Примеры решения задач

57. На какой высоте h ускорение свободного падения вдвое меньше его значения на поверхности Земли?

Дано:
$g' = g/2$
$R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м

h — ?

Решение:

$$mg = G\frac{mM}{R^2}, \quad mg' = G\frac{mM}{(R_З + h)^2},$$

$$\frac{g}{g'} = \frac{(R_З + h)^2}{R_З^2}, \quad \frac{g}{g'} = 2, \quad (R + r)^2 = 2R^2,$$

$$h^2 + 2Rh - R^2 = 0, \quad h = R_З(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: $h = 2{,}64$ Мм.

58. На экваторе некоторой планеты (плотность вещества планеты $\rho = 3$ г/см^3) тела весят в два раза меньше, чем на полюсе. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси.

Дано:
$\rho = 3\ \text{г/см}^3 = 3 \cdot 10^8\ \text{кг/м}^3$
$P_э = \frac{1}{2}P_п$

T — ?

Решение:

$$P_п = mg, \quad P_э = mg - \frac{mv^2}{R},$$

$$mg = G\frac{mM}{R^2}, \quad M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho GR, \quad v = \frac{2\pi R}{T},$$

$$mg = 2\left(mg - \frac{mv^2}{R}\right), \quad \frac{1}{2}mg = \frac{mv^2}{R}, \quad g = \frac{2v^2}{R}, \quad g = \frac{2\cdot 4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{8\pi^2 R}{T^2},$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho GR = \frac{8\pi^2 R}{T^2}, \quad T^2 = \frac{8\pi^2 R\cdot 3}{4\pi\rho GR} = \frac{6\pi}{\rho G}, \quad T = \sqrt{\frac{6\pi}{\rho G}}.$$

Ответ: $T = 2{,}7$ ч.

59. Для тела массой m, находящегося в гравитационном поле Земли над ее поверхностью, вывести зависимость потенциальной энергии тела от расстояния до центра Земли. Считать известными радиус Земли $R_З$ и ускорение свободного падения g на поверхности Земли.

Дано:
m
$R_З$
g

$\Pi(R)$ — ?

Решение:

$$\Pi = \int_{\infty}^{R} F\mathrm{d}r, \quad F = G\frac{mM}{r^2},$$

$$\Pi = GmM\int_{\infty}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GmM\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{R} = -G\frac{mM}{R},$$

$$mg = G\frac{mM}{R_З^2}, \quad GmM = mgR_З^2, \quad \Pi = -\frac{mgR_З^2}{R}.$$

Ответ: $\Pi(R) = -\dfrac{mgR_З^2}{R}$.

60. Спутник поднимают на высоту $h = 6370$ км и запускают его по круговой орбите на той же высоте. Определить отношение работы, совершаемой при подъеме спутника (A_1), к работе, совершаемой при его запуске (A_2).

Дано:
$h = 6370$ км $= 6{,}37\cdot 10^6$ м
$R_З = 6{,}37\cdot 10^6$ м
$R = R_З + h$

A_1/A_2 — ?

Решение:

$$A_1 = \Delta\Pi = -G\frac{mM}{R_З + h} - \left(-G\frac{mM}{R_З}\right) =$$

$$= GmM\left(\frac{1}{R_З} - \frac{1}{R_З + h}\right) = \frac{GmMh}{R_З(R_З + h)},$$

$$A_2 = \frac{mv^2}{2}, \quad \frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2},$$

$$A_2 = \frac{GmM}{2R} = \frac{GmM}{2(R_З + h)}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{h \cdot 2(R_З + h)}{R_З(R_З + h)} = \frac{2h}{R_З}.$$

Ответ: $A_1/A_2 = 2$.

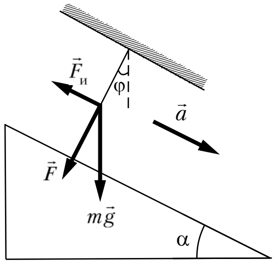


Рис. **21**

61. Вагон под действием силы тяжести катится вдоль дороги, составляющей угол α с горизонтом. Сила трения составляет η = 10% от веса вагона. К потолку вагона подвешен шарик массой m = 15 г. Определить: 1) силу F, действующую на нить; 2) угол φ отклонения нити от вертикали (рис. 21).

Дано:
$\alpha = 30°$
$\eta = 10\%$
$m = 15$ г $= 15 \cdot 10^{-3}$ кг

1) F — ?
2) φ — ?

Решение:

$$\vec{F} = \vec{F}_и + m\vec{g}, \quad \vec{F}_и = -m\vec{a},$$

$$Ma = Mg\sin\alpha - F_{тр}, \quad F_{тр} = \eta Mg,$$

$$Ma = Mg\sin\alpha - \eta Mg, \quad a = g(\sin\alpha - \eta),$$

$$F = \sqrt{F_и^2 + (mg)^2 - 2F_и mg\cos(90° - \alpha)},$$

$$F = \sqrt{\left[mg(\sin\alpha - \eta)\right]^2 + (mg)^2 - 2(mg)^2(\sin\alpha - \eta)\cos(90° - \alpha)} =$$

$$= mg\sqrt{(\sin\alpha - \eta)^2 + 1 - 2(\sin\alpha - \eta)\sin\alpha}, \quad \frac{F_и}{\sin\varphi} = \frac{F}{\sin(90° - \alpha)},$$

$$\sin\varphi = \frac{F_и \sin(90° - \alpha)}{F}, \quad \varphi = \arcsin\frac{mg(\sin\alpha - \eta)\cos\alpha}{F}.$$

Ответ: 1) $F = 0{,}128$ Н; 2) $\varphi = 23{,}5°$.

62. Тело массой $m = 1$ кг, падая свободно в течение $t = 4$ с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 45°$. Учитывая вращение Земли, определить и нарисовать все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю.

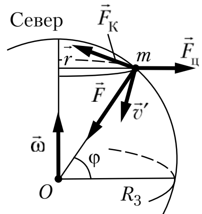


Рис. **22**

Дано:
$m = 1$ кг
$t = 4$ с
$\varphi = 45°$
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)
$R_З = 6{,}37 \cdot 10^6$ м
$M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг

F — ?

Решение:

1) $\vec{F}_т = G\dfrac{mM_З}{R_З^3}\vec{R}_З, \quad F_т = G\dfrac{mM_З}{R_З^2}.$

2) $\vec{F}_ц = -m\omega^2\vec{r}, \quad F_ц = m\omega^2 r, \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T},$

$$r = R_З\cos\varphi, \quad F_ц = \frac{m \cdot 4\pi^2 R_З\cos\varphi}{T^2}.$$

3) $\vec{F}_К = 2m\left[\vec{v}'\vec{\omega}'\right], \quad F_К = 2mv'\omega\sin(\vec{v}', \vec{\omega}'),$

$$v' = gt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \sin(\vec{v}', \omega) = \cos\varphi,$$

$$F_К = 2mv'\frac{2\pi}{T}\cos\varphi = \frac{4m\pi gt\cos\varphi}{T}.$$

Ответ: $F = 9{,}83$ Н; $F_ц = 23{,}8$ мН; $F_К = 4{,}04$ мН.

Задачи для самостоятельного решения

63. Считая плотность Земли постоянной, определить глубину, на которой ускорение свободного падения составляет 25% от ускорения свободного падения на поверхности Земли.

64. Определить, в какой точке (считается от Земли) на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, напряженность поля тяготения равна нулю. Расстояние между центрами Земли и Луны равно R, масса Земли в 81 раз больше массы Луны.

65. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концу которой прикреплены грузы массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг. Вся система находится в лифте, поднимающемся с ускорением $a_0 = 2{,}1$ м/с^2, направленным вверх. Считая нить и блок невесомыми, определить силу давления блока на ось.

66. Самолет, летящий со скоростью $v = 360$ км/ч, описывает вертикальную петлю Нестерова радиусом $R = 360$ м. Определить силу, прижимающую летчика ($m = 80$ кг) к сиденью: 1) в нижней точке этой петли; 2) в верхней точке этой петли.

67. Мотоциклист в цирке едет вдоль внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом $r = 15$ м. Центр масс мотоцикла с человеком отстоит $h = 1$ м от места соприкосновения колес с поверхностью цилиндра. Коэффициент трения шин о стенки $f = 0{,}5$. Определить: 1) минимальную скорость $v_{\text{мин}}$, с которой должен ехать мотоциклист; 2) угол α наклона мотоциклиста к горизонтальной поверхности при данной минимальной скорости.

ОТВЕТЫ: **63.** $h = 0{,}75\, R_3$. **64.** $0{,}9\, R$. **65.** $F = \dfrac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a_0) = 19\,\text{Н}$. **66.** 1) 3 кН; 2) 1,44 кН. **67.** 1) 17,1 м/с; 2) 26°34′.

1.6. Элементы механики жидкостей

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Несжимаемая жидкость
- Давление жидкости
- Гидростатическое давление
- Закон Паскаля
- Закон Архимеда
- Течение
- Поток
- Линии тока
- Трубка тока
- Уравнение неразрывности
- Установившееся (стационарное) течение
- Уравнение Бернулли
- Вязкость (внутреннее трение)
- Ламинарное (слоистое) течение
- Турбулентное (вихревое) течение

Основные формулы

Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h$$

[ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения].

Закон Архимеда

$$F_{\text{A}} = \rho g V$$

[F_{A} — выталкивающая сила; V — объем жидкости, вытесненной телом].

Уравнение неразрывности

$$Sv = \text{const}$$

[S — площадь поперечного сечения трубки тока; v — скорость жидкости].

Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости — выражение закона сохранения механической энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}$$

[p — статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; v — скорость жидкости для этого же сечения; $\frac{\rho v^2}{2}$ — динамическое давление жидкости для этого же сечения; h — высота, на которой расположено сечение; ρgh — гидростатическое давление].

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$$

[$\frac{\rho v^2}{2} + p$ — полное давление].

Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде:

$$v = \sqrt{2gh}$$

[h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде].

Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta\left|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right|S$$

[η — динамическая вязкость жидкости; $\Delta v/\Delta x$ — градиент скорости; S — площадь соприкасающихся слоев].

Постоянная (число) Рейнольдса, определяющая характер движения жидкости,

$$\text{Re} = \rho\langle v\rangle\frac{d}{\eta}$$

[ρ — плотность жидкости; $\langle v\rangle$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости; d — характерный линейный размер, например диаметр трубы; η — динамическая вязкость].

Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик:

$$F = 6\pi\eta rv$$

[r — радиус шарика; v — его скорость; η — динамическая вязкость].

Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l:

$$\eta = \frac{\pi R^4 t\Delta p}{8Vl}$$

[R — радиус трубки; Δp — разность давлений на концах трубки; V — объем вытекающей жидкости].

Лобовое сопротивление

$$R_x = C_x\rho v^2\frac{S}{2}$$

[C_x — безразмерный коэффициент сопротивления; ρ — плотность среды; v — скорость движения тела; S — площадь наибольшего поперечного сечения тела].

Подъемная сила

$$R_y = C_y \rho v^2 \frac{S}{2}$$

[C_y — безразмерный коэффициент подъемной силы; ρ — плотность среды; v — скорость движения тела; S — площадь наибольшего поперечного сечения тела].

Примеры решения задач

68. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (рис. 23). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить ее массовый расход (массу воды, протекающей через сечение за единицу времени), если разность уровней в манометрических трубках $\Delta h = 8$ см, а сечения трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны $S_1 = 6$ см^2 и $S_2 = 12$ см^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

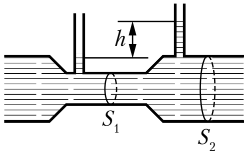


Рис. **23**

Дано:
$\Delta h = 8$ см $= 0{,}08$ м
$S_1 = 6$ см$^2 = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2
$S_2 = 12$ см$^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2
$\rho = 1$ г/см$^3 = 10^3$ кг/м^3

Q — ?

Решение:

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho v_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho v_2 S_2,$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad h_1 = h_2,$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad p_2 - p_1 = \rho g \Delta h,$$

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}, \quad Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

Ответ: $Q = 0{,}868$ кг/с.

69. Пренебрегая вязкостью жидкости, определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием составляет 1,5 м (рис. 24).

Дано:
$h = 1{,}5$ м

v_2 — ?

Решение:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2,$$

$$S_1 >> S_2, \quad v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

$$v_1 << v_2, \quad \frac{\rho v_1^2}{2} << \frac{\rho v_2^2}{2},$$

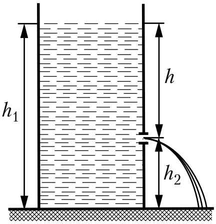


Рис. **24**

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2, \quad v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh, \quad v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Ответ: $v_2 = 5{,}42$ м/с.

70. Свинцовые дробинки ($\rho = 11{,}3$ г/см^3), диаметр которых 4 мм и 2 мм, одновременно опускают в широкий сосуд глубиной $h = 1{,}5$ м с глицерином ($\rho' = 1{,}26$ г/см^3) (рис. 25). Динамическая вязкость глицерина $\eta = 1{,}48$ Па · с. Определить, на сколько больше времени потребуется дробинкам меньшего размера, чтобы достичь дна сосуда.

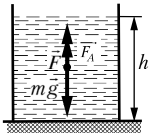


Рис. **25**

Дано:
$\rho = 11{,}3$ г/см^3 $= 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3
$d_1 = 4$ мм $= 4 \cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м
$h = 1{,}5$ м
$\rho' = 1{,}26$ г/см^3 $= 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3
$\eta = 1{,}48$ Па · с

Δt — ?

Решение:

$$v \approx \text{const}, \quad \Delta t = t_2 - t_1, \quad t = \frac{h}{v}, \quad r = \frac{d}{2},$$

$$mg = F_A + F,$$

$$mg = \rho g V = \frac{4}{3}\rho g \pi r^3,$$

$$F_A = \rho' g V = \frac{4}{3}\rho' \pi r^3, \quad F = 6\pi\eta r v,$$

$$\frac{4}{3}\rho g \pi r^3 = \frac{4}{3}\rho' g \pi r^3 + 6\pi\eta r v,$$

$$v = \frac{2gr^2(\rho - \rho')}{9\eta} = \frac{gd^2(\rho - \rho')}{18\eta}, \quad v_1 = \frac{gd_1^2(\rho - \rho')}{18\eta}, \quad v_2 = \frac{gd_2^2(\rho - \rho')}{18\eta},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{h}{v_2} - \frac{h}{v_1} = h\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{18h\eta}{g(\rho - \rho')}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right).$$

Ответ: $\Delta t = 76{,}1$ с.

71. В боковую поверхность цилиндрического сосуда диаметром D вставлен капилляр внутренним диаметром d и длиной l (рис. 26). В сосуд налита жидкость с динамической вязкостью η. Определить зависимость скорости v понижения уровня жидкости в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром.

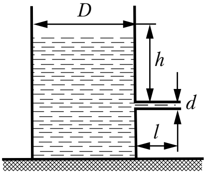


Рис. **26**

Дано:
D
d
l
η
h

$v\,(h)$ — ?

Решение:

$$V=\frac{\pi r^4 t\Delta p}{8nl},\quad \Delta p=\rho g h,\quad r=\frac{d}{2},\quad R=\frac{D}{2},\quad S_1=\pi r^2,$$

$$S=\pi R^2,\quad V=S_1 v_1 t=\pi r^2 v_1 t,\quad \frac{\pi r^4 \rho g h t}{8\eta l}=\pi r^2 v_1 t,$$

$$v_1=\frac{r^2\rho g h}{8\eta l},\quad v_1 S_1=vS,\quad v=v_1\frac{S_1}{S},\quad \frac{S_1}{S}=\frac{d^2}{D^2},$$

$$v=\frac{d^2\rho g h\cdot d^2}{4\cdot 8\eta l\cdot D^2}=\frac{\rho g h d^4}{32\eta l D^2}.$$

Ответ: $v(h)=\dfrac{\rho g d^4}{32\eta l D^2}h.$

72. Парашют ($m_1 = 32$ кг) пилота ($m_2 = 65$ кг) в раскрытом состоянии имеет форму полусферы диаметром $d = 12$ м, обладая коэффициентом сопротивления $C_x = 1{,}3$. Определить максимальную скорость, развиваемую пилотом, при плотности воздуха 1,29 кг/м^3.

Дано:
$m_1 = 32$ кг
$m_2 = 65$ кг
$d = 12$ м
$C_x = 1{,}3$
$\rho = 1{,}29$ кг/м^3

$v_{\max}$ — ?

Решение:

$$(m_1+m_2)g=R_x+F_A,\quad R_x=C_x\frac{\rho v^2}{2}S,$$

$$F_A \ll (m_1+m_2)g,\quad C_x\frac{\rho v_{\max}^2}{2}\frac{\pi d^2}{4}=(m_1+m_2)g,$$

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{8(m_1+m_2)g}{C_x\pi d^2\rho}}.$$

Ответ: $v_{\max} = 3{,}17$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

73. По горизонтальной трубе переменного сечения (рис. 27) течет вода. Площади поперечных сечений трубы на разных ее участках соответственно равны $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2. Разность уровней Δh воды в вертикальных трубках одинакового сечения составляет 20 см. Определить объем воды, проходящей за 1 с сквозь сечение трубы.

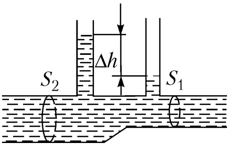


Рис. **27**

74. Стальной шарик ($\rho_1 = 9$ г/см^3) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином ($\rho_2 = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па · с). Считая, что при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} < 0{,}5$ выполняется закон Стокса, определить предельный диаметр шарика.

ОТВЕТЫ: **73.** $V = v_1 t S_1 = S_1 t \sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{1 - S_1^2 / S_2^2}} = 2{,}29 \cdot 10^3$ см^3.

74. $d_{\max} = \dfrac{\eta \,\mathrm{Re}_{\text{кр}}}{\rho_2 v} = \sqrt[3]{\dfrac{18\eta^2\,\mathrm{Re}_{\text{кр}}}{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2 g}} = 5{,}91$ мм.

1.7. Элементы специальной (частной) теории относительности

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Постулаты специальной теории относительности
- Преобразования Лоренца
- Относительность одновременности
- Длительность событий в разных системах отсчета
- Длина тел в разных системах отсчета
- Релятивистский закон сложения скоростей
- Интервал между событиями
- Основной закон релятивистской динамики
- Релятивистский импульс частицы
- Закон сохранения релятивистского импульса
- Полная и кинетическая энергия релятивистской частицы
- Закон сохранения энергии в релятивистской механике
- Энергия покоя

Основные формулы

Преобразования Лоренца

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - (vx)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

[система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси X системы отсчета K, причем оси X' и X совпадают, а оси Y' и Y, Z' и Z параллельны; c — скорость распространения света в вакууме].

Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

[τ — промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами; τ' — промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами].

Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

[l_0 — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l — длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v].

Релятивистский закон сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x / c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - vu_x / c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - vu_x / c^2}.$$

Система отсчета K' движется со скоростью v в положительном направлении оси X системы отсчета K, причем оси X' и X совпадают, оси Y' и Y, Z и Z' параллельны:

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}.$$

Интервал между событиями

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$$

[t_{12} — промежуток времени между событиями 1 и 2; l_{12} — расстояние между точками, где произошли события].

Релятивистский импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

[m — масса частицы; v — скорость частицы].

Основной закон релятивистской динамики

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

[$\vec{p}$ — релятивистский импульс частицы].

Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2$$

[m — масса частицы; c — скорость распространения света в вакууме].

Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

[m — масса частицы; v — ее скорость].

Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2, \quad pc = \sqrt{T(T+2mc^2)}$$

[m — масса частицы; E — полная энергия; T — кинетическая энергия; p — релятивистский импульс].

Примеры решения задач

75. Две нестабильные частицы движутся в системе отсчета K в одном направлении вдоль одной прямой с одинаковой скоростью $v = 0{,}6c$. Расстояние между частицами в системе K равно 64 м. Обе частицы распались одновременно в системе K', которая связана с ними. Определить промежуток времени между распадом частиц в системе K.

Дано:
$\Delta x = 64$ м
$\Delta t = 0$
$v = 0{,}6\,c$

$\Delta t'$ — ?

Решение:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - vx/c^2 - (t_1 - vx/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{(t_2 - t_1) + v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v\Delta x}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Ответ: $\Delta t' = 0{,}16$ мкс.

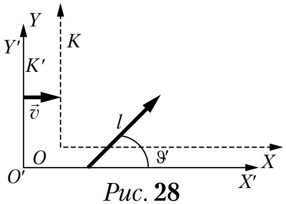


Рис. **28**

76. В системе K' покоится стержень (собственная длина $l_0 = 1{,}5$ м), ориентированный под углом $\vartheta' = 30°$ к оси $O'X'$ (рис. 28). Система K' движется относительно системы K со скоростью $v = 0{,}6c$. Определить в системе K: 1) длину l стержня; 2) соответствующий угол ϑ.

Дано:
$l_0 = 1{,}5$ м
$\vartheta' = 30°$
$v = 0{,}6c$

1) l — ?
2) ϑ — ?

Решение:

$$l_{0x} = l_0\cos\vartheta', \quad l_{0y} = l_0\sin\vartheta', \quad l_x = l_{0x}\sqrt{1-v^2/c^2},$$

$$l_y = l_{0y}, \quad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2},$$

$$l = \sqrt{l_0^2(\cos\vartheta')^2(1-v^2/c^2) + l_0^2(\sin\vartheta')^2},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{l_y}{l_x}=\frac{l_{0y}}{l_{0x}\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\operatorname{tg}\vartheta'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Ответ: 1) $l=1{,}28$ м;
2) $\vartheta=35{,}8°$.

77. Ионизированный атом, вылетев из ускорителя со скоростью $0{,}8c$, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя.

Дано:
$u'=0{,}8c$

u — ?

Решение:

$$u=\frac{u'+v}{1+u'v/c^2},\quad v=c,\quad u=\frac{0{,}8c+c}{1+0{,}8c\cdot c^2}=c.$$

Ответ: $u=c$.

78. Кинетическая энергия частицы оказалась равной ее энергии покоя. Определить скорость частицы.

Дано:
$E_0=mc^2$
$T=E_0$

v — ?

Решение:

$$T=E-E_0,\quad E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad T=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right),$$

$$T=E_0=mc^2,\quad 1=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2,\quad 1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{4},\quad \frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4},\quad v=c\sqrt{\frac{3}{4}}=0{,}866c.$$

Ответ: $v=260$ Мм/с.

79. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза.

Дано:
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$l = l_0/2$

U — ?

Решение:

$$T = eU, \quad l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad l = l_0 / 2,$$

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2}, \quad T = m_e c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right),$$

$$U = \frac{T}{e} = \frac{m_e c^2}{e}(2 - 1) = \frac{m_e c^2}{e}.$$

Ответ: $U = 512$ кВ.

Задача для самостоятельного решения

80. Определить, во сколько раз увеличивается время жизни нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она начинает двигаться со скоростью, равной $0{,}9c$.

Ответ: в 2,29 раза.

Раздел II

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Идеальный газ
- Термодинамическая температура
- Изотермический процесс
- Закон Бойля — Мариотта
- Изобарный процесс
- Изохорный процесс
- Закон Гей-Люссака
- Закон Дальтона
- Парциальное давление
- Молярный объем
- Молярная газовая постоянная
- Молярная масса
- Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)
- Количество вещества
- Постоянная Авогадро
- Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа
- Средняя квадратичная скорость молекул
- Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения
- Наиболее вероятная скорость молекул
- Средняя арифметическая скорость молекул
- Барометрическая формула
- Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле
- Среднее число столкновений молекул
- Средняя длина свободного пробега молекул
- Явления переноса
- Теплопроводность
- Закон теплопроводности Фурье
- Диффузия
- Закон диффузии Фи́ка
- Внутреннее трение (вязкость)
- Закон Ньютона для внутреннего трения

Основные формулы

Закон Бойля — Мариотта

$$pV = \text{const} \quad (T = \text{const},\ m = \text{const})$$

[p — давление газа; V — объем газа; T — термодинамическая температура; m — масса газа].

Закон Гей-Люссака

$$V = V_0(1+\alpha t) \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \ (p = \text{const},\ m = \text{const});$$

$$p = p_0(1+\alpha t) \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \ (V = \text{const},\ m = \text{const})$$

[t — температура газа по шкале Цельсия; V_0 и p_0 — соответственно объем и давление при 0 °C; коэффициент $\alpha = \frac{1}{273} K^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям газа].

Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

[p_i — парциальное давление i-го компонента смеси].

Молярная масса

$$M = m_0 N_A$$

[m_0 — масса молекулы; N_A — постоянная Авогадро].

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)

$$pV_\text{m} = RT \text{ (для 1 моль газа)},$$

$$pV = \frac{m}{M} RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[V_m — молярный объем; R — молярная газовая постоянная; M — молярная масса газа; m — масса газа; $m/M = \nu$ — количество вещества].

Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры T

$$p = nkT$$

[$k = R/N_A$ — постоянная Больцмана; N_A — постоянная Авогадро; R — молярная газовая постоянная].

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_\text{кв} \rangle^2$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_\text{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E,$$

или

$$pV = \frac{1}{3}Nm_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2 = \frac{1}{3}m\langle v_{\text{кв}}\rangle^2$$

[$\langle v_{\text{кв}}\rangle$ — средняя квадратичная скорость молекул; E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n — концентрация молекул; m_0 — масса одной молекулы; $m = Nm_0$ — масса газа; N — число молекул в объеме V газа].

Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

[T — термодинамическая температура; m_0 — масса одной молекулы; $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана].

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0\rangle = \frac{m_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

[m_0 — масса молекулы; $\langle v_{\text{кв}}\rangle$ — ее средняя квадратичная скорость; k — постоянная Больцмана].

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N(v)}{N\mathrm{d}v} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_0v^2/(2kT)}$$

[функция $f(v)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $\mathrm{d}N(v)/N$ из общего числа N молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + \mathrm{d}v$].

Наиболее вероятная скорость молекул

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

[m_0 — масса молекулы; M — молярная масса; R — молярная газовая постоянная; $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура].

Средняя (средняя арифметическая) скорость молекул

$$\langle v\rangle = \int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{m_0v^2}{2kT}}\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}N(\varepsilon)}{N\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon(kT)}$$

[функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $\mathrm{d}N(\varepsilon)/N$ из общего числа N молекул, которые имеют кинетическую энергию $\varepsilon = m_0v^2/2$, заключенную в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$].

Барометрическая формула

$$p_h = p_0\mathrm{e}^{-Mg(h-h_0)/(RT)}$$

[p_h и p_0 — давления газа на высоте h и h_0 соответственно; M — молярная масса; g — ускорение свободного падения; R — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура].

Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0\mathrm{e}^{-\Pi/(kT)}$$

[n и n_0 — концентрация молекул на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0gh$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; m_0 — масса одной молекулы].

Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle$$

[d — эффективный диаметр молекулы, n — концентрация молекул; $\langle v\rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l\rangle = \frac{\langle v\rangle}{\langle z\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

[d — эффективный диаметр молекулы; n — концентрация молекул; $\langle z\rangle$ — среднее число столкновений молекулы за 1 с; $\langle v\rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

Закон теплопроводности Фурье

$$j_E = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

[j_E — плотность теплового потока; λ — теплопроводность (коэффициент теплопроводности); $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры].

Теплопроводность

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$$

[c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега молекул].

Закон диффузии Фи́ка

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}$$

[j_m — плотность потока массы; D — диффузия (коэффициент диффузии); $\frac{d\rho}{dx}$ — градиент плотности].

Диффузия (коэффициент диффузии)

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$$

[$\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул].

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$$

[j_p — плотность потока импульса; η — динамическая вязкость; $\frac{dv}{dx}$ — градиент скорости].

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$$

[ρ — плотность газа; $\langle v \rangle$ — средняя арифметическая скорость молекул; $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега].

Связь между коэффициентами теплопроводности (λ), диффузии (D) и динамической вязкостью η

$$\eta = \rho D, \quad \frac{\lambda}{\eta c_V} = 1$$

[ρ — плотность газа; c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме].

Примеры решения задач

81. Определить плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К и при давлении 0,1 МПа. Газы считать идеальными.

Дано:
$m_1 = 8 \text{ г} = 8 \cdot 10^{-3}$ кг
$M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$m_2 = 64 \text{ г} = 64 \cdot 10^{-3}$ кг
$M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T = 290$ К
$p = 0{,}1 \text{ МПа} = 10^5$ Па
$R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)

ρ — ?

Решение:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad m = m_1 + m_2,$$

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT, \quad V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p},$$

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT}.$$

Ответ: $\rho = 0{,}498$ кг/м^3.

82. В сосуде вместимостью 1 л находится кислород массой 1 г. Определить концентрацию молекул кислорода в сосуде.

Дано:
$V = 1 \text{ л} = 10^{-3}$ м^3
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$m = 1 \text{ г} = 10^{-3}$ кг

n — ?

Решение:

$$p = nkT, \quad n = \frac{p}{kT}, \quad pV = \frac{m}{M}RT,$$

$$\frac{p}{T} = \frac{mR}{MV}, \quad n = \frac{mR}{MkV}.$$

Ответ: $n = 1{,}88 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

83. Определить среднюю арифметическую скорость молекул идеального газа, плотность которого при давлении 35 кПа составляет 0,3 кг/м^3.

Дано:
$p = 35 \text{ кПа} = 3{,}5 \cdot 10^4$ Па
$\rho = 0{,}3$ кг/м^3

$\langle v \rangle$ — ?

Решение:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}},$$

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \langle v_{\text{кв}} \rangle,$$

$$p = \frac{m}{V} = \frac{Nm_0}{V} = nm_0, \quad p = \frac{1}{3}\rho \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}}.$$

Ответ: $\langle v \rangle = 545$ м/с.

84. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям u ($u = v/v_{\text{в}}$).

Дано:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

$$u = \frac{v}{v_{\text{в}}}$$

$f(u)$ — ?

Решение:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \quad v = v_{\text{в}} u, \quad dv = v_{\text{в}} du,$$

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv, \quad \frac{dN_u}{N} = f(u)du,$$

$$f(u) = f(v)\frac{dv}{du} = f(v)v_{\text{в}},$$

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_{\text{в}}^2 u^2 e^{\frac{-m_0 v_{\text{в}}^2 u^2}{2kT}} v_{\text{в}} =$$

$$= 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2kT}{m_0} u^2 e^{\frac{-m_0 \cdot 2kTu^2}{2kTm_0}} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}.$$

Ответ: $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}$.

85. На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна 10 °С.

Дано:

$p = 0{,}6\, p_0$

$t = 10$ °С; $T = 283$ К

$M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

h — ?

Решение:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg(h-h_0)}{RT}}, \quad h_0 = 0, \quad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

$$\frac{Mgh}{RT} = -\ln\frac{p}{p_0}, \quad h = -\frac{RT}{Mg}\ln\frac{p}{p_0}.$$

Ответ: $h = 4{,}22$ км.

86. Определить среднюю продолжительность $\langle\tau\rangle$ свободного пробега молекул водорода при температуре 27 °C и давлении 5 кПа. Эффективный диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм.

Дано:
$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$t = 27$ °C, $T = 300$ К
$p = 0{,}5$ кПа $= 5 \cdot 10^2$ Па
$d = 0{,}28$ нм $= 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ м

$\langle\tau\rangle$ — ?

Решение:

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\langle z\rangle}, \quad \langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle,$$

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad p = nkT, \quad n = \frac{p}{kT},$$

$$\langle\tau\rangle = \frac{kT\sqrt{\pi M}}{\sqrt{2}\pi d^2 p\sqrt{8RT}} = \frac{k\sqrt{TM}}{4\sqrt{\pi R}d^2 p}.$$

Ответ: $\langle\tau\rangle = 13{,}3$ нс.

87. Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости η углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать равными.

Дано:
$M_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T_1 = T_2$
$p_1 = p_2$
$d_1 = d_2$

η_1/η_2 — ?

Решение:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle, \quad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad \langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

$$p = nkT, \quad pV = \frac{m}{M}RT, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3}\frac{p_1 M_1}{RT_1}\sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M_1}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi d_1^2 n_1},$$

$$\eta_2 = \frac{1}{3}\frac{p_2 M_2}{RT_2}\sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M_2}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi d_2^2 n_2},$$

$$p_1 = p_2, \quad T_1 = T_2, \quad d_1 = d_2, \quad n_1 = n_2, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}.$$

Ответ: $\eta_1/\eta_2 = 1{,}25$.

88. Определить коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при тех же условиях равен 10 мкПа · с.

Дано:
$\eta = 10$ мкПа · с $= 10^{-5}$ Па · с
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

λ — ?

Решение:

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\langle v\rangle\langle l\rangle, \quad \eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

$$\lambda = c_V\eta, \quad c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}, \quad \lambda = \frac{i}{2}\frac{R}{M}\eta,$$

$i = 5$.

Ответ: $\lambda = 7{,}42$ мВт/(м · К).

Задачи для самостоятельного решения

89. В закрытом сосуде при температуре 300 К и давлении 0,1 МПа находятся 10 г водорода и 16 г гелия. Считая газы идеальными, определить удельный объем смеси.

90. В сосуде вместимостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества v; 2) массу m кислорода; 3) концентрацию n его молекул в сосуде.

91. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с?

92. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найти формулу наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$.

93. Определить отношение давления воздуха на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

94. При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега $\langle l\rangle$ молекул кислорода равна 0,1 мкм. Чему равно среднее число $\langle z\rangle$ столкновений, испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считать постоянной.

95. Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Определить коэффициенты диффузии D и внутреннего трения η. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм.

ОТВЕТЫ: **89.** $v_{\text{см}} = \dfrac{V}{m_1 + m_2} = \dfrac{(m_1/M_1 + m_2/M_2)RT}{(m_1 + m_2)p} = 8{,}63\ \text{м}^3/\text{кг}$.

90. 1) $\nu = 0{,}223$ моль; 2) $m = 6{,}24$ г; 3) $n = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **91.** 381 К. **92.** $v_{\text{в}} = \sqrt{2kT/m_0}$. **93.** 0,778. **94.** $4{,}45 \cdot 10^8$ с$^{-1}$. **95.** $D = 9{,}74 \cdot 10^{-6}$ м^2/с; $\eta = 1{,}13 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с).

2.2. Основы термодинамики

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Термодинамическая система
- Термодинамические параметры
- Термодинамическое равновесие
- Температура
- Температурные шкалы (Цельсия и Кельвина)
- Термодинамический процесс
- Внутренняя энергия термодинамической системы
- Число степеней свободы молекул
- Работа газа при изменении его объема
- Равновесные процессы
- Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул
- Первое начало термодинамики
- Теплоемкость
- Удельная теплоемкость
- Молярная теплоемкость
- Уравнение Майера
- Применение первого начала термодинамики к изопроцессам
- Адиабатный процесс
- Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона)
- Политропный процесс
- Круговой процесс (цикл)
- Прямой цикл
- Обратный цикл
- Обратимый процесс
- КПД для кругового процесса
- Второе начало термодинамики
- Приведенное количество теплоты
- Энтропия
- Неравенство Клаузиуса
- Принцип возрастания энтропии
- Тепловой двигатель
- Цикл Карно

Основные формулы

Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{kT}{2}$$

[k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура].

Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT$$

[$i = i_{пост} + i_{вращ} + 2i_{колеб}$ — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы].

Внутренняя энергия идеального газа

$$U_m = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT \text{ (для 1 моль газа)},$$

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT = \nu\frac{i}{2}RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[i — число степеней свободы; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; N_A — постоянная Авогадро; R — молярная газовая постоянная; m — масса газа; M — молярная масса; $\nu = m/M$ — количество вещества].

Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

[Q — количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU — изменение внутренней энергии системы; A — работа системы против внешних сил].

Первое начало термодинамики для малого изменения системы

$$\delta Q = dU + \delta A$$

[dU — бесконечно малое изменение внутренней энергии; δA — элементарная работа; δQ — бесконечное малое количество теплоты].

Молярная и удельная теплоемкости

$$C_m = \frac{dQ}{\nu\, dT}, \quad c = \frac{dQ}{m\, dT}.$$

Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM$$

[M — молярная масса газа].

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2}R$$

[i — число степеней свободы].

Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

Элементарная работа газа при изменении его объема

$$dA = p\,dV$$

[p — давление].

Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

[V_1 и V_2 — соответственно начальный и конечный объемы газа].

Изменение внутренней энергии идеального газа

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT$$

[m — масса газа; M — его молярная масса, C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме].

Работа газа:

- при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \quad A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$

- при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1}, \quad A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}$$

[$\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i$ —показатель адиабаты; i — число степеней свободы].

Работа газа в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2),$$

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

[T_1, T_2 — начальная и конечная температуры газа; V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа соответственно; γ — показатель адиабаты; m — масса газа; M — его молярная масса; R — молярная газовая постоянная].

Уравнение политропного процесса

$$pV^n = \text{const}$$

$$\left[n = \frac{C - C_p}{C - C_V} \text{ — показатель политропы} \right].$$

Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

[Q_1 — количество теплоты, полученное системой; Q_2 — количество теплоты, отданное системой; A — работа, совершаемая за цикл].

Неравенство Клаузиуса

$$\Delta S \geq 0$$

[$\Delta S > 0$ в необратимых процессах, $\Delta S = 0$ в обратимых процессах].

Изменение энтропии при равновесном переходе системы из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \right).$$

Формула Больцмана

$$S = k \ln W$$

[S — энтропия; k — постоянная Больцмана; W — термодинамическая вероятность состояния].

Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

[T_1 — температура нагревания; T_2 — температура холодильника].

Примеры решения задач

96. Кислород массой $m = 1$ кг находится при температуре $T = 320$ К. Определить: 1) внутреннюю энергию молекул кислорода; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Газ считать идеальным.

Дано:
$m = 1$ кг
$T = 320$ К
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

1) U — ?
2) $\langle E_{\text{вр}} \rangle$ — ?

Решение:

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT, \quad i = 5, \quad \langle E_{\text{вр}} \rangle = \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle N,$$

$$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = i_{\text{вр}} \frac{kT}{2}, \quad N = \frac{mN_A}{M},$$

$$\langle E_{\text{вр}}\rangle = i_{\text{вр}}\frac{kT}{2}\frac{mN_A}{M}, \quad i_{\text{вр}} = 2.$$

Ответ: 1) $U = 208$ кДж; 2) $\langle E_{\text{вр}}\rangle = 83{,}1$ кДж.

97. Азот массой $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $p = 1$ МПа. Определить: 1) работу расширения; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ кДж, а начальная температура азота $T_1 = 290$ К.

Дано:
$m = 280$ г $= 0{,}28$ кг
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$p = \text{const}$
$p = 1$ МПа $= 10^6$ Па
$Q = 5$ кДж $= 5 \cdot 10^3$ Дж
$T_1 = 290$ К

1) A — ?
2) V_2 — ?

Решение:

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1), \quad Q = \frac{m}{M}C_p(T_2 - T_1),$$

$$\frac{A}{Q} = \frac{R}{C_p}, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R, \quad i = 5,$$

$$A = \frac{QR \cdot 2}{(i+2)R} = \frac{2Q}{i+2},$$

$$A = p(V_2 - V_1), \quad pV_1 = \frac{m}{M}RT_1,$$

$$V_2 = \frac{A}{p} + V_1 = \frac{1}{p}\left(A + \frac{m}{M}RT_1\right).$$

Ответ: 1) $A = 1{,}43$ Дж; 2) $V_2 = 0{,}026$ м^3.

98. Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определить количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал (рис. 29): 1) изотермически; 2) изобарно.

Дано:
$A = 2$ кДж $= 2 \cdot 10^3$ Дж
$i = 5$
1) $T = \text{const}$
2) $p = \text{const}$

1) Q_1 — ?
2) Q_2 — ?

Решение:

$$Q_1 = \Delta U + A, \quad T = \text{const},$$

$$\Delta U = 0, \quad Q_1 = A,$$

$$p = \text{const}, \quad A = p\Delta V,$$

$$p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T,$$

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T, \quad \Delta T = \frac{MA}{mR},$$

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R \cdot \frac{MA}{mR} = \frac{iA}{2},$$

$$Q_2 = \Delta U + A = \frac{i}{2} A + A = A\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$

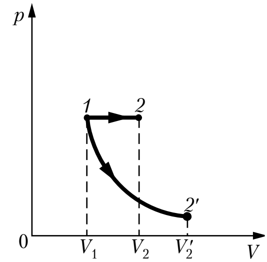


Рис. **29**

Ответ: 1) $Q_1 = 2$ кДж; 2) $Q_2 = 7$ кДж.

99. Идеальный двухатомный газ ($\nu = 3$ моль), занимающий объем $V_1 = 5$ л и находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа, подвергают изохорному нагреванию до $T_2 = 500$ К. После этого газ подвергли изотермическому расширению до начального давления, а затем он в результате изобарного сжатия возвращен в первоначальное состояние. Построить график цикла и определить термодинамический КПД цикла.

Дано:
$\nu = 3$ моль
$i = 5$
$V_1 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$p_1 = 1$ МПа $= 10^6$ Па
$T_2 = 500$ К

η — ?

Решение:

График цикла представлен на рис. 30

$\boxed{1 \to 2}$ $V_1 = \text{const}$,

$$A_{12} = 0, \quad Q_{12} = \Delta U_{12},$$

$$\Delta U_{12} = \nu \frac{i}{2} R(T_2 - T_1),$$

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

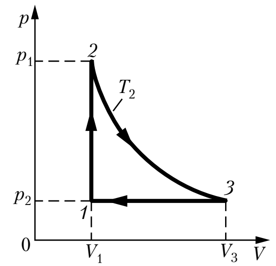


Рис. **30**

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}, \; Q_{12} = \nu \frac{i}{2} R\left(T_2 - \frac{p_1 V_1}{\nu R}\right);$$

$\boxed{2 \to 3}$ $T_2 = \text{const}, \; \Delta U_{23} = 0, \; Q_{23} = A_{23}, \; A_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2},$

$$V_2 = V_1, \; p_3 = p_1, \; p_3 V_3 = \nu R T_3, \; V_3 = \frac{\nu R T_3}{p_3} = \frac{\nu R T_2}{p_1}, \; Q_{23} = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_1};$$

$\boxed{3 \to 1}$ $p_1 = \text{const}, \; Q_{31} = \nu \frac{i+2}{2} R(T_1 - T_2), \; \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$

$$Q_1 = |Q_{12} + Q_{23}|, \quad Q_2 = |Q_{31}|, \quad \eta = 1 - \frac{|Q_{31}|}{|Q_{12} + Q_{23}|}.$$

Ответ: $\eta = 13{,}3\%$.

100. Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно (рис. 31), при этом в процессе адиабатного расширения объем газа увеличивается в $n = 4$ раза. Определить термический КПД цикла.

Дано:
$V_3 = nV_2$
$n = 4$
$i = 6$

η — ?

Решение:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}, \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1},$$

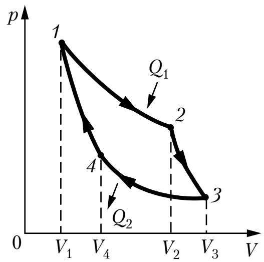


Рис. **31**

$$\gamma = \frac{i+2}{2}, \quad \eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}.$$

Ответ: $\eta = 37\%$.

101. Азот массой 28 г адиабатно расширили в $n = 2$ раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема (рис. 32). Определить изменение энтропии газа в ходе указанных процессов.

Дано:
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$m = 28$ г $= 28 \cdot 10^{-3}$ кг
$i = 5$
$n = \dfrac{V_2}{V_1} = 2$

ΔS — ?

Решение:

$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23},$$

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{12}}{T},$$

$$dQ_{12} = 0, \quad \Delta S_{12} = 0,$$

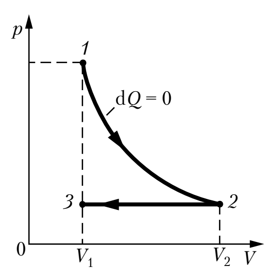


Рис. **32**

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{m}{M} \frac{C_p dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} C_p \ln \frac{T_3}{T_2},$$

$\boxed{p = \text{const}}$ $\dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{n}$, $C_p = \dfrac{i+2}{2}R$, $\Delta S = \Delta S_{23} = \dfrac{m}{M}\dfrac{i+2}{2}R\ln\dfrac{1}{n}$.

Ответ: $\Delta S = -20{,}2$ Дж/К.

Задачи для самостоятельного решения

102. Считая азот идеальным газом, определить его удельную теплоемкость: 1) для изобарного процесса; 2) для изохорного поцесса.

103. Определить количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.

104. Двухатомный идеальный газ занимает объем $V_1 = 1$ л и находится под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа. После адиабатного сжатия газ характеризуется объемом V_2 и давлением p_2. В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление $p_3 = 0{,}2$ МПа. Определить: 1) объем V_2; 2) давление p_2. Начертите графики этих процессов.

105. Азот массой 500 г, находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $t_1 = 127$ °C, подвергли изотермическому расширению, в результате которого давление газа уменьшилось в $n = 3$ раза. После этого газ подвергли адиабатному сжатию до начального давления, а затем он был изобарно сжат до начального объема. Построить график цикла и определить работу, совершенную газом за цикл.

ОТВЕТЫ: **102.** 1) $c_p = 1{,}04$ кДж/(кг · К); 2) $c_V = 742$ Дж/(кг · К). **103.** $Q = iV\Delta p/2 = 5$ Дж. **104.** 1) 0,5 л; 2) 264 кПа. **105.** –11,5 кДж.

2.3. Реальные газы и жидкости

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Реальный газ
- Силы межмолекулярного взаимодействия
- Внутреннее давление
- Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса)
- Изотермы Ван-дер-Ваальса
- Внутренняя энергия реального газа
- Поверхностная энергия
- Поверхностное натяжение
- Смачивание
- Формула Лапласа
- Капиллярность

Основные формулы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса)

$$\left(p+\frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}\right)(V_{\mathrm{m}}-b)=RT \text{ (для 1 моль газа)},$$

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu}-b\right)=RT,$$

$$\left(p+\frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT \text{ (для произвольной массы газа)}$$

[V_{m} — молярный объем; a и b — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов; $\nu = m/M$ — количество вещества; $V=\nu V_{\mathrm{m}}$].

Внутреннее давление газа

$$p'=\frac{a}{V_{\mathrm{m}}^2}$$

[a — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения; V_{m} — молярный объем].

Связь критических параметров (объем, давление и температура) с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса

$$V_{\text{кр}} = 3b, \quad p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27Rb}$$

[R — молярная газовая постоянная].

Внутренняя энергия реального газа

$$U_{\text{m}} = C_V T - \frac{a}{V_{\text{m}}} \text{ (для 1 моль газа),}$$

$$U = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{a}{V_{\text{m}}}\right) \text{(для произвольной массы газа)}$$

[C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; a — постоянная Ван-дер-Ваальса; V_{m} — молярный объем; m/M — количество вещества].

Энтальпия системы

$$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2$$

[индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы].

Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l}, \quad \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}$$

[F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE — поверхностная энергия, связанная с площадью $\Delta\, S$ поверхности пленки].

Формула Лапласа, позволяющая определить избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двоякой кривизны:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

[R_1 и R_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны — вне жидкости (вогнутый мениск); σ — поверхностное натяжение].

Избыточное давление в случае сферической поверхности

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

[θ — краевой угол; r — радиус капилляра; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; σ — поверхностное натяжение].

Примеры решения задач

106. Углекислый газ массой 6,6 кг при давлении 0,1 МПа занимает объем 3,75 м^3. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,361 Н · м^4/моль^2 и 4,28 · 10^{-5} м^3/моль.

Дано:
$M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$m = 6{,}6$ кг
$p = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па
$V = 3{,}75$ м^3
$a = 0{,}361$ Н · м^4/моль^2
$b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль

1) T_1 — ?
2) T_2 — ?

Решение:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT_1, \quad \nu = \frac{m}{M},$$

$$T_1 = \frac{M\left(p + \frac{m^2 a}{M^2 V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right)}{mR},$$

$$pV = \frac{m}{M}RT_2,$$

$$T_2 = \frac{MpV}{mR}.$$

Ответ: 1) $T_1 = 302$ К; 2) $T_2 = 301$ К.

107. Азот ($\nu = 3$ моль) расширяется в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 5$ л. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной? Поправку a принять равной 0,135 Н · м^4/моль^2.

Дано:
$\nu = 3$ моль
$V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3
$V_2 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3
$a = 0{,}135$ Н · м^4/моль^2

Q — ?

Решение:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A,$$

$$\mathrm{d}U = 0, \ \mathrm{d}A = p'\mathrm{d}V = \frac{\nu^2 a}{V^2}\mathrm{d}V,$$

$$Q = A, \ Q = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2 a}{V^2}\mathrm{d}V = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Ответ: $Q = 972$ Дж.

108. Азот ($\nu = 2$ моль) адиабатно расширяется в вакуум. Температура газа при этом уменьшается на 1 К. Определить работу, совершаемую газом против межмолекулярных сил притяжения.

Дано:
$\nu = 2$ моль
$i = 5$
$\Delta T = -1$ К

A_1 — ?

Решение:

$$Q = \Delta U + A, \quad Q = 0, \quad A = 0,$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0, \quad U_1 = U_2,$$

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1}\right), \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}\right),$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{a\nu}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right), \quad \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} = -\frac{C_V \Delta T}{\nu a},$$

$$\mathrm{d}A = p'\mathrm{d}V, \quad p' = \frac{\nu^2 a}{V^2}, \quad A_1 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2 a}{V^2}\mathrm{d}V = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -\nu \Delta T C_V = -\frac{\nu i}{2} R \Delta T.$$

Ответ: $A_1 = 83{,}1$ Дж.

109. Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определить работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от $d_1 = 6$ мм до $d_2 = 60$ мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора принять равным 40 мН/м.

Дано:
$T = \text{const}$
$d_1 = 6 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 60 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-2}$ м
$\sigma = 40 \text{ мН/м} = 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м

A — ?

Решение:

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad \Delta E = A, \quad \Delta S = 2S_2 - 2S_1,$$

$$S_2 = \pi d_2^2, \quad S_1 = \pi d_1^2,$$

$$T = \text{const}, \quad \sigma = \text{const},$$

$$A = \sigma \cdot 2\pi(d_2^2 - d_1^2).$$

Ответ: $A = 896$ мкДж.

110. Воздушный пузырек диаметром $d = 0{,}02$ мм находится на глубине $h = 25$ см под поверхностью воды. Определить давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м, а ее плотность $\rho = 1$ г/см^3.

Дано:
$d = 0{,}02$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м
$h = 25$ см $= 0{,}25$ м
$p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па
$\sigma = 73$ мН/м $= 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м
$\rho = 1$ г/см$^3 = 10^3$ кг/м^3

p — ?

Решение:

$$p = p_0 + p_1 + \Delta p, \quad p_1 = \rho g h,$$

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{d},$$

$$p = p_0 + \rho g h + \frac{4\sigma}{d}.$$

Ответ: $p = 118$ кПа.

111. Капилляр, имеющий внутренний радиус 0,5 мм, опущен в жидкость. Определить массу жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение равно 60 мН/м.

Дано:
$r = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м
$\sigma = 60$ мН/м $= 6 \cdot 10^{-2}$ Н/м

m — ?

Решение:

$$P = mg, \quad P = F,$$

$$F = \sigma l, \quad l = 2\pi r,$$

$$m = \frac{2\pi r \sigma}{g}.$$

Ответ: $m = 1{,}92 \cdot 10^{-5}$ кг.

Задачи для самостоятельного решения

112. Плотность азота $\rho = 140$ кг/м^3, его давление $p = 10$ МПа. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b принять равными соответственно 0,135 Н · м^4/моль^2 и $3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

113. Углекислый газ массой 88 г занимает при температуре 290 К объем 1000 см^3. Определить внутреннюю энергию газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Поправку a принять равной 0,361 Н · м^4/моль^2.

114. Определить радиус R капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки $r = 1$ мм. Считать, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта $\sigma = 22$ мН/м, а его плотность $\rho = 0{,}8$ г/см^3.

115. В капилляре диаметром $d = 100$ мкм вода поднимается на высоту $h = 30$ см. Определить поверхностное натяжение σ воды, если ее плотность $\rho = 1$ г/см^3.

ОТВЕТЫ: **112.** 1) 260 К; 2) 241 К. **113.** 1) 14,5 кДж; 2) 13 кДж. **114.** $R = 1{,}61$ мм. **115.** $\sigma = 73$ мН/м.

Раздел III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. Электростатика

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Электрический заряд
- Точечный заряд
- Пробный точечный положительный заряд
- Электрическое поле
- Электростатическое поле
- Напряженность электростатического поля
- Линии напряженности электростатического поля
- Поток вектора напряженности
- Электрический диполь
- Электрический момент диполя
- Плотность заряда: линейная, поверхностная, объемная
- Циркуляция вектора напряженности электростатического поля
- Потенциал электростатического поля
- Объемная плотность энергии электростатического поля
- Эквипотенциальная поверхность
- Типы диэлектриков
- Поляризация диэлектриков
- Связанные заряды
- Поляризованность диэлектрика
- Диэлектрическая проницаемость
- Электрическое смещение
- Сегнетоэлектрики
- Электростатическая индукция
- Электроемкость уединенного проводника
- Конденсаторы
- Пробивное напряжение
- Пробой
- Закон сохранения заряда
- Закон Кулона
- Принцип суперпозиции электростатических полей
- Теорема Гаусса

Основные формулы

Закон сохранения заряда в замкнутой системе

$$\sum_i Q_i = \text{const.}$$

Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad \text{(в вакууме)}, \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1||Q_2|}{\varepsilon r^2} \quad \text{(в среде)}$$

[F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2; r — расстояние между зарядами; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость среды].

Напряженность электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0}$$

[$\vec{F}$— сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля].

Напряженность электростатического поля точечного заряда Q на расстоянии r от заряда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Поток вектора напряженности электростатического поля

$$d\Phi_E = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = E_n\,\mathrm{d}S \text{ (сквозь площадку d}S\text{)},$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S E_n\,\mathrm{d}S \text{ (сквозь поверхность } S\text{)},$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n\,\mathrm{d}\vec{S} \text{ (сквозь замкнутую поверхность } S\text{)}$$

[$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$ — вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке; E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке dS].

Принцип суперпозиции электростатических полей

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

[$\vec{E}_i$ — напряженность поля, создаваемого зарядом Q_i].

Плотность зарядов (линейная, поверхностная, объемная)

$$\tau = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}, \quad \sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}, \quad \rho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:

- в случае дискретного распределения зарядов

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i;$$

- в случае непрерывного распределения зарядов

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E_n\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V$$

[$\sum_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; n — число зарядов; ρ — объемная плотность зарядов].

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

[σ — поверхностная плотность заряда].

Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

[σ — поверхностная плотность заряда].

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра сферы,

$$E = 0 \quad \text{при } r < R \text{ (внутри сферы)}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{при } r \geq R \text{ (вне сферы).}$$

Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра шара,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \quad \text{при } r \leq R \text{ (внутри шара),}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{при } r \geq R \text{ (вне шара).}$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра,

$$E = 0 \quad \text{при } r < R \text{ (внутри цилиндра),}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} \quad \text{при } r \geq R \text{ (вне цилиндра)}$$

[τ — линейная плотность заряда].

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L E_l\,\mathrm{d}l = 0$$

[E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$. Интегрирование производится по любому замкнутому пути L].

Потенциальная энергия заряда Q_0 в поле заряда Q на расстоянии r от него

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ_0}{r}.$$

Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{U}{Q_0}, \quad \varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}$$

[Q_0 — точечный положительный заряд, помещенный в данную точку поля; U — потенциальная энергия заряда Q_0; A_∞ — работа перемещения заряда Q_0 из данной точки поля за его пределы].

Потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi, \quad \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

[$\vec{j}$, $\vec{y}$, $\vec{k}$ — единичные векторы координатных осей. Знак минус определяется тем, что вектор $\vec{E}$ поля направлен в сторону убывания потенциала].

В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией,

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}.$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad A_{12} = Q_0\int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = Q_0\int_1^2 E_l\,\mathrm{d}l$$

[E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$].

Разность потенциалов между двумя точками 1 и 2 в электростатическом поле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_0} = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 E_l\,\mathrm{d}l$$

[A_{12} — работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2; E_l — проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$; интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатичекого поля не зависит от траектории перемещения].

Разность потенциалов между точками, находящимися на расстоянии x_1 и x_2 от равномерно заряженной бесконечной плоскости,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

[σ — поверхностная плотность заряда].

Разность потенциалов между бесконечными разноименно заряженными плоскостями, расстояние между которыми равно d,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E\,\mathrm{d}x = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d.$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра равномерно заряженной сферической поверхности (объемно заряженного шара) радиусом R с общим зарядом Q, причем $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}x = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра объемно заряженного шара радиуса R с общим зарядом Q, причем $r_1 < R$, $r_2 < R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\mathrm{d}r = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(r_2^2 - r_1^2).$$

Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях r_1 и r_2 от оси равномерно заряженного с линейной плотностью τ бесконечного цилиндра радиусом R, причем $r_1 > R$, $r_2 > R$, $r_2 > r_1$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$$

[V — объем диэлектрика; $\vec{p}_i$ — дипольный момент i-й молекулы].

Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля

$$\vec{P} = \varkappa\varepsilon_0\vec{E}$$

[$\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость вещества; ε_0 — электрическая постоянная].

Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью $\varkappa$

$$\varepsilon = 1 + \varkappa$$

Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}, \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

[P — поляризованность, ε — диэлектрическая проницаемость].

Связь между векторами электрического смещения $\vec{D}$, напряженности электростатического поля $\vec{E}$ и поляризованности $\vec{P}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S D_n\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

[$\sum_{i=1}^{n} Q_i$ — алгебраическая сумма заключеных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n — проекция вектора $\vec{D}$ на нормаль $\vec{n}$ к площадке $\mathrm{d}\vec{S}$; $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\cdot\vec{n}$ — вектор, модуль которого равен $\mathrm{d}S$, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке].

Условия на границе раздела диэлектрических сред (проницаемость которых ε_1 и ε_2) при отсутствии на границе свободных зарядов:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

[E_τ, D_τ и E_n, D_n — тангенциальные и нормальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ соответственно].

Напряженность электростатического поля у поверхности проводника

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

[σ — поверхностная плотность зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник].

Электроемкость уединенного проводника

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

[Q — заряд, сообщенный проводнику; φ — потенциал проводника].

Электроемкость шара радиусом R

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Электроемкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

[Q — заряд, накопленный в конденсаторе; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между его пластинами].

Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

[S — площадь каждой пластины конденсатора; d — расстояние между пластинами].

Электроемкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

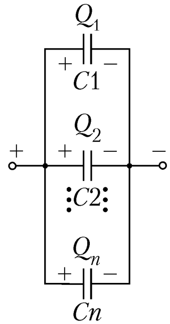
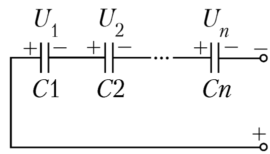
[r_1 и r_2 — радиусы концентрических сфер].

Электроемкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(r_2 / r_1)}$$

[l — длина пластин конденсатора; r_1 и r_2 — радиусы полых коаксиальных цилиндров].

Соединение конденсаторов:

	параллельное	последовательное
Схема		
Сохраняющаяся величина	$U = U_1 = U_2 = ... = U_n = \text{const}$	$Q = Q_1 = Q_2 = ... = Q_n = \text{const}$
Суммарная величина	$Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n$	$U = U_1 + U_2 + ... + U_n$
Результирующая электроемкость	$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$	$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[C, Q, φ — электроемкость, заряд и потенциал проводника соответственно].

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

[Q — заряд конденсатора, С — его электроемкость; Δφ — разность потенциалов между пластинами].

Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}$$

[Q — заряд конденсатора; σ — поверхностная плотность заряда; S — площадь пластины конденсатора; E — напряженность электростатического поля; ε_0 — электрическая постоянная; ε — диэлектрическая проницаемость].

Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$$

[S — площадь одной пластины; U — разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ — объем конденсатора].

Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$$

[E — напряженность электростатического поля; D — электрическое смещение].

Примеры решения задач

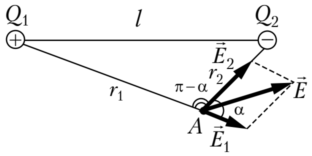


Рис. **33**

116. Расстояние l между двумя точечными зарядами $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -3$нКл, расположенными в вакууме, равно 20 см (рис. 33). Определить: 1) напряженность E; 2) потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в точке, удаленной от первого заряда на расстояние $r_1 = 15$ см и от второго заряда на расстояние $r_2 = 10$ см.

Дано:
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м
$Q_1 = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл
$Q_2 = -3$ нКл $= -3 \cdot 10^{-9}$ Кл
$r_1 = 15$ см $= 0{,}15$ м
$r_2 = 10$ см $= 0{,}1$ м

1) E — ?
2) φ — ?

Решение:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2},$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = 0{,}25,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{2|Q_1||Q_2|}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha + \frac{Q_2^2}{r_2^4}},$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right).$$

Ответ: 1) $E = 3$ кВ/м; 2) $\varphi = -150$ В.

117. Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием поля к нити вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 1{,}5$ см до $r_2 = 1$ см?

Дано:
$\tau = 1$ нКл/см $= 10^{-7}$ Кл/м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$r_1 = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 1$ см $= 10^{-2}$ м

v — ?

Решение:

$$A = T = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2A}{m}},$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \mathrm{d}A = F\mathrm{d}r,$$

$$F = -eE = -\frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\,\mathrm{d}r = -\frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}, \quad v = \sqrt{\frac{e\tau}{\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{r_1}{r_2}}.$$

Ответ: $v = 16$ Мм/с.

118. Определить линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $Q = 1$ нКл с расстояния $r_1 = 5$ см до $r_2 = 2$ см в направлении, перпендикулярном нити, равно 50 мкДж.

Дано:
$Q = 1$ нКл $= 10^{-9}$ Кл
$r_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м
$A = 50$ мкДж $= 5 \cdot 10^{-5}$ Дж

τ — ?

Решение:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \mathrm{d}A = Q\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}\varphi = -E\,\mathrm{d}r, \quad A = -Q\int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r,$$

$$A = -Q\int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau \mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}, \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 A}{Q\ln\dfrac{r_1}{r_2}}.$$

Ответ: 3,03 мкКл/м.

119. Электростатическое поле создается сферой радиусом $R = 5$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстояниях $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см от центра сферы.

Дано:
$R = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м
$\sigma = 1$ нКл/м$^2 = 10^{-9}$ Кл/м^2
$r_1 = 10$ см $= 0{,}1$ м
$r_2 = 15$ см $= 0{,}15$ м

$\varphi_1 - \varphi_2$ — ?

Решение:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r, \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

$$Q = \sigma \cdot 4\pi R^2,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\sigma R^2 \mathrm{d}r}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}94$ В.

120. Электростатическое поле создается шаром радиусом $R = 10$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 20$ нКл/м^3. Определить разность потенциалов между точками, находящимися внутри шара на расстояниях $r_1 = 2$ см и $r_2 = 8$ см от его центра.

Дано:
$R = 10$ см $= 0{,}1$ м
$\rho = 20$ нКл/м$^3 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м^3
$r_1 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м

$\varphi_1 - \varphi_2$ — ?

Решение:

$$\oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad E_n = E, \quad r < R,$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r,$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r=\frac{\rho(r_2^2-r_1^2)}{3\varepsilon_0\cdot 2}=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_2^2-r_1^2).$$

Ответ: $\varphi_1-\varphi_2=2{,}26$ В.

121. Свободные заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho=5$ нКл/м^3 по шару радиусом $R=10$ см из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon=5$. Определить напряженности электростатического поля на расстояниях $r_1=5$ см и $r_2=15$ см от центра шара (рис. 34).

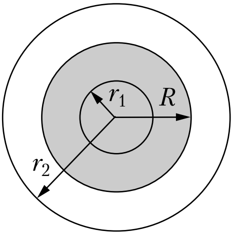


Рис. **34**

Дано:
$\rho=5$ нКл/м^3 $=5\cdot10^{-9}$ Кл/м^3
$R=10$ см $=0{,}1$ м
$\varepsilon=5$
$r_1=5$ см $=0{,}05$ м
$r_2=15$ см $=0{,}15$ м

E_1 — ?
E_2 — ?

Решение:

$$\oint_S D_n\mathrm{d}S=\int_V\rho\mathrm{d}V,$$

$$\boxed{r_1<R}\ D_1\cdot4\pi r_1^2=\frac{4}{3}\pi r_1^3\rho,\quad D_1=\frac{\rho r_1}{3},$$

$$D_1=\varepsilon_0\varepsilon E_1,\quad E_1=\frac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0},$$

$$\boxed{r_2>R}\ D_2\cdot4\pi r_2^2=\frac{4}{3}\pi r R^3\rho,\quad D_2=\frac{\rho R^3}{3r_2^2},$$

$$D_2=\varepsilon_0E_2,\quad E_2=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0r_2^2}.$$

Ответ: $E_1=1{,}88$ В/м; $E_2=8{,}37$ В/м.

122. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon=7$). Расстояние между пластинами $d=5$ мм, разность потенциалов $U=1$ кВ. Определить: 1) напряженность поля в стекле; 2) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 3) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

Дано:	*Решение*:
$\varepsilon = 7$ $d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м $U = 1$ кВ $= 10^3$ В	$U = Ed, \quad E = \dfrac{U}{d},$ $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad \sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E,$ $\sigma' = P = D - \varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 E - \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E.$
1) E — ? 2) σ —? 3) σ' — ?	

Ответ: 1) $E = 200$ кВ/м; 2) $\sigma = 12{,}4$ мкКл/м^2; 3) $\sigma' = 10{,}6$ мкКл/м^2.

123. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин $S = 200$ см^2, расстояние между ними $d = 1{,}5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли парафин ($\varepsilon = 2$). Определить разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика. Определить также емкости конденсаторов C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика.

Дано:	*Решение*:
$U_1 = 500$ В $S = 200$ см$^2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м^2 $d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м $\varepsilon = 2$	$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}, \quad \sigma = \dfrac{Q}{S} = \text{const},$ $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon},$ $U_1 = E_1 d, \quad U_2 = E_2 d, \quad U_2 = \dfrac{U_1}{\varepsilon},$
U_2 — ? C_1 — ? C_2 — ?	

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon C_1.$$

Ответ: $U_2 = 250$ В; $C_1 = 118$ пФ; $C_2 = 236$ пФ.

124. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 20$ см и $R_2 = 50$ см (рис. 35) заряжены соответственно одинаковыми зарядами $Q = 100$ нКл. Определить энергию электростатического поля, заключенного между этими сферами.

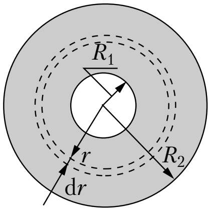


Рис. **35**

Дано:
$R_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м
$R_2 = 50$ см $= 0{,}5$ м
$Q = 100$ нКл $= 10^{-7}$ Кл

W — ?

Решение:

$$w = \left.\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\right|_{\varepsilon=1} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$W = \int w\,\mathrm{d}V, \quad \mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r,$$

$$W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0 Q^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r}{2\cdot(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Ответ: $W = 135$ мкДж.

125. К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин $S = 200$ см^2, расстояние между ними $d_1 = 1{,}5$ мм. Пластины раздвинули до расстояния $d_2 = 15$ мм. Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник тока перед раздвижением: 1) отключался; 2) не отключался.

Дано:
$U_1 = 500$ В
$S = 200$ см^2 $= 2\cdot 10^{-2}$ м^2
$d_1 = 1{,}5$ мм $= 1{,}5\cdot 10^{-3}$ м
$d_2 = 15$ мм $= 1{,}5\cdot 10^{-2}$ м
1) $Q = \mathrm{const}$
2) $U = \mathrm{const}$

1) W_1, W_2 — ?
2) W'_1, W'_2 — ?

Решение:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2},$$

1) $\boxed{Q = \mathrm{const}}$ $C_1 U_1 = C_2 U_2,$

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1},$$

$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S d_2^2 U_1^2}{2 d_2 d_1^2} = W_1 \frac{d_2}{d_1};$$

2) $\boxed{U = \mathrm{const}}$ $Q_1 = C_1 U_1, \quad Q_2 = C_2 U_1,$

$$W'_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1}, \quad W'_2 = \frac{C_2 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 U_1^2 d_1}{2 d_2 d_1} = W_1 \frac{d_1}{d_2}.$$

Ответ: 1) $W_1 = 14{,}8$ мкДж, $W_2 = 148$ мкДж;
2) $W'_1 = 14{,}8$ мкДж, $W'_2 = 1{,}48$ мкДж.

126. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено слюдой ($\varepsilon = 7$). Площадь пластин конденсатора составляет 50 см^2. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюде, если пластины конденсатора притягивают друг друга с силой 1 мН.

Дано:
$\varepsilon = 7$
$S = 50\text{ см}^2 = 5 \cdot 10^{-3}\text{ м}^2$
$F = 1\text{ мН} = 10^{-3}\text{ Н}$

σ' — ?

Решение:

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E, \quad |F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \quad Q = \sigma S,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon F}{S}}, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon_0\varepsilon S}},$$

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 F}{\varepsilon S}}.$$

Ответ: $\sigma' = 4{,}27$ мкКл/м^2.

Задачи для самостоятельного решения

127. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин плотностью $\rho_к = 0{,}8$ г/см^3. Чему должна быть равна плотность ρ материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был одинаковым? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

128. Определить напряженность электростатического поля в точке A, расположенной вдоль прямой, соединяющей заряды $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = -8$ нКл и находящейся на расстоянии $r = 8$ см от отрицательности заряда. Расстояние между зарядами $l = 20$ см.

129. Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами, радиусы которых $R_1 = 5$ см и $R_2 = 8$ см. Заряды сфер соответственно равны $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -1$ нКл. Определить напряженность электростатического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстоянии: 1) $r_1 = 3$ см; 2) $r_2 = 6$ см; 3) $r_3 = 10$ см. Построить график зависимости $E(r)$.

130. Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м^2. Определить разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $x_1 = 20$ см и $x_2 = 50$ см от плоскости.

131. Между пластинами плоского конденсатора помещено два слоя диэлектрика — слюда ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 0{,}5$ м и парафин ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0{,}5$ мм. Определить: 1) напряженности электростатического поля в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В.

132. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 5$ мм, разность потенциалов $U = 1{,}2$ кВ. Определить: 1) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектрике, если известно, что диэлектричекая восприимчивость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами, $\varkappa = 1$.

133. Шар, погруженный в масло ($\varepsilon = 2{,}2$), имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 1$ мкКл/м^2 и потенциал $\varphi = 500$ В. Определить: 1) радиус шара; 2) заряд шара; 3) электроемкость шара; 4) энергию шара.

134. В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 700$ В/м перпендикулярно линиям напряженности поместили стеклянную пластину ($\varepsilon = 7$) толщиной $d = 1{,}5$ мм и площадью 200 см^2. Определить: 1) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; 2) энергию электростатического поля, сосредоточенную в пластине.

135. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 10$ пФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 500$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в 3 раза. Определить: 1) разность потенциалов на пластинах конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин.

136. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U = 100$ В. Площадь каждой пластины $S = 200$ см^2, расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ мм, пространство между ними заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Определить силу притяжения F пластин друг к другу.

ОТВЕТЫ: **127.** $\rho = \dfrac{\varepsilon\rho_к}{\varepsilon - 1} = 1{,}6$ г/см^3. **128.** 10,1 кВ/м. **129.** 1) 0; 2) 5 кВ/м; 3) 0,9 кВ/м. **130.** $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1) = 16{,}9$ В. **131.** 1) $E_1 = 182$ кВ/м; $E_2 = 637$ кВ/м; 2) $D = 11{,}3$ мкКл/м^2. **132.** 1) 4,24 мкКл/м^2; 2) 2,12 мкКл/м^2. **133.** 1) 9,74 мм; 2) 1,19 нКл; 3) 2,38 пФ; 4) 0,3 мкДж. **134.** 1) 5,31 нКл/м^2; 2) 9,29 пДж. **135.** 1) 1,5 кВ; 2) 2,5 мкДж. **136.** $F = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d^2} = 7{,}08$ мН.

3.2. Постоянный электрический ток

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Электрический ток
- Постоянный ток
- Сила тока
- Плотность тока
- Сторонние силы
- Электродвижущая сила, действующая в цепи
- Напряжение
- Разность потенциалов
- Электрическая постоянная
- Закон Ома для однородного участка цепи
- Закон Ома для неоднородного участка цепи
- Закон Ома для замкнутой цепи
- Закон Ома в дифференциальной форме
- Закон Джоуля — Ленца
- Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме
- Узел электрической цепи
- Правила Кирхгофа

Основные формулы

Сила тока

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Плотность тока в проводнике

$$j = \frac{I}{S}, \quad \vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle$$

[S — площадь поперечного сечения проводника; $\langle\vec{v}\rangle$ — средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов].

Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathscr{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{Q_0}$$

[$A_{\text{ст}}$ — работа сторонних сил; Q_0 — единичный положительный заряд],

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{(замкнутая цепь)},$$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{(участок цепи 1—2)}$$

[$E_{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних сил].

Разность потенциалов между двумя точками цепи

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^2 E_l \mathrm{d}l$$

[$\vec{E}$ — напряженность электростатического поля; E_l — проекция вектор $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения $\mathrm{d}\vec{l}$].

Напряжение на участке 1—2 цепи

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

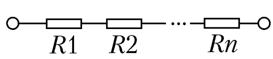
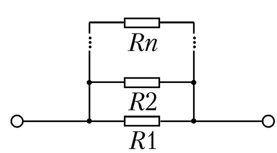
[$(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов между точками цепи; $\mathcal{E}_{12}$ — ЭДС, действующая на участке 1—2 цепи].

Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad G = \frac{1}{R}, \quad \gamma = \frac{1}{\rho}$$

[ρ — удельное электрическое сопротивление; S — площадь поперечного сечения проводника; l — его длина].

Соединение проводников:

	последовательное	параллельное
Схема		
Постоянная величина	$I = I_1 = I_2 = ... = I_n = \text{const}$	$U = U_1 = U_2 = ... = U_n = \text{const}$
Суммарная величина	$U = U_1 + U_2 + ... + U_n$	$I = I_1 + I_2 + ... + I_n$
Полное сопротивление	$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$	$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

Закон Ома

$$I = \frac{U}{R} \text{ (для однородного участка цепи)},$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}}{R} \text{ (для неоднородного участка цепи)},$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} \text{ (для замкнутой цепи)},$$

[U — напряжение на участке цепи; R — сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathscr{E}_{12}$ — ЭДС источников тока, входящих в участок; $\mathscr{E}$ — ЭДС всех источников тока цепи].

Зависимость удельного сопротивления ρ и сопротивления R от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t)$$

[ρ и ρ_0, R и R_0 — соответственно удельное сопротивление и сопротивление проводника при t и 0 °C; α — температурный коэффициент сопротивления, для чистых металлов (при не очень низкой температуре) близкий к $\frac{1}{273}$ К$^{-1}$].

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

[$\vec{j}$ — плотность тока; $\vec{E}$ — напряженность электростатического поля; γ — удельная электрическая проводимость вещества проводника].

Работа тока

$$dA = U\mathrm{d}Q = IU\mathrm{d}t = I^2R\,\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\mathrm{d}t$$

[U — напряжение, приложенное к концам однородного проводника; I — сила тока в проводнике; R — сопротивление проводника; $\mathrm{d}Q$ — заряд, переносимый через сечение проводника за промежуток времени $\mathrm{d}t$].

Мощность тока

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

[U — напряжение, приложенное к концам однородного проводника; I — сила тока в проводнике; R — его сопротивление].

Закон Джоуля — Ленца

$$\mathrm{d}Q = IU\,\mathrm{d}t = I^2R\,\mathrm{d}t$$

[dQ — количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за промежуток времени dt; U — напряжение, приложенное к концам участка цепи; I — сила тока в цепи; R — сопротивление участка].

Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме

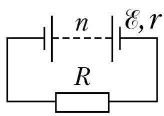
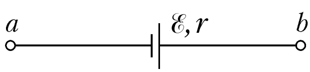
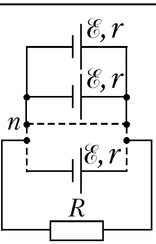
$$w = jE = \gamma E^2$$

[w — удельная тепловая мощность тока; j — плотность тока; E — напряженность электростатического поля; γ — удельная электрическая проводимость вещества].

Правила Кирхгофа

$$\sum_k I_k = 0, \quad \sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k.$$

Соединение n одинаковых элементов (источников тока) электрической цепи постоянного тока:

Схема электрической цепи	Закон Ома
	$I = \dfrac{n\mathcal{E}}{R + nr}$
	$I = \dfrac{\mathcal{E} - U_{ab}}{r}$
	$I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + \dfrac{r}{n}}$

[r — внутреннее сопротивление каждого источника; R — внешнее сопротивление цепи; $\mathcal{E}$ — ЭДС источника].

Примеры решения задач

137. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 2$ А в течение времени $t = 5$ с. Определить заряд, прошедший в проводнике.

Дано:

$I_0 = 0$

$I = 2$ А

$\tau = 5$с

Q — ?

Решение:

$$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t, \quad I = kt, \quad k = \frac{I - I_0}{t} = \frac{I}{\tau},$$

$$\mathrm{d}Q = kt\,\mathrm{d}t, \quad Q = \int_0^{\tau} kt\,\mathrm{d}t = \frac{k\tau^2}{2} = \frac{I\tau}{2}.$$

Ответ: $Q = 5$ Кл.

138. По медному проводнику сечением 0,8 мм^2 течет ток 80 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ г/см^3.

Дано:

$S = 0{,}8$ мм$^2 = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м^2

$I = 80$ мА $= 8 \cdot 10^{-2}$ А

$\rho = 8{,}9$ г/см$^3 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3

$M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$n = n_1$

$\langle v \rangle$ — ?

Решение:

$$j = ne\langle v \rangle, \quad j = \frac{I}{S},$$

$$n = n' = \frac{N_\mathrm{A}}{V_\mathrm{m}} = \frac{N_\mathrm{A}\rho}{M},$$

$$\frac{I}{S} = \frac{N_\mathrm{A}\rho}{M} e\langle v \rangle, \quad \langle v \rangle = \frac{MI}{N_\mathrm{A}\rho e S}.$$

Ответ: $\langle v \rangle = 7{,}4$ мкм/с.

139. В цепи на рис. 36 амперметр показывает силу тока $I = 1{,}5$ А. Сила тока через сопротивление R_1 равна $I_1 = 0{,}5$ А. Сопротивление $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 6$ Ом. Определить сопротивление R_1, а также силы токов I_2 и I_3, протекающих через сопротивления R_2 и R_3.

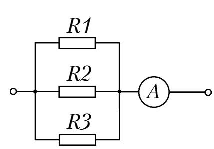


Рис. **36**

Дано:

$I = 1{,}5$ А

$I_1 = 0{,}5$ А

$R_2 = 2$ Ом

$R_3 = 6$ Ом

R_1 — ?

I_2 — ?

I_3 — ?

Решение:

$$\boxed{U = \mathrm{const}} \quad I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 R_1 = (I_2 + I_3)\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_2 + I_3 = I - I_1,$$

$$R_1 = \frac{(I - I_1) R_2 R_3}{I_1 (R_2 + R_3)},$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{I_1 R_1}{R_2}, \quad I_3 = \frac{I_1 R_1}{R_3}.$$

Ответ: $R_1 = 3$ Ом; $I_2 = 0{,}75$ А, $I_3 = 0{,}25$ А.

140. По алюминиевому проводу сечением $S = 0{,}2$ мм^2 течет ток $I = 0{,}2$ А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм · м.

Дано:
$S = 0{,}2$ мм$^2 = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ м^2
$I = 0{,}2$ А
$\rho = 26$ нОм · м $= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

F — ?

Решение:

$$F = eE, \quad j = \gamma E = \frac{E}{\rho}, \quad j = \frac{I}{S},$$

$$\frac{I}{S} = \frac{E}{\rho}, \quad E = \frac{I\rho}{S}, \quad F = e\frac{I\rho}{S}.$$

Ответ: $F = 4{,}16 \cdot 10^{-21}$ Н.

141. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 50$ Ом равномерно растет от $I_0 = 0$ до $I_{max} = 3$ А за время $t = 6$ с. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за это время.

Дано:
$R = 50$ Ом
$I_0 = 0$
$I_{max} = 3$ А
$t = 6$ с

Q — ?

Решение:

$$\mathrm{d}Q = I^2 R\,\mathrm{d}t, \quad I = kt, \quad k = \frac{I_{max} - I_0}{t} = \mathrm{const},$$

$$\mathrm{d}Q = k^2 R t^2\,\mathrm{d}t,$$

$$Q = \int_0^{\tau} k^2 R t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k^2 R t^3 = \frac{1}{3}\frac{(I_{max} - I_0)^2}{t^2} R t^3 = \frac{1}{3}(I_{max} - I_0)^2 R t.$$

Ответ: $Q = 900$ Дж.

142. Определить: 1) ЭДС $\mathcal{E}$; 2) внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе 2 А — мощность 8 Вт.

Дано:
$I_1 = 4$ А
$P_1 = 10$ Вт
$I_2 = 2$ А
$P_2 = 8$ Вт

1) $\mathscr{E}$ — ?
2) r — ?

Решение:

$$P = \mathscr{E}I, \quad \mathscr{E} = I(R+r),$$

$$P_1 = \mathscr{E}I_1 - I_1^2 r, \quad r = \frac{\mathscr{E}I_1 - P_1}{I_1^2}, \quad P_2 = \mathscr{E}I_2 - I_2^2 r,$$

$$P_2 = \mathscr{E}I_2 - \frac{I_2^2}{I_1^2}(\mathscr{E}I_1 - P_1), \quad P_2 = \mathscr{E}I_2 - \mathscr{E}\frac{I_2^2}{I_1} + P_1\frac{I_2^2}{I_1^2},$$

$$\mathscr{E} = \left(P_2 - P_1\frac{I_2^2}{I_1^2}\right) \Big/ \left(I_2 - \frac{I_2^2}{I_1^2}\right), \quad r = \frac{\mathscr{E}}{I_1} - \frac{P_1}{I_1^2}.$$

Ответ: 1) $\mathscr{E} = 5{,}5$ В; 2) $r = 0{,}75$ Ом.

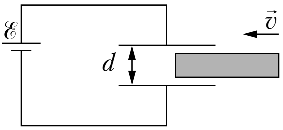


Рис. **37**

143. В плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 5$ мм, вдвигают стеклянную пластину ($\varepsilon = 7$) с постоянной скоростью $v = 50$ мм/с (рис. 37). Ширина пластины $b = 4{,}5$ мм, ЭДС батареи $\mathscr{E} = 220$ В. Определить силу тока в цепи батареи.

Дано:
$d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м
$\varepsilon = 7$
$v = 50$ мм/с $= 5 \cdot 10^{-2}$ м/с
$b = 4{,}5$ мм $= 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$\mathscr{E} = 220$ В

I — ?

Решение:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}Q = \sigma' vb\,\mathrm{d}t,$$

$$\sigma' = \varepsilon_0 \varkappa E, \quad \varkappa = \varepsilon - 1, \quad E = \frac{\mathscr{E}}{d},$$

$$\mathrm{d}Q = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)vb\,\mathrm{d}t, \quad I = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{E}{d}vb.$$

Ответ: $I = 526$ пА.

144. На рис. 38, *а* $\mathscr{E} = 2$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = R_4 = 20$ Ом и $R_G = 100$ Ом. Определить силу тока I_G, протекающего через гальванометр.

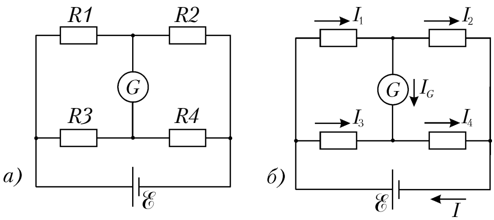


Рис. **38**

Дано:
$\mathscr{E} = 2$ В
$R_1 = 60$ Ом
$R_2 = 40$ Ом
$R_3 = R_4 = 20$ Ом
$R_G = 100$ Ом

I_G — ?

Решение:

Из рис. 38, *б* имеем:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_3, \\ I_1 = I_2 + I_G, \\ I_2 + I_4 = I, \\ I_3 + I_G = I_4; \end{cases} \quad \begin{cases} I_1R_1 + I_2R_2 = \mathscr{E}, \\ I_3R_3 + I_4R_4 = \mathscr{E}, \\ I_1R_1 + I_GR_G + I_4R_4 = \mathscr{E}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6I_1 + 4I_2 = 0{,}2, \\ 2I_3 + 2I_4 = 0{,}2, \\ 6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6I_1 + 4(I_1 - I_G) = 0{,}2, \\ 2(I_4 - I_G) + 2I_4 = 0{,}2, \\ 6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2; \end{cases}$$

$$10I_1 - 4I_G = 0{,}2 \Rightarrow I_1 = \frac{0{,}2 + 4I_G}{10}, \quad 4I_4 - 2I_G = 0{,}2 \Rightarrow I_4 = \frac{0{,}2 + 2I_G}{4},$$

$$6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2, \quad 6\left(\frac{0{,}2 + 4I_G}{10}\right) + 10I_G + 2\left(\frac{0{,}2 + 2I_G}{4}\right) = 0{,}2,$$

$$1{,}2 + 24I_G + 100I_G + 1 + 10I_G = 2, \quad 134I_G = -0{,}2,$$

$$I_G = -1{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Ответ: $I_G = 1{,}49$ мА, ток течет в направлении, противоположном первоначально выбранному (см. *Правила* Кирхгофа).

Задачи для самостоятельного решения

145. Определить плотность тока, если за 2 с через проводник сечением 1,6 мм^2 прошло $2 \cdot 10^{19}$ электронов.

146. Определить суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной $l = 500$ м, по которому течет ток $I = 20$ А.

147. Вольтметр, включенный в сеть последовательно с сопротивлением R_1, показал напряжение $U_1 = 198$ В, а при включении последовательно с сопротивлением $R_2 = 2R_1$ — напряжение $U_2 = 180$ В. Определить сопротивление R_1 и напряжение U в сети, если сопротивление вольтметра $r = 900$ Ом.

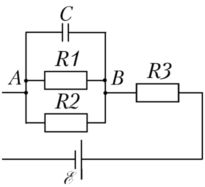


Рис. **39**

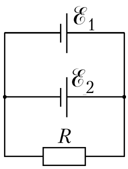


Рис. **40**

148. Определить напряженность E электрического поля в алюминиевом проводнике объемом $V = 10$ см^3, если при прохождении по нему постоянного тока за время $t = 5$ мин выделилось количество теплоты $Q = 2{,}3$ кДж. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм · м.

149. На рис. 39 $R_1 = R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $C = 50$ нФ. Определить ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением, если заряд на конденсаторе $Q = 2{,}2$ мкКл.

150. Два источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 2$ В и $\mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}5$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом включены параллельно сопротивлению $R = 2$ Ом (рис. 40). Определить силу тока I через сопротивление.

ОТВЕТЫ: **145.** 1 А/мм^2. **146.** $5{,}69 \cdot 10^{-8}$ кг · м/с.

147. $R_1 = \dfrac{(U_1 - U_2)r}{2U_2 - U_1} = 100$ Ом; $U = U_1\left(\dfrac{R_1}{r} + 1\right) = 220$ В.

148. $E = \sqrt{\dfrac{Q\rho}{Vt}} = 0{,}141$ В/м. **149**. $\mathcal{E} = \dfrac{Q}{C}\left(1 + \dfrac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 R_2}\right) = 220$ В.

150. $I = \dfrac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R r_1 + r_1 r_2 + R r_2} = 0{,}775$ А.

3.3. Магнитное поле

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Магнитное поле
- Магнитная индукция
- Линии магнитной индукции
- Магнитная проницаемость среды
- Принцип суперпозиции магнитных полей
- Закон Био — Савара — Лапласа
- Закон Ампера
- Магнитная постоянная
- Магнитное поле движущегося заряда
- Сила Лоренца
- Движение заряженных частиц в магнитном поле
- Эффект Холла
- Циркуляция вектора $\vec{B}$
- Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)
- Соленоид и его магнитное поле
- Тороид и его магнитное поле
- Поток вектора магнитной индукции
- Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$

Основные формулы

Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = [\vec{p}_{\text{m}}\vec{B}]$$

[$\vec{B}$ — магнитная индукция; $\vec{p}_{\text{m}}$ — магнитный момент контура с током].

Модуль механического момента

$$M = p_{\text{m}} B \sin\alpha$$

[α — угол между нормалью к плоскости контура и вектором $\vec{B}$].

Магнитный момент контура с током

$$\vec{p}_{\text{m}} = IS\vec{n}$$

[S — площадь контура с током; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура].

Связь между магнитной индукцией $\vec{B}$ и напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды].

Закон Био — Савара — Лапласа

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I[\mathrm{d}\vec{l},\vec{r}]}{r^3}$$

[$\mathrm{d}\vec{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины $\mathrm{d}\vec{l}$ проводника с током I; $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от $\mathrm{d}\vec{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция].

Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{B}$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

[α — угол между векторами $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{r}$].

Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

[$\vec{B}$ — магнитная индукция результирующего поля; $\vec{B}_i$ — магнитные индукции складываемых полей].

Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R}$$

[R — расстояние от оси проводника; I — сила тока в проводнике].

Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2R}$$

[R — радиус проводника; I — сила тока в проводнике].

Закон Ампера

$$d\vec{F} = I\,[\mathrm{d}\vec{l},\vec{B}]$$

[$\mathrm{d}\vec{F}$ — сила, действующая на элемент длины $\mathrm{d}\vec{l}$ проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$].

Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{F}$

$$dF = IB\,\mathrm{d}l\sin\alpha$$

[α — угол между векторами $\mathrm{d}\vec{l}$ и $\vec{B}$].

Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{R}\mathrm{d}l$$

[R — расстояние между проводниками; $\mathrm{d}l$ — отрезок проводника].

Магнитная индукция поля точечного заряда Q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью $\vec{L}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}$$

[$\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда к точке, в которой определяется индукция].

Модуль вектора $\vec{B}$

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin\alpha$$

[α — угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{r}$].

Сила Лоренца

$$\vec{F} = Q[\vec{v}\vec{B}]$$

[$\vec{F}$ — сила, действующая на заряд Q, движущийся в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{L}$].

Модуль вектора $\vec{F}$

$$F = Q\, vB \sin\alpha$$

[α — угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{B}$].

Формула Лоренца

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{v}\vec{B}]$$

[$\vec{F}$ — результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q, если на него действуют электрическое поле напряженностью $\vec{E}$ и магнитное поле индукцией $\vec{B}$].

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d}$$

[B — магнитная индукция; I — сила тока; d — толщина пластинки; $R = 1/(en)$ — постоянная Холла (n — концентрация электронов)].

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)

$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k$$

[$\mathrm{d}\vec{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; $B_l = B\cos\alpha$ — составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); α — угол между векторами $\vec{B}$ и $\mathrm{d}\vec{l}$; $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k$ — алгебраическая сумма n токов, охватываемых контуром].

Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

[I — сила тока в соленоиде; l — длина соленоида].

Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}$$

[N — число витков тороида; I — сила тока; r — внутренний радиус тороида].

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток):

$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = B_n\,\mathrm{d}S \text{ (сквозь площадку } \mathrm{d}S\text{)},$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S B_n\,\mathrm{d}S \text{ (сквозь поверхность } S\text{)},$$

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S B_n\,\mathrm{d}S \text{ (сквозь замкнутую поверхность } S\text{)}$$

[$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ — вектор, модуль которого равен $\mathrm{d}S$, а направление совпадает с нормалью $\vec{n}$ к площадке; B_n — проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к площадке].

Элементарная работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$\mathrm{d}A = I\,\mathrm{d}\Phi$$

[$\mathrm{d}\Phi$ — магнитный поток, пересекаемый движущимся проводником].

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$\mathrm{d}A = I\,\mathrm{d}\Phi'$$

[$\mathrm{d}\Phi'$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром].

Примеры решения задач

151. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d = 15$ см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в противоположных направлениях. Определить магнитную индукцию B в точке A, удаленной на $r_1 = 20$ см от первого и на $r_2 = 30$ см от второго проводника (рис. 41).

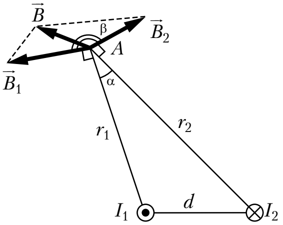


Рис. **41**

Дано:
$d = 15$ см $= 0{,}15$ м
$I_1 = 70$ А
$I_2 = 50$ А
$r_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м
$r_2 = 30$ см $= 0{,}3$ м

B — ?

Решение:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2},$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\beta},$$

$$\beta = 180° - \alpha, \quad d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2},$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos\alpha} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} - \frac{I_1 I_2}{r_1^2 r_2^2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

Ответ: $B = 42{,}8$ мкТл.

152. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2$ м каждый, находящимся в вакууме на расстоянии $d = 10$ см друг от друга, в противоположном направлении течет ток $I_1 = 50$ А и $I_2 = 100$ А (рис. 42). Определить силу взаимодействия токов.

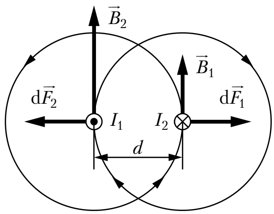


Рис. **42**

Дано:
$l = 2$ м
$d = 10$ см $= 0{,}1$ м
$I_1 = 50$ А
$I_2 = 100$ А

F — ?

Решение:

$$dF_1 = I_2 B_1 dl, \quad dF_2 = I_1 B_2 dl, \quad B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d},$$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d}, \quad dF_1 = dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl = dF,$$

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

Ответ: $F = 20$ мН.

153. По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток $I_1 = 10$ А. Под ним на расстоянии $R = 1{,}5$ см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток $I_2 = 1{,}5$ А. Определить, чему равна площадь поперечного сечения алюминиевого провода, при которой он будет удерживаться незакрепленным. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.

Дано:
$I_1 = 10$ А
$R = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
$I_2 = 1{,}5$ А
$\mu = 1$
$\rho = 2{,}7$ г/см$^3 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3

S — ?

Решение:

$$P = F$$

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi R} I_1 I_2 \Big|_{\mu=1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R},$$

$$P = mg, \quad \frac{mg}{l} = \frac{\rho V g}{l} = \rho S g,$$

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} = \rho S g, \quad S = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R \rho g}.$$

Ответ: $S = 7{,}55 \cdot 10^{-9}$ м^2.

154. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в центре круговой орбиты.

Дано:
$r = 52{,}8$ пм $= 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м

B — ?

Решение:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}, \quad (\widehat{\vec{v},\vec{r}}) = \frac{\pi}{2}, \quad \mu = 1,$$

$$|Q| = e, \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^2}, \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 rm}}, \quad B = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi r^2 \sqrt{\pi\varepsilon_0 rm}}.$$

Ответ: $B = 1{,}25 \cdot 10^{-23}$ Тл.

155. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по круговой орбите радиусом $R = 15$ см. Определить магнитный момент p_{m} эквивалентного кругового тока.

Дано:
$B = 2$ мТл $= 2 \cdot 10^{-3}$ Тл
$R = 15$ см $= 0{,}15$ м

p_m — ?

Решение:

$$p_m = IS, \quad S = \pi R^2, \quad I = \frac{e}{T}, \quad T = \frac{2\pi R}{v},$$

$$evB = \frac{mv^2}{R}, \quad v = \frac{eBR}{m}, \quad p_m = \frac{ev}{2\pi R} = \frac{e^2BR^2}{2m}.$$

Ответ: $p_m = 0{,}632$ пА · м^2.

156. Через сечение медной пластинки толщиной $d = 0{,}2$ мм пропускается ток $I = 6$ А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока (рис. 43). Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определить возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см^3.

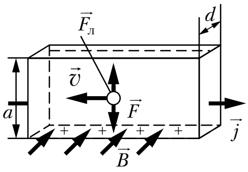


Рис. **43**

Дано:
$d = 0{,}2$ мм $= 2 \cdot 10^{-4}$ м
$I = 6$ А
$B = 1$ Тл
$\rho = 8{,}93$ г/см$^3 = 8930$ кг/м^3
$n = n'$
$M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\Delta\varphi$ — ?

Решение:

$$eE_B = e\frac{\Delta\varphi}{a} = evB, \quad \Delta\varphi = vBa,$$

$$I = jS = nev \cdot ad, \quad S = ad,$$

$$\Delta\varphi = \frac{IBa}{nead} = \frac{1}{en}\frac{IB}{d},$$

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{\rho N_A}{M}, \quad \Delta\varphi = \frac{MIB}{e\rho N_A d}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 2{,}21$ мкВ.

157. По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I = 10$ А. Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, магнитную индукцию B в точке, расположенной на расстоянии $r = 10$ см от проводника (рис. 44).

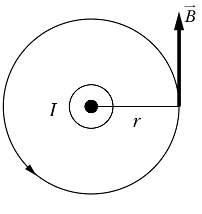


Рис. **44**

Дано:
$I = 10$ А
$r = 10$ см $= 0{,}1$ м

B — ?

Решение:

$$\oint_L B_l \, dl = \mu_0 \sum_i I_i, \quad B_l = B,$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Ответ: $B = 20$ мкТл.

158. Определить, пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, если по обмотке тороида, содержащей 200 витков, протекает ток 2 А. Внешний диаметр тороида $D_1 = 60$ см, внутренний $D_2 = 40$ см (рис. 45).

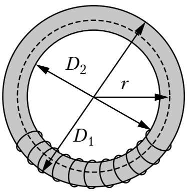


Рис. **45**

Дано:
$N = 200$
$I = 2$ А
$D_1 = 60$ см $= 0{,}6$ м
$D_2 = 40$ см $= 0{,}4$ м

B — ?
H — ?

Решение:

$$\oint_L B_l \, dl = \mu_0 \sum_i I_i,$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}, \quad H = \frac{B}{\mu_0}.$$

Ответ: $B = 0{,}32$ мТл; $H = 255$ А/м.

Задачи для самостоятельного решения

159. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 25$ см^2. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60°. Определить вращающий момент, действующий на рамку, если по ней течет ток $I = 1$ А.

160. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл находится прямой проводник длиной $l = 15$ см, по которому течет ток $I = 5$ А. На проводник действует сила $F = 0{,}13$ Н. Определить угол α между направлением тока и вектором магнитной игдукции.

161. Электрон движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 0{,}2$ Мм/с. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии $r = 2$ нм от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона и составляющей угол $\alpha = 45°$ со скоростью движения электрона.

162. Электрон, обладая скоростью $v = 10$ Мм/с, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ мТл. Определить нормальное и тангенциальное ускорения электрона.

163. В случае эффекта Холла для натриевого проводника при плотности тока $j = 150$ А/см^2 и магнитной индукции $B = 2$ Тл напряженность поперечного электрического поля $E = 0{,}75$ мВ/м. Определить концентрацию электронов проводимости, а также ее отношение к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0{,}97$ г/см^3.

164. Соленоид длиной $l = 0{,}5$ м содержит $N = 1000$ витков. Определить магнитную индукцию B поля внутри соленоида, если сопротивление его обмотки $R = 120$ Ом, а напряжение на ее концах $U = 60$ В.

165. Поток магнитной индуции сквозь поперечное сечение соленоида (без сердечника) равен $\Phi = 1$ мкВб. Длина соленоида $l = 12{,}5$ см. Определить магнитный момент p_{m} соленоида.

ОТВЕТЫ: **159.** 217 мкН · м. **160.** 60°. **161.** 566 мк Тл. **162.** $a_n = \mathrm{const} = 1.76 \cdot 10^{14}$ м/с^2; $a_\tau = 0$. **163.** $2{,}5 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$; 0,984. **164.** 1,26 мТл. **165.** 0,1 А · м^2.

3.4. Электромагнитная индукция

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Электромагнитная индукция
- Индукционный ток
- Закон Фарадея
- Правило Ленца
- Электродвижущая сила электромагнитной индукции
- Индуктивность контура
- Самоиндукция
- Экстратоки самоиндукции
- Время релаксации
- Взаимная индукция
- Трансформаторы
- Энергия магнитного поля

Основные формулы

Закон Фарадея

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

[$\mathscr{E}_i$ — ЭДС электромагнитной индукции].

ЭДС индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B,

$$\mathscr{E}_i = BS\omega\sin\omega t$$

[ωt — мгновенное значение угла между вектором $\vec{B}$ и вектором нормали $\vec{n}$ к плоскости рамки].

Магнитный поток, создаваемый током I в контуре,

$$\Phi = LI$$

[L — индуктивность контура].

Закон Фарадея применительно к самоиндукции

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

[L — индуктивность контура].

Индуктивность соленоиа

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2 S}{l}$$

[μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды; N — число витков соленоида; l — его длина; S — площадь поперечного сечения].

Сила тока при размыкании и замыкании цепи, содержащей источник тока, резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L,

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ (размыкание)},$$

$$I = I_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_0 (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \text{ (замыкание)}$$

[I_0 — установившаяся сила тока; $\tau = \frac{L}{R}$ — время релаксации].

ЭДС взаимной индукции

$$\mathscr{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

[L — взаимная индуктивность контуров].

Взаимная индуктивность двух катушек (с числом витков N_1 и N_2), намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S$$

[l — длина сердечника по средней линии; S — площадь поперечного сечения сердечника].

Коэффициент трансформации

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

[N, $\mathscr{E}$, I — число витков, ЭДС и сила тока в обмотках трансформатора соответственно].

Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре индуктивностью L, по которому течет ток I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

[W — энергия однородного магнитного поля; V — объем соленоида; B — магнитная индукция; H — напряженность магнитного поля].

Примеры решения задач

166. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл равномерно вращается катушка, содержащая $N = 600$ витков, с частотой $n = 6\ \text{с}^{-1}$. Площадь S поперечного сечения катушки 100 см^2. Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Определить максимальную ЭДС индукции вращающейся катушки.

Дано:
$B = 0{,}2$ Тл
$N = 600$
$n = 6\ \text{с}^{-1}$
$S = 100\ \text{см}^2 = 10^{-2}\ \text{м}^2$

$\mathscr{E}_{i\,\max}$ — ?

Решение:

$$\mathscr{E}_i = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \quad \Phi = BS\cos\omega t, \quad \omega = 2\pi n,$$

$$\Phi = BS\cos 2\pi nt,$$

$$\mathscr{E}_i = -NBS\cdot 2\pi n(-\sin 2\pi nt) =$$

$$= 2\pi nNBS\sin 2\pi nt,$$

$$\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_{i\max} \text{ при } \sin 2\pi nt = 1,$$

$$\mathscr{E}_{i\max} = 2\pi nNBS.$$

Ответ: $\mathscr{E}_{i\,\max} = 45{,}2$ В.

167. Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм · м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца $D = 30$ см, диаметр провода $d = 2$ мм. Определить скорость изменения магнитного поля, если сила тока в кольце $I = 1$ А.

Дано:
$\rho = 26\ \text{нОм}\cdot\text{м} = 2{,}6\cdot 10^{-8}\ \text{Ом}\cdot\text{м}$
$D = 30\ \text{см} = 0{,}3\ \text{м}$
$d = 2\ \text{мм} = 2\cdot 10^{-3}\ \text{м}$
$I = 1$ А

$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ — ?

Решение:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \quad l = \pi D, \quad S = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$\mathscr{E}_i = IR,$$

$$\left|\mathscr{E}_i\right| = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS) = S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \frac{\pi D^2}{4}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

$$\left|\frac{dB}{dt}\right| = \frac{4\mathscr{E}_i}{\pi D^2} = \frac{4IR}{\pi D^2} = \frac{16I\rho}{\pi d^2 D}.$$

Ответ: $\frac{dB}{dt} = 0{,}11$ Тл/с.

168. В катушке длиной $l = 0{,}5$ м, диаметром $d = 5$ см и числом витков $N = 1500$ сила тока равномерно увеличивается на 0,2 А за 1 с. На катушку надето кольцо из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм · м) площадью сечения $S_к = 3$ мм^2. Определить силу тока в кольце.

Дано:
$l = 0{,}5$ м
$d = 5$ см $= 0{,}05$ м
$N = 150$
$\frac{dI}{dt} = 0{,}2$ А/с
$\rho = 17$ нОм · м $= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
$S_к = 3$ мм$^2 = 3 \cdot 10^{-6}$ м^2

$I_к$ — ?

Решение:

$$\mathscr{E}_{is} = -L\frac{dI}{dt}, \quad L = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{l},$$

$$\left|\mathscr{E}_{is}\right| = \mu_0\mu\frac{N^2\pi d^2}{4l}\left|\frac{dI}{dt}\right|,$$

$$\left|\mathscr{E}_к\right| = \frac{\left|\mathscr{E}_{is}\right|}{N} = \mu_0\mu\frac{N\pi d^2}{4l}\frac{dI}{dt},$$

$$I_к = \frac{\left|\mathscr{E}_к\right|}{R}, \quad R = \frac{\rho I_к}{S_к}, \quad I_к = \pi d,$$

$$I_к = \frac{\left|\mathscr{E}_к\right| S_к}{\pi\rho d}, \quad I_к = \mu_0\mu\frac{NS_к d}{4l\rho}\frac{dI}{dt}.$$

Ответ: $I_к = 1{,}66$ мА.

169. Определить, сколько витков проволоки, вплотную прилегающих друг к другу, диаметром $d = 0{,}5$ мм с изоляцией ничтожной толщины надо намотать на картонный цилиндр диаметром $D = 1{,}5$ см, чтобы получить однослойную катушку индуктивностью $L = 100$ мкГн.

Дано:
$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м
$D = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м
$L = 100$ мкГн $= 10^{-4}$ Гн
$\mu = 1$

N — ?

Решение:

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2 S}{l}, \quad S = \frac{\pi D^2}{4}, \quad l = Nd,$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu N \pi D^2}{4d}, \quad N = \frac{4dL}{\mu_0 \mu \pi D^2}.$$

Ответ: $N = 225$.

170. Катушка индуктивностью $L = 1{,}5$ Гн и сопротивлением $R_1 = 15$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 150$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику, электродвижущая сила которого $\mathscr{E} = 60$ В, через ключ K(рис. 46). Определить напряжения на зажимах катушки через $t_1 = 0{,}01$ с и $t_2 = 0{,}1$ с после размыкания цепи.

Дано:
$L = 1{,}5$ Гн
$R_1 = 15$ Ом
$R_2 = 150$ Ом
$\mathscr{E} = 60$ В
$t_1 = 0{,}01$ с
$t_2 = 0{,}1$ с

U_1 — ?
U_2 — ?

Решение:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R_1}, \quad I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad R = R_1 + R_2,$$

$$U = IR_2, \quad U_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1} R_2 e^{-\frac{R}{L}t_1},$$

$$U_2 = \frac{\mathscr{E}}{R_1} R_2 e^{-\frac{R}{L}t_2}.$$

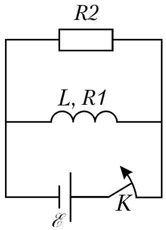


Рис. **46**

Ответ: $U_1 = 200$ В; $U_2 = 0{,}01$ В.

171. Трансформатор с коэффициентом трансформации 0,15 понижает напряжение с 220 до 6 В. При этом сила тока во вторичной обмотке равна 6 А. Пренебрегая потерями энергии в первичной обмотке, определить сопротивление вторичной обмотки трансформатора.

Дано:
$N_2/N_1 = 0{,}15$
$U_1 = 220$ В
$U_2 = 6$ В
$I_2 = 6$ А

R_2 — ?

Решение:

$$\mathscr{E}_1 = U_1, \quad \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}, \quad \mathscr{E}_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1,$$

$$\mathscr{E}_2 = I_2 R_2 + U_2, \quad R_2 = \frac{\mathscr{E}_2 - U_2}{I_2},$$

$$R_2 = \frac{N_2 U_1 / N_1 - U_2}{I_2}.$$

Ответ: $R_2 = 4{,}5$ Ом.

172. Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм имеет длину $l = 0{,}4$ м и поперечное сечение $S = 50$ см^2. Какой ток течет по обмотке при напряжении $U = 10$ В, если за время $t = 0{,}5$ мс в обмотке выделяется количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считать однородным.

Дано:
$N = 1$
$d = 0{,}5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-4}$ м
$l = 0{,}4$ м
$S = 50 \text{ см}^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^2
$U = 10$ В
$t = 0{,}5 \text{ мс} = 5 \cdot 10^{-4}$ с
$Q = W$

I — ?

Решение:

$$Q = W, \quad Q = IUt, \quad W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V\bigg|_{\mu=1} = \frac{B^2}{2\mu_0}V,$$

$$V = Sl, \quad L = Nd, \quad N = \frac{l}{d}, \quad B = \mu_0\frac{NI}{d} = \mu_0\frac{I}{d},$$

$$W = \frac{\mu_0^2 I^2 S l}{d^2 \cdot 2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 S l}{2d^2}, \quad IUt = \frac{\mu_0 I^2 S l}{2d^2}, \quad I = \frac{2Utd^2}{\mu_0 S l}.$$

Ответ: $I = 995$ мА.

173. Тороид с воздушным сердечником содержит 20 витков на 1 см. Определить объемную плотность энергии в тороиде, если по его обмотке протекает ток 3 А.

Дано:
$N/l = 20 \text{ см}^{-1} = 2 \cdot 10^3$ м$^{-1}$
$I = 3$ А

w — ?

Решение:

$$w = \frac{W}{V}, \quad w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}\bigg|_{\mu=1} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

$$\oint_L B_l \, \mathrm{d}l = \mu_0 NI, \quad Bl = \mu_0 NI, \quad B = \mu_0\frac{N}{l}I,$$

$$w = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{2\mu_0 l^2} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{N}{l}\right)^2 I^2.$$

Ответ: $w = 22{,}6$ Дж/м^3.

Задачи для самостоятельного решения

174. В магнитное поле, изменяющееся по закону $B = B_0\cos\omega t$ ($B_0 = 0{,}1$ Тл, $\omega = 4$ с$^{-1}$), помещена квадратная рамка со стороной $a = 50$ см, причем нормаль к рамке образует с направлением поля угол $\alpha = 45°$. Определить ЭДС индукции, возникающую в рамке в момент времени $t = 5$ с.

175. В однородном магнитном поле (B=0,2 Тл) равномерно с частотой $n = 600$ мин$^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N = 1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную ЭДС, индуцируемую в рамке.

176. Катушка длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 5$ см содержит $N = 200$ витков. Сила тока, текущего по катушке, $I = 1$ А. Определить: 1) индуктивность катушки; 2) магнитный поток, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

177. Имеется катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и сопротивлением $R = 0{,}8$ Ом. Определить, во сколько раз уменьшится сила тока в катушке через $t = 30$ мс, если источник тока отключить и катушку замкнуть накоротко.

178. Трансформатор, понижающий напряжение с 220 до 12 В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 2000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0{,}15$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определить число витков во вторичной обмотке, если во внешнюю цепь (в сети пониженного напряжения) передают мощность $P = 20$ Вт.

179. Обмотка электромагнита, находясь под постоянным напряжением, имеет сопротивление $R = 15$ Ом и индуктивность $L = 0{,}3$ Гн. Определить промежуток времени, в течение которого в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике.

180. Два соленоида ($L_1 = 0{,}64$ Гн, $L_2 = 1$ Гн) одинаковой длины и равного сечения вставлены один в другой. Определить взаимную индуктивность соленоида.

181. Индуктивность соленоида при длине 1 м и площади поперечного сечения 20 см^2 равна 0,4 мГн. Определить силу тока в соленоиде, при которой объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна 0,1 Дж/м^3.

ОТВЕТЫ: **174.** $\mathscr{E}_i = B_0 a^2 \omega \cos\alpha \sin\omega t = 64$ мВ. **175.** $\mathscr{E}_{i\,\max} = 2\pi nNBS = 151$ В. **176.** 1) 197 мкГн; 2) 985 нВб. **177.** В 1,27 раза.

177. $N_2 = \left(\dfrac{PR_2}{U_2} + U_2\right)\dfrac{N_1}{U_1} = 111.$ **179.** 0,01 с. **180.** $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = 0{,}8$ Гн.

181. $I = \sqrt{2wSl/L} = 1$ А.

3.5. Магнитные свойства вещества

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Магнитные моменты электронов и атомов
- Гиромагнитное отношение орбитальных моментов
- Гиромагнитное отношение спиновых моментов
- Магнетики
- Диамагнетики
- Парамагнетики
- Намагниченность
- Магнитное поле в веществе
- Магнитная восприимчивость вещества
- Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)
- Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$
- Ферромагнетики

Основные формулы

Связь между орбитальным магнитным $\vec{p}_{\mathrm{m}}$ и орбитальным механическим $\vec{L}_l$ моментами электрона

$$\vec{p}_{\mathrm{m}} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_l = \mathrm{g}\vec{L}_l$$

[$g = e/(2m)$ — гиромагнитное отношение орбитальных моментов].

Намагниченность

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_{\mathrm{m}}}{V} = \frac{\sum \vec{p}}{V}$$

[$\vec{p}_{\mathrm{m}} = \sum \vec{p}$ — магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул].

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

[χ — магнитная восприимчивость вещества].

Связь между векторами $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0(\vec{H} + \chi \vec{J}) = \mu_0(1 + \chi \vec{H}).$$

Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$)

$$\oint_L \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0(I + I')$$

[$\mathrm{d}\vec{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l — составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру L произвольной формы; I и I' — соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром].

Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I$$

[I — алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L].

Условия на границе раздела двух магнетиков при отсутствии на границе тока проводимости

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

[H_τ, B_τ, и H_n, B_n — соответственно тангенциальные и нормальные составляющие векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$; μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости].

Примеры решения задач

182. Соленоид длиной $l = 20$ см, площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 и общим числом витков $N = 400$ находится в диамагнитной среде. Определить силу тока в обмотках соленоида, если его индуктивность $L = 1$ мГн, а намагниченность J внутри соленоида равна 20 А/м.

Дано:
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м
$S = 10$ см$^2 = 10^{-3}$ м^2
$N = 400$
$L = 1$ мГн $= 10^{-3}$ Гн
$J = 20$ А/м

I — ?

Решение:

$$J = \chi H, \quad \mu = 1 + \chi, \quad J = (\mu - 1)H,$$

$$\oint_L \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L H_l\,\mathrm{d}l = \sum_k I_k, \quad Hl = NI,$$

$$H = \frac{NI}{l}, \quad L = \mu_0\mu\frac{N^2 S}{l}, \quad \mu = \frac{LI}{\mu_0 N^2 S},$$

$$J = \left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)\frac{NI}{l}, \quad I = \frac{Jl}{N\left(\frac{Ll}{\mu_0 N^2 S} - 1\right)}.$$

Ответ: $I = 2{,}09$ А.

183. На железный сердечник в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (рис. 47). Магнитная проницаемость железа для данных условий $\mu = 500$. При силе тока через обмотку $I = 4$ А магнитная индукция в прорези $B_0 = 1{,}5$ Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определить напряженность магнитного поля для данных условий.

Дано:
$d = 70$ мм $= 7 \cdot 10^{-2}$ м
$N = 600$
$b = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$I = 4$ А
$\mu = 500$
$B_0 = 1{,}5$ Тл

1) H — ?
2) H_0 — ?

Решение:

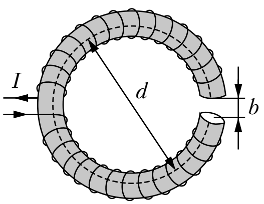


Рис. **47**

$$\oint_L H_l \, dl = NI, \quad H_l = H, \quad H(\pi d - b) + H_0 b = NI,$$

$$B = B_0, \quad B = \mu_0 \mu H, \quad B_0 = \mu_0 H_0, \quad \mu_0 \mu H = \mu_0 H_0,$$

$$H_0 = \mu H, \quad (\pi d - b)H + b\mu H = NI,$$

$$H = \frac{NI}{(\pi d - b) + \mu b}, \quad H_0 = \frac{\mu NI}{(\pi d - b) + \mu b}.$$

Ответ: 1) $H = 2{,}48$ кА/м; 2) $H_0 = 1{,}24$ МА/м.

Задачи для самостоятельного решения

184. Принимая, что электрон в невозбужденном атоме водорода движется по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм, определить: 1) магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока; 2) орбитальный механический момент L_l электрона; 3) исходя из полученных числовых значений, гиромагнитное отношение орбитальных моментов, доказав, что оно совпадает со значением, определяемым универсальными постоянными.

185. По обмотке соленоида индуктивностью $L = 3$ мГн, находящегося в диамагнитной среде, течет ток $I = 0{,}4$ А. Соленоид имеет длину $l = 45$ см, площадь поперечного сечения $S = 10$ см^2 и число витков $N = 1000$. Определить внутри соленоида: 1) магнитную индукцию; 2) намагниченность.

ОТВЕТЫ: **184.** 1) $p_{\mathrm{m}} = \frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}} = 9{,}25 \cdot 10^{-24}\ \text{А} \cdot \text{м}^2$;

2) $L_l = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{mr}{\pi\varepsilon_0}} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$; 3) $g = 87{,}8$ ГКл/кг.

185. 1) $B = \frac{LI}{NS} = 1{,}2$ мТл; 2) $J = \left(\frac{Ll}{N^2 S \mu_0} - 1\right)\frac{NI}{l} = 66$ А/м.

3.6. Основы теории Максвелла

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

- Вихревое электрическое поле
- Ток смещения
- Плотность тока смещения
- Полный ток
- Плотность полного тока
- Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ в интегральной и дифференциальной формах
- Уравнения Максвелла в интегральной форме для стационарных полей

Основные формулы

Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}_B$ поля, возбуждаемого переменным магнитным полем,

$$\int_L \vec{E}_B \, \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \mathrm{d}\vec{S}$$

Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

[$\vec{D}$ — электрическое смещение; $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ — плотность тока смещения в вакууме; $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ — плотность тока поляризации].

Плотность полного тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

[$\vec{j}$ — плотность тока проводимости; $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — плотность тока смещения].

Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} \, \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\vec{S}$$

[$\vec{j}$ — плотность тока проводимости; $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ — плотность тока смещения; S — поверхность, натянутая на замкнутый контур L].

Уравнения Максвелла

- в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V,$$

$$\oint_L \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\vec{S}, \qquad \oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0;$$

- в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma\vec{E}$$

[ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости; γ — удельная проводимость вещества].

Уравнения Максвелла для стационарных полей в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = 0, \quad \int_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = Q,$$

$$\oint_L \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = I, \quad \oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

Раздел IV

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Механические колебания

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

- Колебания
- Свободные (собственные) колебания
- Гармонические колебания
- Период колебаний
- Период гармонических колебаний
- Уравнение гармонических колебаний
- Дифференциальное уравнение гармонических колебаний
- Метод вращающегося вектора амплитуды
- Гармонический осциллятор
- Пружинный маятник
- Физический маятник
- Математический маятник
- Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты
- Биения
- Сложение взаимно перпендикулярных колебаний
- Добротность колебательной системы
- Затухающие колебания
- Декремент затухания
- Логарифмический декремент затухания
- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний
- Автоколебания
- Вынужденные колебания
- Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний
- Резонанс

Основные формулы

Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[x — смещение колеблющейся точки от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ — частота; T — период колебаний; φ_0 — начальная фаза].

Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \pi + \varphi)$$

[A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — начальная фаза].

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m,

$$F = -m\omega_0^2 x$$

[ω_0 — круговая частота; x — смещение точки из положения равновесия].

Кинетическая энергия точки, совершающей прямолинейные гармоничные колебания,

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

[m — масса материальной точки; v — ее скорость; A — амплитуда колебаний; ω_0 — круговая частота; φ — начальная фаза].

Потенциальная энергия точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F,

$$\Pi = -\int_0^x F\,dx = \int_0^x m\omega_0^2 x\,dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

[m — масса материальной точки; ω_0 — круговая частота; x — смещение точки от положения равновесия; A — амплитуда колебаний; φ — начальная фаза].

Механическая энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

[x — смещение материальной точки из положения равновесия; k — упругость; ω_0 — циклическая частота].

Решение этого уравнения

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[A — амплитуда колебаний; φ — начальная фаза].

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

[l — длина маятника; g — ускорение свободного падения].

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

[m — масса пружинного маятника; k — жесткость пружины].

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

[J — момент инерции маятника относительно оси колебаний; l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J/(ml)$ — приведенная длина физического маятника; g — ускорение свободного падения].

Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Начальная фаза результирующего колебания

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

[A_1 и A_2 — амплитуды двух складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 — начальные фазы колебаний].

Период биений

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

[$\Delta\omega$ — разность частот складываемых колебаний, $\Delta\omega \ll \omega$].

Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты (уравнение эллипса, ориентированного относительно координатных осей произвольно),

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

[A и B — амплитуды складываемых колебаний; φ — разность фаз обоих колебаний].

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

[x — смещение колеблющегося тела из положения равновесия; $\delta = \dfrac{r}{2m}$ — коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ — собственная частота той же колебательной систем; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота затухающих колебаний; $A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}$ —амплитуда затухающих колебаний].

Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \mathrm{e}^{\delta T}$$

[$A(t)$ и $A(t + T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период].

Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

[$A(t)$ и $A(t + T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период; δ — коэффициент затухания; T — период затухающих колебаний; τ — время релаксации; N_e — число колебаний, совершаемых за время амплитуды в e раз].

Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

[Θ — логарифмический декремент затухания; ω_0 — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; δ — коэффициент затухания].

Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение для установившихся колебаний

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \quad x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

[x — смещение колеблющегося тела из положения равновесия; F_0 — амплитуда вынуждающей силы; m — масса тела];

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

[ω_0 — собственная частота той же колебательной системы; ω — частота внешней вынуждающей силы; δ — коэффициент затухания].

Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\delta_0^2 - 2\delta^2}, \quad A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

[ω_0 — собственная частота колебательной системы; δ — коэффициент затухания; F_0 — амплитуда внешней вынуждающей силы; m — масса тела].

Примеры решения задач

186. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения $x_0 = 2$ см.

Дано:
$A = 4\text{ см} = 4 \cdot 10^{-2}$ м
$T = 2$ с
$x_0 = 2\text{ см} = 2 \cdot 10^{-2}$ м

$x(t)$ — ?

Решение:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad t = 0, \quad x_0 = A\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A} = 0{,}5, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \text{ м.}$$

Ответ: $x(t) = 0{,}04\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

187. Материальная точка массой m = 10 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0,2 Гц. Амплитуда колебаний равна 5 см. Определить: 1) максимальную силу, действующую на точку; 2) полную энергию колеблющейся точки.

Дано:
$m = 10\text{ г} = 10^{-2}$ кг
$\nu = 0{,}2$ Гц
$A = 5\text{ см} = 5 \cdot 10^{-2}$ м

1) $F_{\max}$ — ?
2) E — ?

Решение:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$F = ma = -A\omega_0^2 m\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$F = F_{max} \quad \text{при} \quad \cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm 1, \quad \omega_0 = 2\pi\nu,$$

$$F_{max} = A\omega_0^2 m = 4\pi^2\nu^2 Am, \quad E = T_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

Ответ: 1) $F_{max} = 0{,}8$ мН; 2) $E = 19{,}7$ мкДж.

188. Полная энергия E гармонически колеблющейся точки равна 10 мкДж, а максимальная сила F_{max}, действующая на точку, равна –0,5 мН. Написать уравнение движения этой точки, если период колебаний $T = 4$ с, а начальная фаза $\varphi = \pi/6$.

Дано:
$E = 10$ мкДж $= 10^{-5}$ Дж
$F_{max} = -0{,}5$ мН
$T = 4$ с
$\varphi = \pi/6$

$x(t)$ — ?

Решение:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}, \quad |F_{max}| = mA\omega_0^2,$$

$$\frac{E}{|F_{max}|} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2mA\omega_0^2} = \frac{A}{2}, \quad A = \frac{2E}{F_{max}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Ответ: $x(t) = 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$, м.

189. На горизонтальной пружине жесткостью $k = 800$ Н/м укреплен шар массой $M = 4$ кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения (рис. 48). Пуля массой $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v_0 = 600$ м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара.

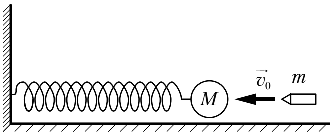


Рис. **48**

Дано:
$k = 800$ Н/м
$M = 4$ кг
$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг
$v_0 = 600$ м/с

1) A — ?
2) T — ?

Решение:

$$\frac{(M+m)v^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad mv_0 = (M+m)v, \quad v = \frac{mv_0}{M+m},$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2v_0^2}{(M+m)k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{(M+m)k}},$$

$$\frac{(M+m)A^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Ответ: 1) $A = 10$ см; 2) $T = 0{,}419$ с.

190. Однородный диск радиусом $R = 20$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l = 15$ см от центра диска. Определить период T колебаний диска относительно оси.

Дано:
$R = 20$ см $= 0{,}2$ м
$l = 15$ см $= 0{,}15$ м

T — ?

Решение:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \quad J = \frac{mR^2}{2} + ml^2,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + 2ml^2}{2mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2l^2}{2gl}}.$$

Ответ: $T = 1{,}07$ с.

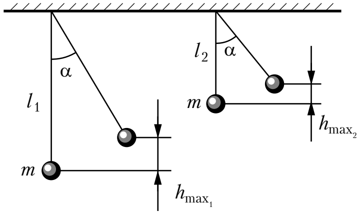


Рис. **49**

191. Два математических маятника (рис. 49) имеют одинаковые массы. Длины маятников отличаются в $n = 1{,}5$ раза. Маятники колеблются с одинаковой угловой амплитудой. Определить, какой маятник обладает большей энергией и во сколько раз.

Дано:
$m_1 = m_2 = m$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$
$l_1 = 1{,}5\, l_2$

E_1/E_2 — ?

Решение:

$$E = \Pi_{max}, \quad \Pi_{max} = mgh_{max},$$

$$h_{max} = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha),$$

$$E_1 = mgl_1(1 - \cos\alpha), \quad E_2 = mgl_2(1 - \cos\alpha), \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Ответ: $E_1/E_2 = 1{,}5$.

192. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемые уравнениями

$$x_1 = 3\cos 2\pi t, \text{ см},$$

$$x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4), \text{ см}.$$

Определить для результирующего колебания (рис. 50): 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Записать уравнение результирующего колебания и представить векторную диаграмму сложения амплитуд.

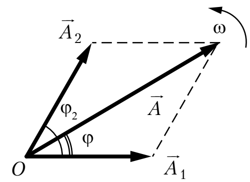


Рис. **50**

Дано:
$x_1 = 3\cos 2\pi t$, см
$x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$, см

1) A — ?
2) φ — ?
$x(t)$ — ?

Решение:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$\omega = 2\pi, \quad A_1 = A_2 = 3 \text{ см}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4},$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2} = \frac{\sin 0 + \sin\frac{\pi}{4}}{\cos 0 + \cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}414, \; \varphi = \frac{\pi}{8},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)},$$

$$x = 5{,}54\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{8}\right), \text{см}.$$

Ответ: 1) $A = 5{,}54$ см, 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$; $x(t) = 5{,}54\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{8}\right)$, см.

193. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos\pi t$ и $y = \cos\dfrac{\pi}{2}t$. Определить уравнение траектории точки.

Дано:
$x = \cos\pi t$
$y = \cos\dfrac{\pi}{2}t.$

$y(t)$ —?

Решение:

По условию задачи,

$$\begin{cases} x = \cos\pi t \\ y = \cos\dfrac{\pi}{2}t, \end{cases}$$

$$\cos \pi t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \sin^2 \frac{\pi}{2} t = \cos^2 \frac{\pi}{2} t - \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} t\right) = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 1 = 2y^2 - 1,$$

$$y = \sqrt{(x+1)/2}.$$

Ответ: $y(x) = \sqrt{(x+1)/2}$ — парабола.

194. Тело массой $m = 0{,}6$ кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью $k = 30$ Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний $\Theta = 0{,}01$. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний гири, при котором амплитуда колебаний также уменьшилась в 3 раза.

Дано:
$m = 0{,}6$ кг
$k = 30$ Н/м
$\Theta = 0{,}01$
$A_1/A_2 = 3$

1) t_1 — ?
2) N_1 — ?

Решение:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{A_1}{A_2} = e^{\delta t_1}, \quad \ln\frac{A_1}{A_2} = \delta t_1,$$

$$t_1 = \frac{1}{\delta}\ln\frac{A_1}{A_2}, \quad \delta = \frac{\Theta}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{\Theta}\sqrt{\frac{m}{k}}\ln\frac{A_1}{A_2}, \quad N_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{\Theta}\ln\frac{A_1}{A_2}.$$

Ответ: 1) $t_1 = 97{,}6$ с; $N_1 = 110$.

195. Определить резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмический декремент колебаний $\Theta = 0{,}2$.

Дано:
$\nu_0 = 300$ Гц
$\Theta = 0{,}2$

$\nu_{\text{рез}}$ — ?

Решение:

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\pi}, \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad \delta = \frac{\Theta}{T} = \frac{\Theta\omega_0}{2\pi},$$

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}}, \quad \nu_{\text{рез}} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}}.$$

Ответ: $\nu_{\text{рез}} = 299{,}7$ Гц.

196. Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}5$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1 \cos \omega t$, Н. Определить для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания δ; 2) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$.

Дано:
$m = 0{,}5$ кг
$k = 50$ Н/м
$r = 0{,}5$ кг/с
$F = 0{,}1 \cos \omega t$, Н

1) δ — ?
2) $A_{\text{рез}}$ — ?

Решение:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t, \quad \delta = \frac{r}{2m},$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad F_0 = 0{,}1 \text{ Н},$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\left(\frac{r}{2m}\right)m\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}.$$

Ответ: 1) $\delta = 0{,}5 \text{ с}^{-1}$; 2) $A_{\text{рез}} = 2$ см.

Задачи для самостоятельного решения

197. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определить: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через какой промежуток времени после начала отсчета точка пройдет через положение равновесия.

198. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 8$ см. Определить жесткость k пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия $T_{\max}$ груза составляет 0,8 Дж.

199. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определить массу m тела, подвешенного к пружине, если за $t = 1$ мин оно совершает 25 колебаний.

200. Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см, подвешенный на вбитый в стену гвоздь, колеблется в плоскости, параллельной стене. Определить период T колебаний обруча.

201. Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 16$ см, за одно и то же время совершают: один 10 колебаний, другой – 6 колебаний. Определить длину каждого маятника.

202. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода $T = 4$ с и одинаковой амплитуды $A = 5$ см составляет $\pi/4$. Напишите уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

203. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A \sin \omega t$ и $y = B \cos \omega t$, где A, B и ω — положительные постоянные. Определить уравнение траектории точки, вычертите ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории.

204. Амплитуда затухающих колебаний маятника за $t = 2$ мин уменьшилась в 2 раза. Определить коэффициент затухания δ.

205. Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определить частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_{рез} = 499$ Гц.

ОТВЕТЫ: **197.** 1) 2 см; 2) 2 с;) ; 4) 6,28 см/с; 5) 19,7 см/с^2; 6) $t = 0$, 1 с, 2 с, ... **198.** 250 Н/м. **199.** $m = \dfrac{kt^2}{4\pi^2 N^2} = 3{,}65$ кг. **200.** 2 с. **201.** 9 см; 25 см. **202.** $x = 9{,}24\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{8}\right)$, см. **203.** $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$, по часовой стрелке. **204.** $5{,}78 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$. **205.** 499,5 Гц.

4.2. Электромагнитные колебания

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

- Колебательный контур
- Свободные электромагнитные колебания
- Гармонические электромагнитные колебания
- Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре
- Собственная частота контура
- Формула Томсона
- Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в контуре
- Вынужденные колебания
- Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний
- Переменный ток
- Переменный ток, текущий через резистор сопротивлением R
- Переменный ток, текущий через катушку индуктивностью L
- Реактивное индуктивное сопротивление
- Переменный ток, текущий через конденсатор электроемкостью C
- Реактивное емкостное сопротивление
- Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор
- Полное сопротивление
- Реактивное сопротивление
- Мощность, выделяемая в цепи переменного тока
- Действующие значения силы тока и напряжения

Основные формулы

Собственная частота колебательного контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

[L — индуктивность катушки; C — электроемкость конденсатора].

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[Q_{m} — амплитуда колебаний заряда конденсатора; ω_0 — собственная частота контура].

Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления, индуктивностью L и электроемкостью контура C,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Сила тока в колебательном контуре и напряжение на конденсаторе в случае гармонических электромагнитных колебаний:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} = -\omega_0 Q_{\text{m}} \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_{\text{m}} \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_{\text{m}}}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_{\text{m}} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[$I_{\text{m}} = \omega_0 Q_{\text{m}}$ — амплитуда силы тока; $U_{\text{m}} = \dfrac{Q_{\text{m}}}{C}$ — амплитуда напряжения; ω_0 — собственная частота контура].

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в контуре и его решение

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad Q = Q_m\, \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

[$Q_{\text{m}}\mathrm{e}^{-\delta t}$ — амплитуда затухающих колебаний заряда конденсатора; Q_{m} — начальная амплитуда; частота $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$].

Добротность колебательного контура с активным сопротивлением R, индуктивностью L и электроемкостью контура C

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_{\text{m}}}{L}\cos\omega t, \quad Q = Q_{\text{m}} \cos(\omega t - \alpha)$$

[$Q_{\text{m}} = \dfrac{U_{\text{m}}}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}}$; α — сдвиг по фазе между зарядом и приложенным напряжением $U = U_{\text{m}}\cos\omega t$; R, L и C — соответственно активное сопротивление, индуктивность и электроемкость колебательного контура].

Резонансная частота и резонансная амплитуда заряда в случае электрического резонанса

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}, \quad (Q_{\text{m}})_{\text{рез}} = \frac{U_{\text{m}}/L}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

[ω_0 — собственная частота контура; δ — коэффициент затухания; R, L и C — соответственно активное сопротивление, индуктивность и электроемкость колебательного контура; U_{m} — амплитуда внешнего приложенного напряжения].

Резонансная частота и резонансная амплитуда силы тока в случае электрического резонанса

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (I_{\text{m}})_{\text{рез}} = \frac{U_{\text{m}}}{R}$$

[ω_0 — собственная частота контура; R, L и C — соответственно активное сопротивление, индуктивность и электроемкость колебательного контура; U_{m} — амплитуда внешнего приложенного напряжения].

Реактивное индуктивное сопротивление (индуктивное сопротивление)

$$R_L = \omega L$$

[ω — частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; L — индуктивность].

Реактивное емкостное сопротивление (емкостное сопротивление)

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

[ω — частота переменного напряжения, подаваемого на концы цепи; C — электроемкость].

Полное сопротивление цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и кондесатор электроемкостью C,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

[$R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = 1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление].

Реактивное сопротивление

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

[$R_L = \omega L$ — реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = 1/(\omega C)$ — реактивное емкостное сопротивление].

Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения:

$$I = \frac{I_\text{m}}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_\text{m}}{\sqrt{2}}$$

[I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения].

Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_\text{m} U_\text{m} \cos\varphi$$

[I_m и U_m — амплитудные значения силы тока и напряжения].

Коэффициент мощности

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}$$

[R — активное сопротивление цепи; ωL — реактивное индуктивное сопротивление; $\dfrac{1}{\omega C}$ — реактивное емкостное сопротивление].

Примеры решения задач

206. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 1{,}5$ см^2, число витков $N = 500$) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1{,}5$ мм, площадь пластин $S_2 = 100$ см). Определить частоту ω_0 собственных колебаний контура.

Дано:
$l = 5$ см $= 0{,}05$ м
$S_1 = 1{,}5$ см^2 $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^2
$N = 500$
$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$S_2 = 100$ см^2 $= 10^{-4}$ м^2
$\mu = 1$
$\varepsilon = 1$

ω_0 — ?

Решение:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S_1}{l}\bigg|_{\mu=1} = \mu_0 \frac{N^2 S_1}{l},$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S_2}{d}\bigg|_{\varepsilon=1} = \frac{\varepsilon_0 S_2}{d}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{ld}{\varepsilon_0 \mu_0 N^2 S_1 S_2}},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \omega_0 = \frac{c}{N}\sqrt{\frac{ld}{S_1 S_2}}.$$

Ответ: $\omega_0 = 4{,}24 \cdot 10^6$ рад/с.

207. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатора электроемкостью $C = 39{,}5$ мкФ. Заряд конденсатора $Q_m = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, записать: 1) уравнение изменения силы тока в цепи в зависимости от времени; 2) уравнение изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

Дано:
$L = 0{,}1$ Гн
$C = 39{,}5$ мкФ $= 3{,}95 \cdot 10^{-5}$ Ф
$Q_m = 3$ мкКл $= 3 \cdot 10^{-6}$ Кл
$R = 0$

1) $I(t)$ — ?
2) $U_C(t)$ — ?

Решение:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad Q = Q_m \cos \omega_0 t,$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -Q_m \omega_0 \sin \omega_0 t =$$

$$= Q_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos \omega_0 t.$$

Ответ: 1) $I = 1{,}5 \cos\left(160\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, мА; 2) $U_C = 76 \cos(160\pi t)$, мВ.

208. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10$ мГн, конденсатора электроемкостью $C = 0{,}1$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определить, через сколько полных колебаний амплитуда силы тока в контуре уменьшится в е раз.

Дано:
$L = 10$ мГн $= 10^{-2}$ Гн
$C = 0{,}1$ мкФ $= 10^{-7}$ Ф
$R = 20$ Ом
$I_{m0}/I_{mN} = e$

N — ?

Решение:

$$N = \frac{t}{N}, \quad \frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e^{\delta t}, \quad \frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e^1, \quad \delta t = 1,$$

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad t = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \delta^2},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \quad N = \frac{L}{\pi R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Ответ: $N = 5$.

209. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатора электроемкостью $C = 10$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 1$ Ом. Заряд кондесатора $Q_m = 1$ мКл. Определить: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний; 3) уравнение зависимости изменения напряжения на пластинах конденсатора от времени.

Дано:
$L = 25$ мГн $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Гн
$C = 10$ мкФ $= 10^{-5}$ Ф
$R = 1$ Ом
$Q_m = 1$ мКл $= 10^{-3}$ Кл

1) T — ?
2) Θ — ?
3) $U(t)$ — ?

Решение:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4l^2}}}, \quad \Theta = \delta T,$$

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

$$U(t) = \frac{Q_m}{C} e^{-\delta t} \cos\omega t.$$

Ответ: 1) $T = 3{,}14$ мс; 2) $\Theta = 0{,}063$; 3) $U(t) = 100\, e^{-20t} \cos 637\pi t$, В.

210. Определить логарифмический декремент затухания, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в $n = 8$ раз.

Дано:
$N = 5$
$n = \frac{W_0}{W_N} = 8$

Θ — ?

Решение:

$$\Theta = \delta t, \quad W = \frac{LI^2}{2}, \quad I = \sqrt{\frac{2W}{L}}, \quad \frac{I_0}{I_N} = \sqrt{\frac{W_0}{W_N}} = \sqrt{n},$$

$$\ln\frac{I_0}{I_N} = \delta NT, \quad \ln\sqrt{n} = N\Theta, \quad \Theta = \frac{\ln\sqrt{n}}{N}.$$

Ответ: $\Theta = 0{,}21$.

211. В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и активным сопротивлением $R = 9{,}7$ Ом, а также конденсатор электроемкостью $C = 40$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определить: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) разность фаз φ между силой тока и внешним напряжением; 3) амплитудное значение напряжения U_{L_m} на катушке; 4) амплитудное значение напряжения U_{C_m} на конденсаторе.

Дано:
$L = 0{,}2$ Гн
$R = 9{,}7$ Ом
$C = 40$ мкФ $= 4 \cdot 10^{-5}$ Ф
$U_m = 180$ В
$\omega = 314$ рад/с

1) I_m — ?
2) φ — ?
3) U_{L_m} — ?
4) U_{C_m} — ?

Решение:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R},$$

$$\boxed{C \to \infty} \quad U_{L_m} = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$\boxed{L \to 0, \quad R \to 0}$$

$$U_{C_m} = I_m \sqrt{[1/(\omega C)]^2} = I_m \frac{1}{\omega C}.$$

Ответ: 1) $I_m = 9{,}27$ А; 2) $\varphi = -60°$, сила тока опережает напряжение; 3) $U_{L_m} = 589$ В; 4) $U_{C_m} = 738$ В.

212. Колебательный контур содержит кондесатор электроемкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 5$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Определить среднюю мощность $\langle P \rangle$, потребляемую колебательным контуром, при поддержании в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденаторе $U_{m_C} = 10$ В.

Дано:
$C = 5$ нФ $= 5 \cdot 10^{-9}$ Ф
$L = 5$ мкГн $= 5 \cdot 10^{-6}$ Гн
$R = 0{,}1$ Ом
$U_{mC} = 10$ В

$\langle P \rangle$ — ?

Решение:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R, \quad I_m = \frac{U_{m_C}}{R_C}, \quad R_C = \frac{1}{\omega C},$$

$$I_m = U_{m_C} \omega C, \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_{m_C}^2 \omega^2 C^2 R, \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{RCU_{m_C}^2}{L}.$$

Ответ: $\langle P \rangle = 5$ мВт.

213. В сеть переменного тока с действующим значением напряжения 120 В последовательно включены проводник с активным сопротивлением 10 Ом и катушка индуктивностью 0,1 Гн. Определить частоту ν тока, если амплитудное значение силы тока в цепи равно 5 А.

Дано:
$U = 120$ В
$R = 10$ Ом
$L = 0{,}1$ Гн
$I_m = 5$ А

ν — ?

Решение:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad U_m = U\sqrt{2}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$I_m = \frac{\sqrt{2}\,U}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{2U^2}{I_m^2} - R^2} = 51{,}6 \text{ Гц}.$$

Ответ: $\nu = 51{,}6$ Гц.

Задачи для самостоятельного решения

214. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 1 мГн и кондесатора электроемкостью C = 2 нФ. Пренебрегая сопротивлением контура, определить, на какую длину волны этот контур настроен.

215. Конденсатор электроемкостью C зарядили до напряжения U_m и замкнули на катушку индуктивностью L. Пренебрегая сопротивлением контура, определить амплитудное значение силы тока в данном колебательном контуре.

216. В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушку индуктивностью L = 0,36 Гн и конденсатор электроемкостью C = 28 мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением U_m = 180 В и частотой ω = 314 рад/с. Определить: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) сдвиг φ по фазе между силой тока и внешним напряжением.

ОТВЕТЫ: **214.** $2{,}67 \cdot 10^3$ м. **215.** $I_m = U_m\sqrt{C / L}$. **216.** 1) $I_m = 4{,}5$ А; 2) $\varphi = -1°$.

4.3. Упругие волны

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

- Волновой процесс (волна)
- Упругие (или механические) волны
- Продольные волны
- Поперечные волны
- Упругая гармоническая волна
- Длина волны
- Волновой фронт
- Волновая поверхность
- Плоская волна
- Уравнение плоской волны
- Сферическая волна
- Уравнение сферической волны
- Волновое уравнение
- Бегущие волны
- Вектор плотности потока энергии
- Принцип суперпозиции (наложения) волн
- Фазовая скорость
- Дисперсия волн
- Диспергирующая среда
- Волновой пакет
- Групповая скорость
- Когерентность
- Когерентные волны
- Интерференция волн
- Стоячие волны
- Уравнение стоячей волны
- Звуковые (или акустические) волны
- Эффект Доплера

Основные формулы

Связь между длиной волны λ, периодом T колебаний и частотой ν

$$\lambda = vT, \quad v = \lambda\nu$$

[v — скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость)].

Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$

[λ — длина волны; v — фазовая скорость; T — период колебаний].

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси X,

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

[$\xi(x, t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A — амплитуда волны; ω — циклическая (круговая) частота; k — волновое число, φ_0 — начальная фаза колебаний].

Уравнение сферической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0)$$

[$\xi(r, t)$ — смещение точек среды на расстоянии r от центра волны в момент времени t; A_0 — постоянная величина; ω — циклическая частота; k — волновое число; φ_0 — начальная фаза колебаний].

Волновое уравнение

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

[$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; v — фазовая скорость].

Волновое уравнение для плоской волны, распространяющейся вдоль оси X,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Фазовая (v) и групповая (u) скорости и связь между ним

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad u = \frac{d\omega}{dk}, \quad u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

[ω — циклическая частота; k — волновое число; λ — длина волны].

Связь между разностью фаз δ и разностью хода волн Δ:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta.$$

Условия максимума и минимума амплитуды при интерференции волн

$$\Delta_{\max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad \Delta_{\min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

[$m = 0, 1, 2, ...$; λ — длина волны].

Уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

Координаты пучностей и узлов стоячей волны

$$x_{\text{п}} = \pm m\frac{\lambda}{2}, \quad x_{\text{у}} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ ...).$$

Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{\text{пр}})\nu_0}{v \mp v_{\text{ист}}}$$

[ν — частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 — частота звука, посылаемая источником; $v_{\text{пр}}$ — скорость движения приемника; $v_{\text{ист}}$ — скорость движения источника; v — скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак — в случае их взаимного удаления].

Примеры решения задач

217. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси X в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 10$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 7$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 3\pi/5$. Амплитуда волны $A = 5$ см. Определить: 1) длину волны λ; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_2 второй точки в момент времени $t = 2$ с.

Дано:
$v = 10$ м/с
$x_1 = 7$ м
$x_2 = 10$ м
$\Delta\varphi = 3\pi/5$
$A = 5$ см $= 0{,}05$ м
$t = 2$ с

1) λ — ?
2) $\xi(x, t)$ — ?
3) ξ_2 — ?

Решение:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1), \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1),$$

$$\xi(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{\lambda}{v}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda},$$

$$\xi_2 = A\cos\left(\omega t_2 - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Ответ: 1) $\lambda = 10$ м; 2) $\xi(x,t) = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$, м; 3) $\xi_2 = 5$ см.

218. Определить разность фазовой и груповой скоростей для частоты $\nu = 800$ Гц, если фазовая скорость задается выражением $v = a_0 / \sqrt{\nu + b}$, где $a_0 = 24$ м $\cdot$ с$^{-3/2}$, $b = 100$ Гц.

Дано:
$\nu = 800$ ц
$v = a_0 / \sqrt{\nu + b}$,
$a_0 = 24$ м $\cdot$ с$^{-3/2}$
$b = 100$ Гц

u — ?

Решение:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = 2\pi\frac{d\nu}{dk} = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}, \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{a_0}{\nu\sqrt{\nu + b}},$$

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1{,}5\nu + b}{a_0\sqrt{\nu + b}}d\nu,$$

$$u = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\nu\, a_0\sqrt{\nu + b}}{(1{,}5\nu + b)d\nu} = \frac{a_0\sqrt{\nu + b}}{1{,}5\nu + b}.$$

Ответ: $u = 0{,}55$ м/с.

219. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 400$ Гц. Скорость распространения колебаний в среде $v = 1$ км/с. Определить, при какой наименьшей разности хода будет наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослаблений колебаний.

Дано:
$\nu = 400$ Гц
$v = 1$ км/с $= 10^3$ м/с

Δ_{max} — ?
Δ_{min} — ?

Решение:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

$$\Delta_{max} = 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, \quad \Delta_{max} = \frac{v}{\nu},$$

$$\Delta_{min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \quad \Delta_{min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2\nu}.$$

Ответ: 1) $\Delta_{max} = 2{,}5$ м; 2) $\Delta_{min} = 1{,}25$ м.

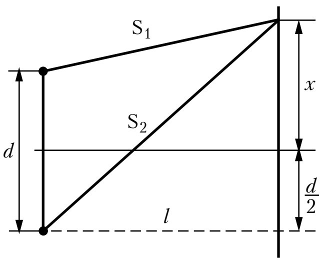


Рис. **51**

220. Два динамика расположены на расстоянии $d = 2{,}5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, который регистрируется приемником, находящимся на расстоянии $l = 3{,}5$ м от центра динамиков (рис. 51). Если приемник передвинуть от центральной линии параллельно динамикам на расстояние $x = 1{,}55$ м, то он фиксирует первый интерференционный мимумум. Скорость звука $v = 340$ м/с. Определить частоту звука.

Дано:
$d = 2{,}5$ м
$l = 3{,}5$ м
$x = 1{,}55$ м
$v = 340$ м/с

ν — ?

Решение:

$$\nu = \frac{v}{\lambda}, \quad \Delta_{\min} = s_2 - s_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \quad \Delta_{\min} = \frac{\lambda}{2},$$

$$s_1 = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \quad s_2 = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2},$$

$$\nu = \frac{v}{2(s_2 - s_1)}, \quad \nu = \frac{v}{2\left(\sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} + \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}\right)}.$$

Ответ: $\nu = 175$ Гц.

221. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определить характер колебаний в любой точке стержня.

Дано:
$\xi = A\cos\omega t$
среда более плотная

$\xi(x, t)$ — ?

Решение:

$$\xi_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\xi_2 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \pi\right] = -A\cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

$$\xi(x,t) = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) - A\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{v}\right) =$$

$$= A\left[\cos\omega t\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\sin\frac{\omega x}{v} - \cos\omega t\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\sin\frac{\omega x}{v}\right] =$$

$$= 2A\sin\frac{\omega x}{v}\sin\omega t, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \lambda = vT, \quad \frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda}x = \frac{2\pi}{\lambda}x,$$

$$\xi(x,t) = 2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\omega t$$ — уравнение стоячей волны.

При $x = \pm m\frac{\lambda}{2}$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ — узлы.

При $x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ — пучности.

222. Наблюдатель, стоящий на станции, слышит гудок проходящего электровоза. Когда электровоз приближается, частота звуковых колебаний гудка равна ν_1, а когда удаляется — ν_2. Принимая, что скорость v звука известна, определить: 1) скорость $v_{\text{ист}}$ электровоза; 2) собственную частоту ν_0 колебаний гудка.

Дано:

ν_1

ν_2

v

1) $v_{\text{ист}}$ — ?

2) ν_0 — ?

Решение:

$$\nu = \frac{(v \pm v_{\text{пр}})\nu_0}{v \mp v_{\text{ист}}},\quad v_{\text{пр}} = 0,\quad \nu = \frac{v\nu_0}{v \mp v_{\text{ист}}},$$

$$\nu_1 = \frac{v\nu_0}{v - v_{\text{ист}}},\quad \nu_2 = \frac{v\nu_0}{v + v_{\text{ист}}},\quad v_{\text{ист}} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}v,$$

$$\nu_1 = \frac{v\nu_0}{v - \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}v} = \frac{\nu_0(\nu_1 + \nu_2)}{2\nu_2},\quad \nu_0 = \frac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Ответ: 1) $v_{\text{ист}} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}v$, 2) $\nu_0 = \frac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}$.

223. Два катера движутся навстречу друг другу. С первого катера, движущегося со скоростью v_1 = 10 м/с, посылается ультразвуковой сигнал частотой ν_1 = 50 кГц, который распространяется в воде. После отражения от второго катера сигнал принят первым катером с частотой ν_2 = 52 кГц. Принимая скорость распространения звуковых колебаний в воде равной 1,54 км/с, определить скорость движения второго катера.

Дано:

$v_1 = 10$ м/с

$\nu_1 = 50$ кГц $= 5 \cdot 10^4$ Гц

$\nu_2 = 52$ кГц $= 5{,}2 \cdot 10^4$ Гц

$v = 1{,}54$ км/с $= 1540$ м/с

v_2 — ?

Решение:

$$\nu_1' = \frac{v + v_2}{v - v_1}\nu_1,\quad \nu_2 = \frac{v + v_1}{v - v_2}\nu_1',$$

$$\nu_2 = \frac{v + v_1}{v - v_2}\frac{v + v_2}{v - v_1}\nu_1,\quad \frac{v + v_2}{v - v_2} = \frac{v - v_1}{v + v_1}\frac{\nu_2}{\nu_1},$$

$$\frac{v-v_1}{v+v_1}\frac{\nu_2}{\nu_1}=b, \quad v_2=\frac{b-1}{b+1}v.$$

Ответ: $v_2 = 20{,}2$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

224. Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстояниях $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс и скорость v распространения волны равна 300 м/с. Определить разность фаз колебаний этих точек.

225. Два когерентных источника посылают поперечные волны в одинаковых фазах. Периоды колебаний $T = 0{,}2$ с, скорость распространения волн в среде $v = 800$ м/с. Определить, при какой разности хода в случае наложения волн будет наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний.

226. Определить длину волны λ, если расстояние Δl между первым и четвертым узлами стоячей волны равно 30 см.

227. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от менее плотной среды, определить характер колебаний в любой точке стержня.

228. Электропоезд проходит со скоростью 72 км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого 300 Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определить скачок частоты, воспринимаемый приемником.

ОТВЕТЫ: **224.** $\Delta\varphi = \pi$, точки колеблются в противоположных фазах. **225.** 1) $\pm 80(2m + 1)$, м ($m = 0, 1, 2, \ldots$); 2) $\pm 160m$, м ($m = 0, 1, 2, \ldots$). **226.** 20 см. **227.** $\xi = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$ — уравнение стоячей волны; если $x = \pm m\frac{\lambda}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — пучности; если $x = \pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — узлы. **228.** 34,5 Гц.

4.4. Электромагнитные волны

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

- Электромагнитные волны
- Поперечность электромагнитных волн
- Фазовая скорость электромагнитных волн в среде
- Волновое уравнение электромагнитной волны
- Уравнение плоской электромагнитной волны
- Объемная плотность энергии электромагнитного поля
- Вектор плотности потока электромагнитной энергии (вектор Умова — Пойнтинга)
- Шкала электромагнитных волн

Основные формулы

Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

[$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ — скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — соответственно электрическая и магнитная проницаемость среды].

Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического (E) и магнитного (H) полей электромагнитной волны

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H.$$

Волновое уравнение электромагнитной волны

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

[$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; v — фазовая скорость электромагнитных волн; $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — соответственно векторы напряженностей электрического и магнитного полей электромагнитной волны].

Уравнения плоской электромагнитной волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

[$\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k = \omega/v$ — волновое число; φ — начальная фаза колебаний в точке с координатой $x = 0$].

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$$

[E — напряженность электрического поля волны; H — напряженность магнитного поля волны].

Вектор плотности потока электромагнитной энергии — вектор Умова — Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$$

[$\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны; $\vec{H}$ — вектор напряженности магнитного поля электромагнитной волны].

Примеры решения задач

229. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 5$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ в вакуум. Определить изменение ее длины волны.

Дано:
$\nu = 5$ МГц $= 5 \cdot 10^6$ Гц
$\varepsilon = 2$
$\mu = 1$

$\Delta\lambda$ — ?

Решение:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_1$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}, \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\nu},$$

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu}\left(1 - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right).$$

Ответ: $\Delta\lambda = 17{,}6$ м.

230. Определить длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на пластинах конденсатора $Q_m = 50$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 1{,}5$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

Дано:	*Решение*:
$Q_m = 50$ нКл $= 5 \cdot 10^{-8}$ Кл $I_m = 1{,}5$ А	
λ — ?	

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega},$$

$$Q = Q_m \cos\omega t, \quad I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin\omega t,$$

$$I_m = \omega Q_m, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

$$\lambda = \frac{2\pi c Q_m}{I_m}.$$

Ответ: $\lambda = 62{,}8$ м.

231. Длина λ электромагниной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 12 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определить максимальный заряд Q_m на пластинах конденсатора, если максимальная сила тока в контуре $I_m = 1$ А.

Дано:	*Решение*:
$\lambda = 12$ м $I_m = 1$ А	
Q_m — ?	

$$\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad \lambda = cT, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad LC = \frac{Q_m^2}{I_m^2},$$

$$T = 2\pi\frac{Q_m}{I_m}, \quad \lambda = c \cdot 2\pi\frac{Q_m}{I_m}, \quad Q = \frac{\lambda I_m}{2\pi c}.$$

Ответ: $Q_m = 6{,}37$ Кл.

232. В вакууме вдоль оси X распостраняется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 В/м. Определить амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано:	*Решение*:
$\varepsilon = 1$ $\mu = 1$ $E_0 = 10$ В/м	
H_0 — ?	

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H,$$

$$E = E_0\cos(\omega t - kx), \quad H = H_0\cos(\omega t - kx).$$

При $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$ $\sqrt{\varepsilon_0}E_0 = \sqrt{\mu_0}H_0, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0.$

Ответ: $H_0 = 26{,}5$ мА/м.

233. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 0,15 А/м. Определить давление, оказываемое волной на тело. Воспользуйтесь результатом теории Максвелла о том, что если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление численно равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне.

Дано:

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$H_0 = 0{,}15$ А/м

$p = \langle w \rangle$

p — ?

Решение:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H, \quad E = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx), \quad w_э = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}, \quad w_м = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2},$$

$$w_э = w_м, \quad w = w_э + w_м = 2w_э = 2w_м,$$

$$w = 2w_м = \mu_0 \mu \, H^2 = \mu_0 \mu \, H_0^2 \cos^2(\omega t - kx),$$

$$\langle w \rangle = \left\langle \mu_0 \mu \, H_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle,$$

$$\left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad p = \langle w \rangle = \frac{\mu_0 \mu \, H_0^2}{2}.$$

Ответ: $p = 17{,}7$ пПа.

234. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 50 мВ/м. Определить интенсивность волны I.

Дано:

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$E_0 = 50$ мВ/м $= 5 \cdot 10^{-2}$ В/м

I — ?

Решение:

$$I = \langle S \rangle,$$

$$S = EH = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx),$$

$$\left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0,$$

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0, \quad I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2.$$

Ответ: $I = 3{,}32$ мкВт/м^2.

Задачи для самостоятельного решения

235. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 0{,}5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 0{,}4$ мГн. Определить длину волны излучения, генерируемого контуром.

236. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет v = 250 Мм/с. Определить длину волны электромагнитных волн в этой среде, если их частота в вакууме $\nu_0 = 1$ МГц.

237. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 1 мА/м. Определить амплитуду напряженности электрического поля волны.

238. В вакууме вдоль оси X распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью его поглощающего. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 2 В/м. Определить давление, оказываемое волной на тело.

ОТВЕТЫ: **235.** 843 м. **236.** 250 м. **237.** 0,377 В/м. **238.** 8,85 пПа.

Раздел V

ОПТИКА.
КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

5.1. Элементы геометрической оптики

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Световой луч
- Оптически однородная среда
- Относительный показатель преломления
- Абсолютный показатель преломления
- Полное отражение
- Параксиальные лучи
- Оптическая сила линзы
- Фазовая скорость
- Линза, тонкая линза
- Главная оптическая ось
- Оптический центр линзы
- Побочная оптическая ось
- Фокальная плоскость линзы
- Фокус линзы
- Фокусное расстояние
- Формула тонкой линзы

Основные формулы

Абсолютный показатель преломления

$$n = \frac{c}{v}$$

[c — скорость электромагнитных волн в вакууме; v — фазовая скорость электромагнитных волн в среде].

Показатель преломления второй среды относительно первой (относительный показатель преломления)

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}$$

[n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй сред].

Закон отражения света

$$i_1' = i_1.$$

Закон преломления света

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}$$

[i_1 — угол падения; i'_1 — угол отражения; i_2 — угол преломления; n_{21} — показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления первой и второй сред].

Оптическая сила тонкой лины

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

[f — фокусное расстяние линзы; $N = n/n_1$ — относительный показатель преломления (n и n_1 — соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей линзы ($R > 0$ для выпуклой поверхности, $R < 0$ для вогнутой)].

Формула тонкой лины

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

[f — фокусное расстояние линзы; a — расстояние от линзы до предмета; b — расстояние от линзы до изображения предмета].

Примеры решения задач

239. На плоскопараллельную стеклянную ($n = 1{,}5$) пластинку толщиной $d = 5$ см падает под углом $i_1 = 30°$ луч света (рис. 52). Определить боковое смещение луча, прошедшего сквозь эту пластинку.

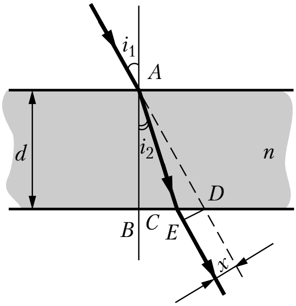


Рис. **52**

Дано:
$n = 1{,}5$
$d = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2}$ м
$i_1 = 30°$

x — ?

Решение:

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}, \quad \sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n},$$

$$x = ED = CD \sin(90° - i_1),$$

$$BD = \frac{d}{\mathrm{tg}(90° - i_1)}, \quad BC = d\,\mathrm{tg}\,i_2,$$

$$x = \left(\frac{d}{\mathrm{tg}(90° - i_1)} - d\,\mathrm{tg}\,i_2\right)\sin(90° - i_1), \quad x = d \sin i_1\left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}\right)$$

Ответ: $x = 9{,}69$ мм.

240. Предельный угол полного отражения на границе стекло — жидкость $i_{пр} = 65°$. Определить показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Дано:
$i_{пр} = 65°$
$n = 1{,}5$

$n_ж$ — ?

Решение:

$$\sin i_{пр} = \frac{n_ж}{n}, \quad n_ж = n \sin i_{пр}.$$

Ответ: $n_ж = 1{,}36$.

241. Необходио изготовить плосковыпуклую линзу с оптической силой $\Phi = 4$ дптр. Определить радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, если показатель преломления материала линзы равен 1,6.

Дано:
$\Phi = 4$ дптр
$n = 1{,}6$

R — ?

Решение:

$$\frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad \text{где } N = \frac{n}{n_1}, \quad n_1 = 1, \quad N = n,$$

$$\frac{1}{f} = \Phi, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = R, \quad \Phi = (n-1)\frac{1}{R}, \quad R = \frac{n-1}{\Phi}.$$

Ответ: $R = 15$ см.

242. Определить расстояние a от двояковыпуклой линзы до предмета, при котором расстояние от предмета до действительного изображения будет минимальным (рис. 53).

Дано:
$l = l_{min}$

a — ?

Решение:

$$l = a + b, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{f}, \quad b = l - a,$$

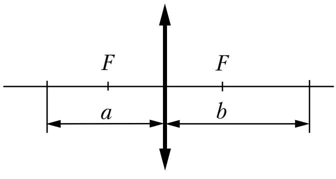


Рис. **53**

$$lf = al - a^2, \quad l = \frac{a^2}{a-f}, \quad \frac{dl}{da} = 0 \text{ (условие min):}$$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}a}=\frac{2a(a-f)-a^2}{(a-f)^2}=0,\quad 2a(a-f)-a^2=0,\quad a=2f.$$

Ответ: $a=2f$.

Задачи для самостоятельного решения

243. На горизонтальном дне бассейна глубиной $h = 1{,}5$ м лежит плоское зеркало. Луч света входит в воду под углом $i_1 = 45°$. Определить расстояние s от места вхождения луча в воду до места выхода его на поверхность воды после отражения от зеркала. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

244. Луч света выходит из стекла в вакуум. Предельный угол $i_{\text{пр}} = 42°$. Определить скорость света в стекле.

245. Двояковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1{,}5$ имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей, равные 10 см. Изображение предмета с помощью этой линзы оказывается в 5 раз больше предмета. Определить расстояние от предмета до изображения.

ОТВЕТЫ: **243.** 1,88 м. **244.** 201 Мм/с. **245.** 72 см.

5.2. Интерференция света

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Волновой цуг
- Время когерентности
- Длина когерентности
- Временная когерентность
- Пространственная когерентность
- Радиус когерентности
- Интерференция света
- Оптическая длина пути
- Оптическая разность хода
- Условие интерференционного максимума
- Условие интерференционного минимума
- Ширина интерференционной полосы
- Полосы равного наклона
- Полосы равной толщины
- Кольца Ньютона

Основные формулы

Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n}$$

[c — скорость распространения света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды].

Оптическая длина пути

$$L = ns$$

[s — геометрическая длина пути световой волны в среде; n — показатель преломления этой среды].

Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1$$

[L_1 и L_2 — соответственно оптические длины путей, проходимых волнами].

Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$$

[λ_0 — длина волны в вакууме; Δ — оптическая разность хода двух световых волн].

Условие интерференционных максимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0$$

[$m = 0, 1, 2, ...$; λ_0 — длина волны в вакууме].

Условие интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

[$m = 0, 1, 2, ...$; λ_0 — длина волны в вакууме].

Ширина интерференционной полосы

$$b = \frac{l}{d}\lambda_0$$

[d — расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана ($l >> d$)].

Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$),

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0,$$

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$$

[d — толщина пленки; n — ее показатель преломления; i — угол падения; r — угол преломления; m — $0, 1, 2, ...$].

В общем случае слагаемое $\pm\frac{\lambda_0}{2}$ обусловлено потерей полуволны при отражении света от границы раздела].

Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R}$$

[$m = 1, 2, 3, ...$ — номер кольца; R — радиус кривизны линзы; λ_0 — длина волны в вакууме].

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых в проходящем свете)

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R}$$

[$m = 0, 1, 2, ...$ — номер кольца; R — радиус кривизны линзы; λ_0 — длина волны в вакууме].

В случае просветления оптики интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n = \sqrt{n_c}, \quad nd = (2m+1)\frac{\lambda_0}{4}$$

[n_c — показатель преломления стекла; n — показатель преломления пленки; nd — оптическая толщина пленки; $m = 0, 1, 2, ...$; λ_0 — длина волны в вакууме].

Примеры решения задач

246. В опыте Юнга расстояние l от щелей до экрана равно 3 м (рис. 54). Определить угловое расстояние между соседними светлыми полосами, если третья светлая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на расстоянии 4,5 мм.

Дано:
$l = 3$ м
$m = 3$
$x = 4{,}5$ мм $= 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$\Delta\alpha$ — ?

Решение:

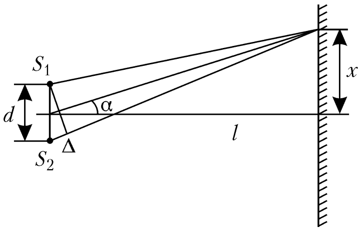


Рис. **54**

$\boxed{\max: \Delta = \pm m\lambda}$

$$\Delta = \frac{xd}{l}, \qquad m\lambda = \frac{xd}{l} \ (m = 0, 1, 2, ...),$$

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{l} = \frac{m\lambda}{d}, \quad \Delta\alpha = \frac{m\lambda}{d} - \frac{(m-1)\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} = \frac{x}{ml}.$$

Ответ: $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$ рад.

247. Если в опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей поместить перпендикулярно этому лучу тонкую стеклянную пластинку ($n = 1{,}5$), то центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой. Длина волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Определить толщину пластинки.

Дано:
$n = 1{,}5$
$m = 5$
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

d — ?

Решение:

$$\Delta = nd - d = d(n-1),$$

$$\Delta = m\lambda, \quad m\lambda = d(n-1),$$

$$d = \frac{m\lambda}{n-1}.$$

Ответ: $d = 5$ мкм.

248. На плоскопараллельную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$ под углом $i = 45^\circ$ падает параллельный пучок белого света (рис. 55). Определить, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм).

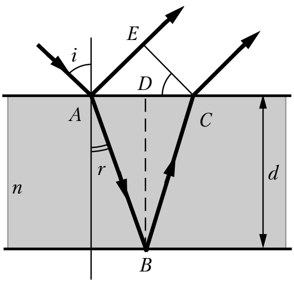


Рис. **55**

Дано:	*Решение*:
$n = 1{,}33$	$\boxed{\max: \Delta = m\lambda}$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$,
$i = 45^\circ$	$\Delta = (AC + BC)n - \left(AE - \dfrac{\lambda}{2}\right)$,
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м	
d — ?	

$$AB = BC = \frac{d}{\cos r},\ AD = d\,\mathrm{tg}\,r,$$

$$AE = 2d\,\mathrm{tg}\,r \sin i,$$

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos r} - 2d\,\mathrm{tg}\,r \sin i + \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \mathrm{tg}\,r = \frac{\sin r}{\cos r},$$

$$\frac{2d}{\cos r}(n - \sin r \sin i) + \frac{\lambda}{2} = \lambda \quad (m = 1),$$

$$\frac{2d}{\cos r}\left(n - \sin^2 r \frac{\sin i}{\sin r}\right) = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{2dn}{\cos r}(1 - \sin^2 r) = \frac{\lambda}{2},$$

$$2dn \cos r = \frac{\lambda}{2}, \quad d = \frac{\lambda}{4n \cos r},$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2 i}, \quad d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Ответ: $d = 133$ нм.

249. На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) с преломляющим углом $\alpha = 40''$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм (рис. 56). Определить в интерференционной картине расстояние между двумя соседними минимумами.

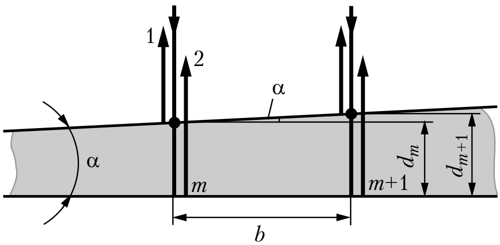


Рис. **56**

Дано:
$n = 1{,}5$
$\alpha = 40'' = 1{,}94 \cdot 10^{-4}$ рад
$\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

b — ?

Решение:

$$\boxed{\text{min}}\quad 2dn\cos r + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),\quad r = 0,\quad 2nd = m\lambda,$$

$$d = \frac{m\lambda}{2n},\quad \sin\alpha = \frac{d_{m+1} - d_m}{b},\quad \sin\alpha \approx \alpha,$$

$$\alpha = \frac{(m+1)\lambda - m\lambda}{2bn} = \frac{\lambda}{2bn},\quad b = \frac{\lambda}{2n\alpha}\ (\alpha\ —\ \text{в радианах}).$$

Ответ: $b = 1{,}03$ мм.

250. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально (рис. 57). Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью, и наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы $R = 4$ м. Определить показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца $r = 1{,}8$ мм.

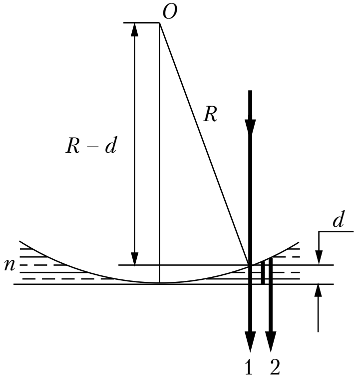


Рис. **57**

Дано:
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м
$R = 4$ м
$m = 2$
$r = 1{,}8$ мм $= 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м

n — ?

Решение:

$$r = \sqrt{R^2 - (R-d)^2} \approx \sqrt{2Rd}, \quad d = \frac{r^2}{2R},$$

$$\Delta = 2dn, \quad n = \frac{\Delta}{2d}, \quad \boxed{\max : \Delta = m\lambda}$$

$$2nd = m\lambda, \quad n = \frac{m\lambda}{2d}, \quad n = \frac{m\lambda \cdot 2R}{2r^2} = \frac{m\lambda R}{r^2}.$$

Ответ: $n = 1{,}48$.

251. Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхности стекла осуществляют «просветление оптики»: на свободную поверхность линз наносят тонкую пленку с показателем преломления $n = \sqrt{n_c}$. В этом случае амплитуды отраженных лучей *1'*, *2'* (рис. 58) от обеих поверхностей такой пленки одинаковы. Определить толщину *d* слоя, при которой отражение света с длиной волны λ от стекла в направлении нормали равно нулю.

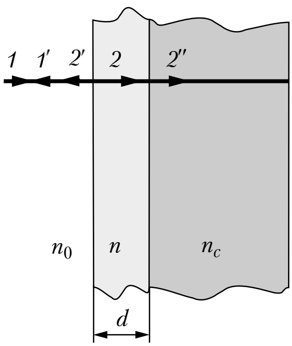


Рис. **58**

Решение:

Дано:
$n = \sqrt{n_c}$
λ

d — ?

$$\Delta = 2dn, \quad \boxed{\min : \Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}} \quad 2dn = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$d = \frac{(2m+1)\lambda}{4n} = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n_c}}.$$

Ответ: $d = \dfrac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n_c}} (m = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$.

252. На рис. 59 показана схема интерференционного рефрактометра, применяемого для измерения показателя преломления прозрачных веществ. S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм; *1* и *2* — кюветы длиной $l = 10$ см, которые заполнены воздухом ($n_0 = 1{,}000277$). При замене в одной из кювет воздуха на аммиак интерференционная картина на экране сместилась на $m = 17$ полос. Определить показатель преломления

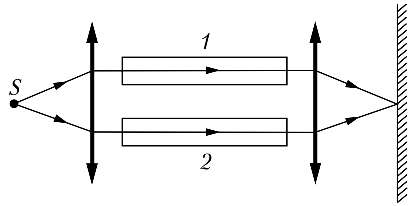


Рис. **59**

аммиака.

Дано:
$\lambda = 589$ нм $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м
$l = 10$ см $= 0{,}1$ м
$n_0 = 1{,}00277$
$m = 17$

n — ?

Решение:

$$\Delta = ln - ln_0 = l(n - n_0), \quad \Delta = m\lambda,$$

$$l(n - n_0) = m\lambda, \quad n = \frac{m\lambda}{l} + n_0.$$

Ответ: $n = 1{,}000377$.

Задачи для самостоятельного решения

253. Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга $d = 0{,}5$ мм ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Определить расстояние l от щелей до экрана, если ширина b интерференционных полос равна 1,2 мм.

254. На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) нормально падает монохроматический свет ($\lambda = 698$ нм). Определить угол между поверхностями клина, если расстояние b между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм.

255. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. При заполнении пространства между линзой и стеклянной пластинкой прозрачной жидкостью радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,21 раза. Определить показатель преломления жидкости.

256. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плеч интерферометра Майкельсона помещена закрытая с обеих сторон откачанная до высокого вакуума стеклянная трубка длиной $l = 15$ см. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны $\lambda = 589$ сместилась на 192 полосы. Определить показатель преломления аммиака.

257. На пути лучей интерференционного рефрактометра помещаются трубки длиной $l = 2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями, наполненные воздухом ($n_0 = 1{,}000277$). Одну трубку заполнили хлором, при этом интерференционная картина сместилась на $m = 20$ полос. Определить показатель преломления хлора, если наблюдение производится в монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 589$ нм.

ОТВЕТЫ: **253.** $l = db/\lambda = 1$ м. **254.** $\alpha = \lambda/(2nb)$, $\alpha = 24''$. **255.** 1,46. **256.** $n = \frac{m\lambda}{2l} + 1 = 1{,}000377$. **257.** 1,000866.

5.3. Дифракция света

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Дифракция света
- Принцип Гюйгенса
- Принцип Гюйгенса — Френеля
- Метод зон Френеля
- Дифракция Френеля
- Дифракция на круглом отверстии
- Дифракция на диске
- Дифракция Фраунгофера
- Дифракция Фраунгофера на щели
- Одномерная дифракционня решетка
- Дифракция Фраунгофера на одномерной дифракционной решетке
- Пространственная дифракционная решетка
- Дифракция на пространственной решетке
- Критерий Рэлея
- Разрешающая способность спектрального прибора
- Разрешающая способность дифракционной решетки

Основные формулы

Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$$

[m — номер зоны Френеля; λ — длина волны; a и b — соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается].

Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально

$$a\sin\varphi = \pm\,(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad a\sin\varphi = \pm\,2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[a — ширина щели; φ — угол дифракции; m — порядок спектра; λ — длина волны].

Постоянная (период) дифракционной решетки

$$d = a + b, \quad d = \frac{1}{N_0}$$

[a — ширина каждой щели решетки; b — ширина непрозрачных участков между щелями; N_0 — число щелей, приходящихся на единицу длины дифракционной решетки].

Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N} \quad (m' = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \text{кроме}\ 0,\ N,\ 2N,\ \ldots)$$

[d — период дифракционной решетки; N — число штрихов решетки].

Формула Вульфа — Брэгга (условие дифракционных максимумов от пространственной дифракционной решетки)

$$2d\sin\vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

[d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения; λ — длина волны рентгеновского излучения].

Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}$$

[φ — угол дифракции; m — порядок спектра; d — период решетки].

Разрешающая способность спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

[$\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии регистрируются раздельно].

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R_{\text{диф. реш}} = mN$$

[m — порядок спектра; N — общее число штрихов решетки].

Примеры решения задач

258. Точечный источник света S ($\lambda = 0{,}5$ мкм) расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметра $d = 2$ мм (рис. 60). Определить расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает три зоны Френеля.

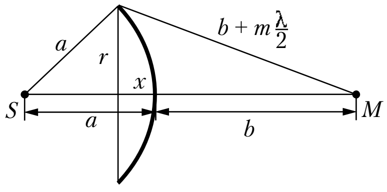


Рис. **60**

Дано:
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м
$a = 1$ м
$d = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м
$m = 3$

b — ?

Решение:

$$r^2 = a^2 - (a-x)^2, \quad \lambda << a, \quad \lambda << b,$$

$$r^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2, \quad x = \frac{bm\lambda}{2(a+b)},$$

$$r^2 = \frac{ab}{a+b}m\lambda - \frac{b^2}{4(a+b)^2}m^2\lambda^2.$$

Слагаемое $\frac{b^2}{4(a+b)^2}m^2\lambda^2$ пренебрежимо мало, $r^2 = \frac{ab}{a+b}m\lambda,$

$$b = \frac{ar^2}{am\lambda - r^2}, \quad r = \frac{d}{2}, \quad b = \frac{ad^2}{4am\lambda - d^2}.$$

Ответ: $b = 2$ м.

259. Определить радиус третьей зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние b от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1,5 м (рис. 61). Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм.

Дано:
$m = 3$
$b = 1{,}5$ м
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

r — ?

Решение:

$$r^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

$$r^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4},$$

$$\lambda << b, \quad r = \sqrt{bm\lambda}.$$

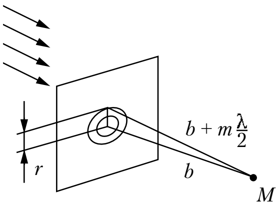


Рис. **61**

Ответ: $r = 1{,}64$ м.

260. Дифракция наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится непрозрачный диск диаметром 5 мм (рис. 62). Определить расстояние l, если диск закрывает только центральную зону Френеля.

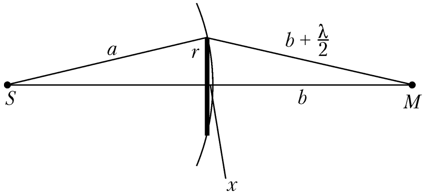


Рис. **62**

Дано:

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м

$m = 1$

$a = b = l/2$

l — ?

Решение:

$$a^2 = (a - x)^2 + r^2,$$

$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + r^2,$$

$$\left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 = (b + x)^2 + r^2,$$

$$b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} = b^2 + 2bx + x^2 + r^2,$$

x^2 и $\dfrac{m^2\lambda^2}{4}$ пренебрежимо мало, $x = \dfrac{r^2}{2a} = \dfrac{d^2}{4l}$, $bm\lambda = 2bx + r^2$,

$$bm\lambda = 2b\frac{r^2}{2a}, \quad bm\lambda = 2r^2, \quad \frac{l}{2}m\lambda = \frac{d^2}{2}, \quad l = \frac{d^2}{m\lambda}.$$

Ответ: $l = 50$ м.

261. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Дифракционная картина проецируется на экран, параллельный плоскости щели, с помощью линзы, расположенной вблизи щели (рис. 63). Определить расстояние от экрана до линзы, если расстояние l между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального максимума, равно 1 см.

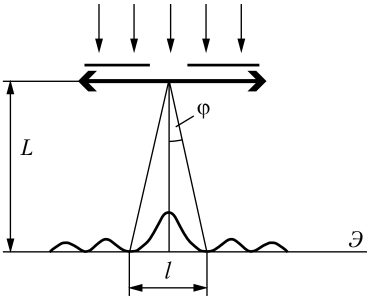


Рис. **63**

Дано:

$a = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м

$\lambda = 500$ нм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$l = 1$ см $= 10^{-2}$ м

$m = 1$

L — ?

Решение:

$$a\sin\varphi = \pm\, m\lambda\,(m = 1,\ 2,\ \ldots), \quad l = 2L\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

$$\frac{l}{2} << L, \quad \mathrm{tg}\,\varphi \approx \sin\varphi, \quad l = 2L\sin\varphi,$$

$$\sin\varphi = \frac{l}{2L}, \quad a\frac{l}{2L} = m\lambda, \quad L = \frac{al}{2ml}.$$

Ответ: $L = 1$ м.

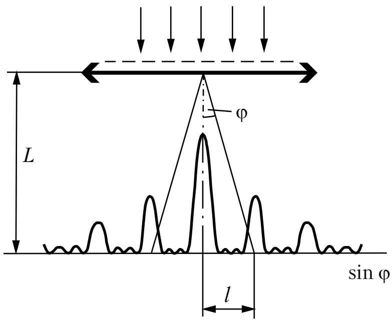


Рис. **64**

262. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны λ = 550 нм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии L = 1 м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается ра расстоянии l = 12 см от центрального (рис. 64). Определить: 1) период дифракционной решетки; 2) число штрихов на 1 см ее длины; 3) общее число максимумов, даваемых решеткой; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

Дано:

$\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
$L = 1$ м
$m = 1$
$l = 12$ см $= 0{,}12$ м
$l' = 1$ см $= 0{,}01$ м

1) d — ?
2) n — ?
3) N — ?
4) $\varphi_{\max}$ — ?

Решение:

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda \text{ (по условию, } m = 1),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{L}, \quad l << L, \quad \operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi,$$

$$\frac{ld}{L} = m\lambda, \quad d = \frac{m\lambda L}{l}, \quad n = \frac{l'}{d},$$

$$d \sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m_{\max} \le \frac{d}{l} \quad (\sin\varphi_{\max} = 1),$$

$$N = 2m_{\max} + 1,$$

$$d \sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda, \quad \varphi_{\max} = \arcsin\frac{m_{\max}\lambda}{d}.$$

Ответ: 1) $d = 4{,}58$ мкм;
2) $n = 2{,}18 \cdot 10^3$ см$^{-1}$;
3) $N = 17$;
4) $\varphi_{\max} = 73{,}9°$.

263. Дифракционная решетка длиной $l = 5$ мм может разрешить в первом порядке две спектральные линии натрия (λ_1 = 589,0 нм и λ_2 = 589,6 нм). Определить, под каким углом в спектре третьего порядка будет наблюдаться свет с $\lambda_3 = 600$ нм, падающий на решетку нормально.

Дано:	*Решение*:
$l = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м $\lambda_1 = 589{,}0$ нм $= 5{,}890 \cdot 10^{-7}$ м $\lambda_2 = 589{,}6$ нм $= 5{,}896 \cdot 10^{-7}$ м $\lambda_3 = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м $m_1 = 1$ $m_3 = 3$	$d \sin\varphi = m_3\lambda_3, \quad \sin\varphi = \dfrac{m_3\lambda_3}{d},$ $d = \dfrac{l}{N}, \quad R = m_1 N = \dfrac{\lambda_1}{\Delta\lambda}$ $(\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1), \quad N = \dfrac{\lambda_1}{m_1\Delta\lambda},$
φ — ?	

$$d = \frac{m_1 l \Delta\lambda}{\lambda_1}, \quad \sin\varphi = \frac{m_3 \lambda_3 \lambda_1}{m_1 l \Delta\lambda}, \quad \varphi = \arcsin\frac{m_3 \lambda_3 \lambda_1}{m_1 l \Delta\lambda}.$$

Ответ: $\varphi = 20^\circ 42'$.

Задачи для самостоятельного решения

264. Посередине между точечным источником монохроматического света $\lambda = 550$ нм и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии 5 м от источника. Определить радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным.

265. Определить радиус четвертой зоны Френеля, если радиус второй зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 2 мм.

266. Дифракция наблюдается на расстоянии 1 м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определить радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец на экране является наиболее темным.

267. На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определить расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума $b = 1$ см.

268. На дифракционную решетку длиной $l = 1{,}5$ мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определить: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

269. На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Угол дифракции для пятого максимума равен 30°, а минимальная разрешаемая решеткой разность $\delta\lambda$ длин волн составляет 0,2 нм. Определить: 1) постоянную дифракционной решетки; 2) длину дифракционной решетки.

270. Постоянная d дифракционной решетки длиной $l = 2{,}5$ см равна 5 мкм. Определить разность длин волн, разрешаемую этой решеткой, для света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм в спектре второго порядка.

ОТВЕТЫ: **264.** 1,17 мм. **265.** 2,83 мм. **266.** 0,5 мм. **267.** 1 м. **268.** 1) 18; 2) 81°54′. **269.** 1) 6 мкм; 2) 3,6 мм. **270.** 50 пм.

5.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Дисперсия света
- Дисперсия света в призме
- Дисперсия вещества
- Нормальная и аномальная дисперсия
- Электронная теория дисперсии света
- Поглощение (абсорбция) света
- Закон Бугера
- Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме
- Продольный и поперечный эффекты Доплера
- Красное и фиолетовое смещения
- Эффект Вавилова — Черенкова

Основные формулы

Связь между углом φ отклонения лучей призмой и преломляющим углом A призмы

$$\varphi = A(n-1)$$

[n — показатель преломления призмы].

Уравнение вынужденных колебаний оптического электрона под действием электрической составляющей поля электромагнитной волны (простейшая задача дисперсии)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t$$

[eE_0 — амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 — собственная частота колебаний электрона; ω — частота внешнего поля; m, e — масса и заряд электрона].

Зависимость показателя преломления вещества n от частоты ω внешнего поля, согласно элементарной электронной теории дисперсии,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0}\sum\frac{e^2/m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}$$

[ε_0 — электрическая постоянная; n_{0i} — концентрация электронов; m — масса электрона; e — заряд электрона].

Закон Бугера (закон ослабления интенсивности света в веществе)

$$I = I_0 e^{-ax}$$

[I_0 и I — интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на выходе слоя поглощающего вещества толщиной x; α — коэффициент поглощения].

Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+(v/c)\cos\theta}$$

[ν_0 и ν — соответсвенно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; v — скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c — скорость света в вакууме; θ — угол между вектором скорости v и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем].

Продольный эффект Доплера ($\theta = 0$)

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}}.$$

Поперечный эффект Доплера ($\theta = \pi/2$)

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\nu^2/c^2}.$$

Эффект Вавилова — Черенкова

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv}$$

[ϑ — угол между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы; n — показатель преломления среды].

Примеры решения задач

271. Луч света выходит из стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) под тем же углом, что и выходит в нее. Определить угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол $A = 60°$ (рис. 65).

Дано:
$n = 1{,}5$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$
$A = 60°$

φ — ?

Решение:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{A}{2}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

$$\sin\alpha = n\sin\beta = n\sin\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$\alpha = \arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right),$$

$$\varphi = 2\alpha - A = 2\arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right) - A.$$

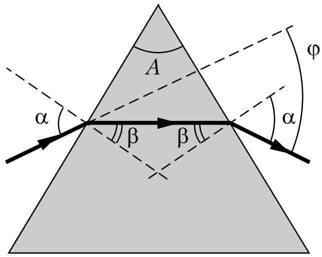


Рис. **65**

Ответ: $\varphi = 37°11''$.

272. Определить максимальную скорость вынужденных колебаний свободного электрона, если в точке его нахождения радиопередатчик, работающий на частоте 500 кГц, создает поле электромагнитного излучения $E_0 = 10$ мВ/см.

Дано:
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$\nu = 500$ кГц $= 5 \cdot 10^5$ Гц
$E_0 = 10$ мВ/см $= 1$ В/м

v_{max} — ?

Решение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{вын}}}{m}\cos\omega t, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

$$\omega_0 = 0, \quad F_{\text{вын}} = eE_0, \quad \ddot{x} = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t,$$

$$\dot{x} = v = \frac{eE_0}{m\omega}\sin\omega t, \quad v_{max} = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0}{2m\pi\nu}.$$

Ответ: $v_{max} = 55{,}9$ км/с.

273. Определить концентрацию n_0 свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 97$ МГц ее показатель преломления $n = 0{,}91$.

Дано:
$\nu = 97$ МГц $= 97 \cdot 10^6$ Гц
$n = 0{,}91$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

n_0 —?

Решение:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \mu = 1, \quad n = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = 1 + \varkappa,$$

$$P = \varkappa\varepsilon_0 E_0, \quad P = n_0 e x_{max},$$

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E_0} = 1 + \frac{n_0 e}{\varepsilon_0 E_0}x_{max},$$

$$n^2 = (n^2 - 1)\frac{\varepsilon_0 E_0}{ex_{\max}},$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad x = A\cos\omega t, \quad A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

$$\omega_0 = 0, \quad x_{\max} = A, \quad x_{\max} = -\frac{eE_0}{m\omega^2},$$

$$n_0 = (1 - n^2)\frac{\varepsilon_0 E_0 m\omega^2}{e^2 E_0} = (1 - n^2)\frac{4\pi^2\nu^2\varepsilon_0 m}{e^2}.$$

Ответ: $n_0 = 2{,}01 \cdot 10^7$ см$^{-3}$.

274. Свет падает нормально поочередно на две пластинки, изготовленные из одного и того же вещества, имеющие соответственно толщины $x_1 = 5$ мм и $x_2 = 10$ мм. Определить коэффициент поглощения этого вещества, если интенсивность света, прошедшего через первую пластинку, составляет 82%, а через вторую — 67%.

Дано:
$x_1 = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м
$x_2 = 10$ мм $= 10^{-2}$ м
$I_1 = 0{,}82 I_0$
$I_2 = 0{,}67 I_0$

α — ?

Решение:

$$I_1 = I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x_1}, \quad I_2 = I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x_2},$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \mathrm{e}^{\alpha(x_2 - x_1)}, \quad \alpha = \frac{\ln(I_1/I_2)}{x_2 - x_1}.$$

Ответ: $\alpha = 0{,}404$ см$^{-1}$.

275. В спектральных линиях, излучаемых астрономическими объектами — квазарами, наблюдалось красное смещение, отвечающее трехкратному уменьшению частоты. Определить, с какой скоростью при этом должен был бы удаляться квазар.

Дано:
$\nu = \nu_0/3$
$\theta = 0$

v — ?

Решение:

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta}, \quad \theta = 0, \quad \cos\theta = 1, \quad \nu = \nu_0\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}},$$

$$\frac{\nu}{\nu_0}=\frac{1}{3},\quad \frac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2,\quad 1+\frac{v}{c}=9\left(1-\frac{v}{c}\right),\quad 10\frac{v}{c}=8,\quad v=0{,}8c.$$

Ответ: $v=0{,}8c$.

276. Вывести выражение для уширения $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий в случае поперечного эффекта Доплера.

Дано:
$\vartheta=\pi/2$

$\Delta\lambda/\lambda$ — ?

Решение:

$$\nu'=\nu\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\theta},\quad \cos\theta=\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \lambda=\frac{c}{\nu},\quad \nu'=\frac{c}{\nu'},$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},\quad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)+\ldots,$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right),\quad \lambda'=\lambda+\Delta\lambda,\quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v^2}{2c^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}=\dfrac{v^2}{2c^2}$.

277. Определить доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода (λ = 489,1 нм), если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией T = 100 кэВ.

Дано:
$\lambda=486{,}1$ нм $=486{,}1\cdot10^{-9}$ м
$\theta=\pi/2$
$T=100$ кэВ $=1{,}6\cdot10^{-14}$ Дж
$m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг
$c=3\cdot10^8$ м/с

$\Delta\lambda$ —?

Решение:

$$\nu'=\nu\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\theta},\quad \cos\theta=0,$$

$$\nu' = \nu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'},$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)+\ldots,$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \quad \lambda' = \lambda+\Delta\lambda, \quad \frac{\lambda+\Delta\lambda}{\lambda} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v^2}{2c^2},$$

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad v^2 = \frac{2T}{m}, \quad \Delta\lambda = \lambda\frac{T}{mc^2}.$$

Ответ: $\Delta\lambda = \lambda\dfrac{T}{mc^2}$.

278. Определить минимальную ускоряющую разность потенциалов $U_{\min}$, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$ возникло черенковское излучение.

Дано:
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$n = 1{,}5$

$U_{\min}$ — ?

Решение:

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv}, \quad v = \frac{c}{n\cos\vartheta}, \quad v_{\min} = \frac{c}{n}\ (\cos\vartheta = 0),$$

$$T_{\min} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{[1-v_{\min}^2]/c^2}}-1\right),$$

$$T_{\min} = mc^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}-1\right), \quad T_{\min} = |e|U_{\min}, \quad U_{\min} = \frac{mc^2}{|e|}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}-1\right).$$

Ответ: $U_{\min} = 175$ кВ.

279. Определить минимальный импульс, которым должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова — Черенкова наблюдался в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$.

Дано:
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$n = 1{,}5$

$p_{\min}$ —?

Решение:

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv}, \quad v = \frac{c}{n\cos\vartheta}, \quad v_{\min} = \frac{c}{n}\ (\cos\vartheta = 1),$$

$$p_{\min} = \frac{mc}{n\sqrt{1-\left(\frac{v_{\min}}{c}\right)^2}} = \frac{mc}{n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}, \quad p_{\min} = \frac{mc}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Ответ: $p_{\min} = 2{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

Задачи для самостоятельного решения

280. Доказать, что если монохроматический пучок света падает на грань призмы с показателем преломления n под малым углом, то при малом преломляющем угле A призмы угол отклонения φ лучей призмой не зависит от угла падения и равен $A(n - 1)$.

281. Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Определить зависимость диэлектрической проницаемости ε плазмы от частоты ω. Взаимодействием волны с ионами плазмы пренебречь.

282. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении пути $2x$.

283. Коэффициент поглощения некоторого вещества для монохроматического света определенной длины волны $\alpha = 0{,}1$ см$^{-1}$. Определить толщину слоя вещества, которая необходима для ослабления света: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз. Потери на отражение света не учитывать.

284. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}5$ мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $0{,}15\,c$ (c — скорость света в вакууме). Определить длину волны, которую зарегистрирует приемник наблюдателя.

285. Известно, что при удалении от нас некоторой туманности линия излучения водорода ($\lambda = 656{,}3$ нм) в ее спектре смещена в красную сторону на $\Delta\lambda = 2{,}5$ нм. Определить скорость удаления туманности.

286. Определить кинетическую энергию протонов, которые в среде с показателем преломления $n = 1{,}6$ излучают свет под углом $\vartheta = 20°$ к направлению своего движения. Ответ выразить в электронвольтах.

ОТВЕТЫ: **281.** $\varepsilon = 1 - n_0e^2/(\varepsilon_0 m\omega^2)$. **282.** В 9 раз. **283.** 1) 6,93 см; 2) 16,1 см. **284.** 430 нм. **285.** 1,14 Мм/с. **286.** 0,319 ГэВ.

5.5. Поляризация света

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Световой вектор
- Естественный свет
- Поляризованный свет
- Частично поляризованный свет
- Плоскополяризованный свет
- Эллиптически поляризованный свет
- Циркулярно поляризованный свет
- Плоскость поляризации
- Степень поляризации
- Закон Малюса
- Закон Брюстера
- Двойное лучепреломление
- Оптическая ось кристалла
- Главная плоскость (главное сечение) кристалла
- Одноосные кристаллы (положительные и отрицательные)
- Призмы поляризованные и двоякопреломляющие
- Получение эллиптически поляризованного света
- Пластинки $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{\lambda}{2}$, λ
- Анализ поляризованного света
- Вращение плоскости поляризации

Основные формулы

Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

[$I_{\max}$ и $I_{\min}$ — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором].

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2\alpha$$

[I и I_0 — интенсивности плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор и падающего на анализатор, α — угол между плоскостями поляризатора и анализатора].

Закон Брюстера

$$\mathrm{tg}\, i_{Б} = n_{21}$$

[$i_{Б}$ — угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} — относительный показатель преломления среды].

Оптическая разность хода для кристаллической пластинки:

- в четверть длины волны

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

- в полдлины волны

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

- в целую длину волны

$$(n_o - n_e)d = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

[знак плюс соответствует отрицательным одноосным кристаллам, минус — положительным; λ — длина волны; d — толщина пластинки; n_o, n_e — соответственно показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси].

Угол поворота плоскости поляризации:

- для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d,$$

- для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha]\, Cd$$

[d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha_0[\alpha]$ — удельное вращение; C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе].

Примеры решения задач

287. Определить степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света равна интенсивности естественного.

Дано:
$I_п = I_{ест}$

P — ?

Решение:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad I_{max} = I_п + \frac{1}{2} I_{ест} = I_п + \frac{1}{2} I_п = \frac{3}{2} I_п,$$

$$I_{min} = \frac{1}{2} I_{ест} = \frac{1}{2} I_п, \quad P = \frac{\frac{3}{2} I_п - \frac{1}{2} I_п}{\frac{3}{2} I_п + \frac{1}{2} I_п} = \frac{I_п}{2 I_п} = 0{,}5.$$

Ответ: $P = 0{,}5$.

288. Определить, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через два николя, расположенных так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 60^\circ$, а в каждом из николей теряется 8% интенсивности падающего на него света (рис. 66).

Дано:
$\alpha = 60^\circ$
$k = 0{,}08$

I_0/I_2 — ?

Решение:

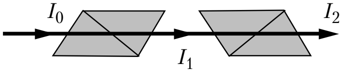


Рис. **66**

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1-k),$$

$$I_2 = I_1 (1-k) \cos^2 \alpha,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1-k)^2 \cos^2 \alpha,$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Ответ: $I_0/I_2 = 9{,}45$.

289. Предельный угол полного отражения для пучка света на границе кристалла каменной соли с воздухом равен $40{,}5^\circ$. Определить угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого кристалла.

Дано:
$i_{\text{пр}} = 40{,}5^\circ$

$i_{\text{Б}}$ — ?

Решение:

$$\frac{\sin i_{\text{пр}}}{\sin(\pi/2)} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sin i_{\text{пр}}}, \quad \operatorname{tg} i_{\text{Б}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sin i_{\text{пр}}},$$

$$i_{\text{Б}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin i_{\text{пр}}}\right).$$

Ответ: $i_{\text{Б}} = 57^\circ$.

290. Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 589$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси OO' (рис. 67). Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определить длины волн этих лучей в кристалле.

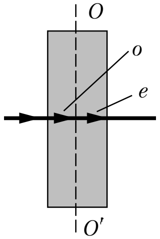


Рис. **67**

Дано:
$\lambda = 589$ нм $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м
$n_0 = 1{,}66$
$n_e = 1{,}49$

λ_o — ?
λ_e — ?

Решение:

$$\lambda = cT, \quad \lambda_o = v_o T, \quad \lambda_e = v_e T,$$

$$v_o = \frac{c}{n_o}, \quad v_e = \frac{c}{n_e}, \quad \lambda_o = \frac{\lambda}{n_o}, \quad \lambda_e = \frac{\lambda}{n_e}.$$

Ответ: $\lambda_o = 355$ нм; $\lambda_e = 395$ нм.

291. Определить наименьшую толщину кристаллической пластинки в четверть длины волны для $\lambda = 530$ нм, если для данной длины волны разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей $n_o - n_e = 0{,}01$.

Дано:
$\lambda = 530$ нм $= 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ м
$n_o - n_e = 0{,}01$
$\Delta = \lambda/4$

$d_{\min}$ — ?

Решение:

$$(n_o - n_e)d = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda, \quad (n_o - n_e)d_{\min} = \frac{\lambda}{4}$$

(кристалл отрицательный, $m = 0$),

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)}.$$

Ответ: $d_{\min} = 13{,}3$ мкм.

292. Пластинка кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30°$. Определить толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью.

Дано:
$d_1 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м
$\varphi_1 = 30°$
$\varphi_2 = 90°$

d_2 — ?

Решение:

$$\varphi_1 = \alpha d_1, \quad \varphi_2 = \alpha d_2,$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad d_2 = \frac{d_1 \varphi_2}{\varphi_1}.$$

Ответ: $d_2 = 6$ мм.

293. Определить массовую концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через слой раствора $l = 20$ см плоскость поляризации света поворачивается на угол $\varphi = 10^\circ$. Удельное вращение $[\alpha]$ сахара равно $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад $\cdot$ м^2/кг.

Дано:
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м
$\varphi = 10^\circ$
$[\alpha] = 1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад $\cdot$ м^2/кг

C — ?

Решение:

$$\varphi = [\alpha]Cl, \quad C = \frac{\varphi}{[\alpha]l},$$

$$1^\circ = 1{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Ответ: $C = 74{,}8$ кг/м^3.

Задачи для самостоятельного решения

294. Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определить отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной.

295. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света, прошедшего через два николя, главные плоскости которых образуют угол 60°, если каждый из николей как поглощает, так и отражает 5% падающего на них света.

296. Определить показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления 35°.

297. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку из исландского шпата толщиной 50 мкм, вырезанную параллельно оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определить разность хода этих лучей, прошедших через пластинку.

298. Кристаллическая пластинка из исландского шпата с наименьшей толщиной $d = 0{,}86$ мкм служит пластинкой в четверть волны для $\lambda = 0{,}59$ мкм. Определить разность Δn показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей.

299. Определить наименьшую толщину кристаллической пластинки в целую длину волны $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины $n_o - n_e = 0{,}01$.

300. Раствор глюкозы с массовой концентрацией $C_1 = 0{,}21$ г/см^3, находящийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через раствор, на угол $\varphi_1 = 24^\circ$. Определить массовую концентрацию C_2 глюкозы в другом растворе в трубке такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 18^\circ$.

ОТВЕТЫ: **294.** $I_{max}/I_{min} = 7$. **295.** В 9,88 раза. **296.** 1,43. **297.** 8,5 мкм. **298.** 0,171. **299.** 53 мкм. **300.** 0,157 г/см^3.

5.6. Квантовая природа излучения

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Квантовая гипотеза Планка
- Тепловое излучение
- Энергетическая светимость тела
- Спектральная плотность энергетической светимости тела
- Спектральная поглощательная способность тела
- Черное тело
- Серое тело
- Оптическая пирометрия
- Радиационная температура
- Закон Кирхгофа
- Закон Стефана — Больцмана
- Закон смещения Ви́на
- Формула Рэлея — Джинса
- Формула Планка
- Внешний фотоэффект
- Внутренний фотоэффект
- Вентильный фотоэффект
- Вольт-амперная характеристика фотоэффекта
- Многофотонный фотоэффект
- Фотоны
- Давление излучения
- Эффект Комптона
- Корпускулярно-волновой дуализм свойств электромагнитного излучения
- Законы внешнего фотоэффекта
- Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

Основные формулы

Энергия кванта (фотона)

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

[h — постоянная Планка; ν — частота; c — скорость распространения света в вакууме; λ — длина волны].

Закон Кирхгофа

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}$$

[$R_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости тела; $A_{\nu,T}$ — спектральная поглощательная способность тела; $r_{\nu,T}$ — спектральная плотность энергетической светимости черного тела].

Энергетическая светимость черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T}\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\,\mathrm{d}\lambda$$

[$r_{\nu,T}$ ($r_{\lambda,T}$) — спектральная плотность энергетической светимости].

Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4$$

[R_e — энергетическая светимость черного тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура].

Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^{\text{с}} = A_T R_e = A_T \sigma T^4$$

[A_T — поглощательная способность серого тела; R_e — энергетическая светимость черного тела; σ — постоянная Стефана — Больцмана; T — термодинамическая температура].

Закон смещения Ви́на

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

[$\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b — постоянная Ви́на; T — термодинамическая температура].

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = CT^5$$

[$C = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5)].

Формула Рэлея — Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$$

[kT — средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν (k — постоянная Больцмана, T — термодинамическая температура); c — скорость распространения света в вакууме].

Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1},$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(kT\lambda)} - 1}$$

[$r_{\nu,T}$, $r_{\lambda,T}$ — спектральные плотности энергетической светимости черного тела соответственно как функция частоты ν и длины волны λ].

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2} \quad \text{или} \quad eU_0 = h(\nu - \nu_0)$$

[ν — частота падающего фотона; h — постоянная Планка; A — работа выхода электрона из металла; $\frac{mv_{\max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона; U_0 — задерживающее напряжение; ν_0 — красная граница фотоэффекта].

Красная граница фотоэффекта

$$\nu_0 = \frac{hc}{A}, \quad \nu_0 = \frac{A}{h}$$

[λ_0 — максимальная длина волны излучения (ν_0 — соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен; A — работа выхода электрона из металла].

Импульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

[$h\nu$ — энергия фотона].

Давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность,

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$$

[$E_e = Nh\nu$ — облученность поверхности; ρ — коэффициент отражения; w — объемная плотность энергии излучения].

Изменение длины волны излучения при комптоновском рассеянии (*комптоновский сдвиг*)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

[λ и λ' — длина волн падающего и рассеянного излучения; m — масса электрона; ϑ — угол рассеяния; $\lambda_C = h/(mc)$ — комптоновская длина волны ($\lambda_C = 2{,}43$ пм)].

Примеры решения задач

301. Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью 30 см^2 равна 1,3 кК. Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность составляет 1,5 кВт.

Дано:
$S = 30\ \text{см}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2$
$T = 1{,}3\ \text{кК} = 1{,}3 \cdot 10^3\ \text{К}$
$P = 1{,}5\ \text{кВт} = 1{,}5 \cdot 10^3\ \text{В}$

$\dfrac{P_{\text{рас}}}{P}$ — ?

Решение:

$$P_{\text{изл}} = R_e S = \sigma T^4 S,$$
$$P_{\text{рас}} = P - P_{\text{изл}} = P - \sigma T^4 S,$$
$$\frac{P_{\text{рас}}}{P} = 1 - \frac{\sigma T^4 S}{P}.$$

Ответ: 0,676.

302. Принимая Солнце за черное тело и учитывая, что его максимальной спектральной плотности энергетической светимости соответствует длина волны $\lambda = 500$ нм, определить: 1) температуру поверхности Солнца; 2) энергию, излучаемую Солнцем в виде электромагнитных волн за 10 мин; 3) массу, теряемую Солнцем за это время за счет излучения.

Дано:
$\lambda = 500\ \text{нм} = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}$
$t = 10\ \text{мин} = 600\ \text{с}$
$R_{\text{С}} = 6{,}95 \cdot 10^8\ \text{м}$
$m_{\text{С}} = 1{,}98 \cdot 10^{30}\ \text{кг}$

1) T — ?
2) W — ?
3) m — ?

Решение:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad T = \frac{b}{\lambda_{\max}},$$
$$W = R_e S t = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_{\text{С}}^2\, t, \quad m = \frac{W}{c^2}.$$

Ответ: 1) $T = 5{,}8$ кК; 2) $W = 2{,}34 \cdot 10^{29}$ Дж; 3) $m = 2{,}6 \cdot 10^{12}$ кг.

303. Определить, какая длина волны соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости $(r_{\lambda,T})_{\max}$, равной $1{,}3 \cdot 10^{11}$ Вт/м^3.

Дано:
$(r_{\lambda,T})_{\max} = 1{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{Вт/м}^3$
$C = 1{,}3 \cdot 10^5\ \text{Вт/(м}^3 \cdot \text{К}^5)$

$\lambda_{\max}$ — ?

Решение:

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = CT^5, \quad \lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

$$T=\frac{b}{\lambda_{\max}},\quad (r_{\lambda,T})_{\max}=C\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^2,$$

$$(r_{\lambda,T})_{\max}\lambda_{\max}^5=Cb^5,\quad \lambda_{\max}=b\sqrt[5]{\frac{C}{(r_{\lambda,T})_{\max}}}.$$

Ответ: $\lambda_{\max}=183$ мкм.

304. Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T}=\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, доказать, что в области малых частот ($h\nu << kT$) она совпадает с формулой Рэлея — Джинса.

Дано:

$r_{\nu,T}=\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$,

$h\nu \ll kT$

$r_{\nu,T}$ — ?

Решение:

$$h\nu << kT,\quad e^{h\nu/(kT)}\approx 1+\frac{h\nu}{kT},$$

$$e^{h\nu/(kT)}-1\approx\frac{h\nu}{kT},$$

$$r_{\nu,T}=\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{h\nu/(kT)}=\frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT\quad \text{(формула Рэлея – Джинса).}$$

305. Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T}=\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, вывести из нее закон Стефана — Больцмана.

Дано:

$r_{\nu,T}=\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$,

---

$R_e=\sigma T^4$?

Решение:

$$R_e=\int_0^\infty r_{\nu,T}\mathrm{d}\nu=\int_0^\infty\frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}\mathrm{d}\nu,$$

$$x=\frac{h\nu}{kT},\quad \mathrm{d}x=\frac{h\mathrm{d}\nu}{kT},\quad \mathrm{d}\nu=\frac{kT}{h}\mathrm{d}x,$$

$$R_e=\frac{2\pi k^4}{c^2h^3}T^4\int_0^\infty\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}=\sigma T^4,\quad \text{где } \sigma=\frac{2\pi k^4}{c^2h^3}\int_0^\infty\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3},\quad \text{так как}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15.}$$

Ответ: $R_e = \sigma T^4$.

306. Для вольфрамовой нити при температуре $T = 3500$ К поглощательная способность $A_T = 0{,}35$. Определить радиационную температуру нити.

Дано:	*Решение*:
$T = 3500$ К $A_T = 0{,}35$	$R_T = A_T \sigma T^4, \quad R_T = \sigma T_p^4, \quad A_T \sigma T^4 = \sigma T_p^4,$
T_p — ?	$T_p^4 = A_T T^4, \quad T_p = T\sqrt[4]{A_T}.$

Ответ: $T_p = 2{,}69$ кК.

307. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определить наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равно равна 2,2 эВ.

Дано:	*Решение*:
$\lambda = 400$ нм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м $A = 2{,}2$ эВ $= 3{,}52 \cdot 10^{-19}$ Дж $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с	$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0, \quad h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$
U_0 — ?	$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \frac{hc}{\lambda} = A + eU_0, \quad U_0 = \frac{\frac{hc}{\lambda} - A}{e}.$

Ответ: $U_0 = 0{,}91$ В.

308. Задерживающее напряжение для платиновой пластинки (работа выхода 6,3 эВ) составляет 3,7 В. При тех же условиях для другой пластинки задерживающее напряжение равно 5,3 В. Определить работу выхода электронов (в эВ) из этой пластинки.

Дано:	*Решение*:
$A_1 = 6{,}3$ эВ $U_1 = 3{,}7$ В $U_2 = 5{,}3$ В	$h\nu = A_1 + eU_1, \quad h\nu = A_2 + eU_2,$ $A_1 + eU_1 = A_2 + eU_2,$
A_2 —?	

$$A_2 = A_1 + eU_1 - eU_2.$$

Ответ: $A_2 = 4{,}7$ эВ.

309. При освещении катода ваукуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 310$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25% задерживающее напряжении оказывается меньше на 0,8 В. Определить по этим экспериментальным данным постоянную Планка.

Дано:

$\lambda = 310$ нм $= 3{,}1 \cdot 10^{-7}$ м

$\lambda_2 = 1{,}25\lambda_1$

$U_2 = U_1 - \Delta U$

$\Delta U = 0{,}8$ В

h — ?

Решение:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1, \quad \frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2,$$

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(U_1 - U_2),$$

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{1{,}25\lambda_1}\right) = e\Delta U, \quad h = \frac{5e\lambda_1 \Delta U}{c}.$$

Ответ: $h = 6{,}61 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

310. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 9{,}8$ В.

Дано:

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$U = 9{,}8$ В

$p_e = p$

λ — ?

Решение:

$$eU = \frac{m_e v^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}, \quad p_e = m_e v = \sqrt{2m_e eU},$$

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad p = p_e, \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}.$$

Ответ: $\lambda = 392$ нм.

311. Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 0,1 мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в световом пучке; 2) число N фотонов, падающих ежесекундно на 1 м^2 поверхности.

Дано:	*Решение*:
$p = 0{,}1$ мкПа $= 10^{-7}$ Па $\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м $\rho = 0$ $t = 1$ с $S = 1$ м^2	$p = \dfrac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho), \quad n = \dfrac{w}{\varepsilon},$ $w = \dfrac{p}{1+\rho}, \quad \varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}, \quad n = \dfrac{\lambda p}{hc(1+\rho)},$ $W = E_e S t = \dfrac{hc}{\lambda} N, \quad E_e = \dfrac{pc}{1+\rho},$
1) n — ? 2) N — ?	

$$N = \frac{E_e S t \lambda}{hc} = \frac{pcSt\lambda}{(1+\rho)hc} = \frac{pSt\lambda}{h(1+\rho)}, \quad N = ncSt.$$

Ответ: 1) $n = 3{,}02 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$; 2) $N = 9{,}06 \cdot 10^{19}$.

312. Фотон с энергией $\varepsilon = 1{,}025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить угол рассеяния фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны $\lambda_C = 2{,}43$ пм.

Дано:	*Решение*:
$\varepsilon = 1{,}025$ МэВ $= 1{,}64 \cdot 10^{-13}$ Дж $\lambda' = \lambda_C$ $\lambda_C = 2{,}43$ пм $= 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м	$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\vartheta),$ $\varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}, \quad \lambda = \dfrac{hc}{\varepsilon},$
ϑ — ?	

$$\lambda_C = \frac{hc}{\varepsilon} + \lambda_C(1 - \cos\vartheta),$$

$$\cos\vartheta = \frac{hc}{\lambda_C \varepsilon}, \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{hc}{\lambda_C \varepsilon}\right).$$

Ответ: $\vartheta = 60°$.

313. Фотон с длиной волны $\lambda = 5$ пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\vartheta = 90°$ на первоначально покоившемся электроне (рис. 68). Определить: 1) изменение длины волны при рассеянии; 2) энергию электрона отдачи; 3) импульс электрона отдачи.

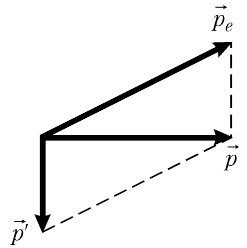


Рис. **68**

Дано:
$\lambda = 5$ пм $= 5 \cdot 10^{-12}$ м
$\vartheta = 90^\circ$

1) $\Delta\lambda$ — ?
2) W_e — ?
3) p_e — ?

Решение:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta) = \lambda_C(\cos\vartheta = 0),$$

$$W_e = \varepsilon - \varepsilon' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)},$$

$$\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}', \quad (p_e)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2,$$

$$p_e = h\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2}.$$

Ответ: 1) $\Delta\lambda = 2{,}43$ пм; 2) $W_e = 81{,}3$ кэВ; 3) $p_e = 1{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

Задачи для самостоятельного решения

314. Черное тело находится при температуре $T_1 = 3$ кК. При остывании тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ мкм. Определить температуру T_2, до которой тело охладилось.

315. Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 600$ К до $T_2 = 2400$ К. Определить: 1) во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость; 2) как изменилась длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости.

316. Преобразовать формулу Планка для спектральной плотности энергетической светимости черного тела от переменной ν к переменной λ.

317. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, если фототок прекращается при приложении задерживающего напряжения $U_0 = 3{,}7$ В.

318. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определить: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 400 нм.

319. Фотоны с энергией $\varepsilon = 5$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4{,}7$ эВ. Определить максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона.

320. Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно 0,15 мкПа. Определить число фотонов, падающих на поверхность площадью 40 см^2 за 1 с.

321. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20%.

ОТВЕТЫ: **314.** 323 К. **315.** 1) В 256 раз; 2) уменьшилась на 3,62 мкм. **317.** 1,14 Мм/с. **318.** 1) 2,49 эВ; 2) 468 км/с. **319.** $2{,}96 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с. **320.** $4{,}52 \cdot 10^{17}$. **321.** 41,7 кэВ.

Раздел VI

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

6.1. Волновые свойства микрочастиц

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Гипотеза де Бройля
- Длина волны де Бройля
- Плоская волна де Бройля
- Скорость волн де Бройля (фазовая и групповая)
- Соотношение неопределенностей

Основные формулы

Связь между длиной волны де Бройля частицы и ее импульсом p

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

[h — постоянная Планка].

• Для нерелятивистской частицы $\boxed{v \ll c}$

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

[m — масса частицы; v — ее скорость; T — кинетическая энергия частицы].

• Для релятивистской частицы $\boxed{v \approx c}$

$$\lambda = \frac{h}{mv}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$$

[m — масса частицы; v — ее скорость; c — скорость распространения света в вакууме; T — кинетическая энергия частицы].

Фазовая скорость волны де Бройля

$$v_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

[$E = \hbar\omega$ — энергия частицы (ω — циклическая частота); $p = \hbar k$ — импульс ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число), $\hbar = \frac{h}{2\pi}$].

Групповая скорость волны де Бройля

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.$$

Соотношения неопределенностей:

• для координаты и импульса частицы

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar$$

[Δx, Δy, Δz — неопределенности координат; Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси коодинат];

• для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

[ΔE — неопределенность энергии некоторого состояния системы; Δt — промежуток времени, в течение которого оно существует].

Примеры решения задач

322. Определить длину волны де Бройля для нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при $T = 290$ К.

Дано:
$m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
$T = 290$ К

λ — ?

Решение:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\langle v_{\text{кв}} \rangle}, \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{3kmT}}.$$

Ответ: $\lambda = 148$ пм.

323. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1{,}282$ пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определить ее массу.

Дано:
$U = 500$ В
$\lambda = 1{,}282$ пм $= 1{,}282 \cdot 10^{-12}$ м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

m — ?

Решение:

$$eU = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \sqrt{2meU},$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}, \quad m = \frac{h^2}{2e\lambda^2 U}.$$

Ответ: $m = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

324. Вывести зависимость между длиной волны де Бройля релятивистской частицы и ее кинетической энергией.

Дано: λ, T

$\lambda(T) - ?$

Решение:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}, \quad p = \frac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{c},$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}.$$

Ответ: $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T+2mc^2)}}$.

325. Исходя из общей формулы для фазовой скорости ($v_ф = \omega/k$), определить фазовую скорость волн де Бройля свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы в случаях: 1) нерелятивистском; 2) релятивистском.

Дано:
$v_ф = \omega/k$
1) $v << c$
2) $v \approx c$

1) $v_{ф1}$ — ?
2) $v_{ф2}$ — ?

Решение:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v_{ф1} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p},$$

$$v << c, \quad E = \frac{p^2}{2m}, \quad v_{ф1} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2},$$

$$v \approx c, \quad E = mc^2, \quad v_{ф2} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}.$$

Ответ: 1) $v_{ф1} = \dfrac{v}{2}$, 1) $v_{ф2} = \dfrac{c^2}{v}$.

326. Определить связь между групповой и фазовой скоростями волн де Бройля.

Дано: $u, v_ф$

$u(v_ф)$ —?

Решение:

$$v_ф = \frac{\omega}{k}, \quad \omega = v_ф k, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad u = \frac{d\omega}{dk},$$

$$u=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d}{dk}(v_ф k)=v_ф+k\frac{dv_ф}{dk},$$

$$\frac{dv_ф}{dk}=\frac{dv_ф}{d\lambda}:\frac{dk}{d\lambda}=\frac{dv_ф}{d\lambda}:\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)=-\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dv_ф}{dk},$$

$$u=v_ф+k\frac{dv_ф}{dk}=v_ф+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)\frac{dv_ф}{d\lambda}=v_ф-\lambda\frac{dv_ф}{d\lambda}.$$

Ответ: $u=v_ф-\lambda\dfrac{dv_ф}{d\lambda}$.

327. Учитывая для движущейся вдоль оси X микрочастицы соотношение неопределенностей для Δx и Δp_x, найти аналогичное соотношение для ΔE и Δt, где ΔE — неопределенность энергии некоторого состояния системы, Δt — промежуток времени, в течение которого оно существует.

Решение:

$$\Delta x\,\Delta p_x\ge h,\quad E=\frac{mv_x^2}{2}=\frac{p_x^2}{2},$$

$$\Delta E=\frac{2p_x\Delta p_x}{2m}=\frac{mv_x\Delta p_x}{m}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p_x\qquad\left(p_x=mv_x\ \text{и}\ v_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}\right),$$

$$\Delta E\Delta t=\Delta x\Delta p_x,\quad \Delta E\Delta t\ge h.$$

328. Используя соотношение неопределенностей в виде $\Delta x\Delta p_x\ge\hbar$, оценить минимально возможную полную энергию электрона в атоме водорода. Принять неопределенность координаты равной радиусу атома. Сравнить полученный результат с теорией Бора.

Дано:
$\Delta x\Delta p_x\ge\hbar$
$\Delta x=r$
$n=1$
$Z=1$

E_{min} — ?

Решение:

$$\Delta x\Delta p_x\ge\hbar,\quad \frac{\Delta p_x}{p_x}\approx 1,\quad p_x\approx\Delta p_x=\frac{\hbar}{\Delta x}=\frac{\hbar}{r},$$

$$E=T+\Pi=\frac{p^2}{2m}+\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right),\quad E=\frac{\hbar^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\boxed{r_{min}:\ \frac{dE}{dr}=0}\qquad \frac{dE}{dr}=-\frac{\hbar^2}{mr^3}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}-\frac{\hbar^2}{mr}\right)=0,\quad r_{\min}=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2},$$

$$E_{\min}=\frac{\hbar^2}{2mr_{\min}^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}=-\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2},$$

$$\hbar=\frac{h}{2\pi},\quad E_{\min}=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Ответ: $E_{\min}=-\dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}=-13{,}6$ эВ.

329. Длина волны λ излучаемого атомом фотона составляет 0,6 мкм. Принимая время жизни атома в возбужденном состоянии $\Delta t = 10^{-8}$ с, определить отношение естественной ширины энергетического уровня, на который был возбужден электрон, к энергии, излученной атомом (рис. 69).

Дано:
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6\cdot 10^{-7}$ м
$\Delta t = 10^{-8}$ с

$\Delta E/E$ — ?

Решение:

$$\Delta E\,\Delta t \geq h,$$

$$\Delta E\,\Delta t = h,\quad \Delta E=\frac{h}{\Delta t},$$

$$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda},$$

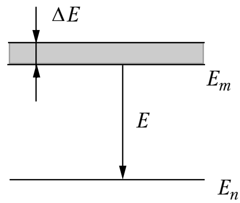


Рис. **69**

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{h}{\Delta t}\frac{\lambda}{hc}=\frac{\lambda}{c\Delta t}.$$

Ответ: $\dfrac{\Delta E}{E}=2\cdot 10^{-7}$.

Задачи для самостоятельного решения

330. Определить импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона; 2) электрона, если длина волны того и другого равна 10^{-10} м.

331. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де Бройля для него была равна 1 нм.

332. Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определить длину волны де Бройля.

333. Кинетическая энергия электрона равна 0,6 МэВ. Определить длину волны де Бройля.

334. Ширина следа электрона (обладающего кинетической энергией $T = 1{,}5$ кэВ) на фотопластинке, полученного с помощью камеры Вильсона, составляет $\Delta x = 1$ мкм. Опредеделить, можно ли по данному следу обнаружить отклонение в движении электрона от законов классической механики.

335. Воспользовавшись соотношением неопределенностей, оценить размытость энергетического уровня в атоме водорода: 1) для основного состояния; 2) для возбужденного состояния (время его жизни равно 10^{-8} с).

ОТВЕТЫ: **330.** 1) $p = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с; $E = 12{,}4$ кэВ; 2) $p = 6{,}63 \times \times 10^{-24}$ кг · м/с; $E = 151$ эВ. **331.** 0,822 мВ. **332.** 38,8 пм. **333.** 1,26 пм. **334.** $\frac{\Delta p_x}{p_x} = 10^{-4}$; нет. **335.** 1) 0; 2) 414 нэВ.

6.2. Уравнение Шрёдингера и его применение в некоторых задачах

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ

- Волновая функция и ее статистический смысл
- Плотность вероятности
- Условие нормировки вероятностей
- Принцип суперпозиции состояний
- Общее уравнение Шрёдингера
- Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний
- Средние значения физических величин
- Движение свободной частицы
- Одномерная прямоугольная потенциальная яма с бесконечно высокими «стенками»
- Туннельный эффект
- Коэффициент прозрачности потенциального барьера
- Линейный гармонический осциллятор

Основные формулы

Вероятность нахождения частицы в объеме $\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}W = \Psi\Psi^* \,\mathrm{d}V = |\Psi|^2 \,\mathrm{d}V$$

[$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; Ψ^* — функция, комплексно сопряженная с Ψ; $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции].

Для *стационарных состояний*

$$\mathrm{d}W = \psi\psi^* \mathrm{d}V = |\psi|^2 \mathrm{d}V$$

[$\psi = (x, y, z)$ — координатная (амплитудная) часть волновой функции].

Плотность вероятности

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = |\Psi|^2$$

[$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ — квадрат модуля волновой функции].

Вероятность обнаружения частицы в объеме V

$$W = \int_V \mathrm{d}W = \int_V |\Psi|^2 \,\mathrm{d}V$$

[$\mathrm{d}W$ — вероятность обнаружения частицы в объеме $\mathrm{d}V$; $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы].

Условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \,\mathrm{d}V = 1$$

[интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т.е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$].

Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ,

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L|\Psi|^2 \,\mathrm{d}V = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* L \Psi \,\mathrm{d}V$$

[интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т.е. по координатам x, y, z от $-\infty$ до $+\infty$].

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

[$\psi(x)$ — координатная часть волновой функции].

Общее уравнение Шрёдингера (временно́е уравнение Шрёдингера)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(\vec{r}, t)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

[$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar = h/(2\pi)$; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа $\left(\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)$; i — мнимая единица; $U(\vec{r}, t)$ — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором частица движется].

Уравнение Шрёдингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{h^2}(E - U)\psi = 0$$

[$\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции; $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$; $U = U(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы; E — полная энергия частицы].

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x,t) = A\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}$$

[A — амплитуда волны де Бройля; $p_x = \hbar k$ — импульс частицы; $E = \hbar\omega$ — энергия частицы].

Энергия свободно движущейся частицы

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m}$$

[$p_x = \hbar k$ — импульс частицы; m — масса частицы].

Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками»,

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

[$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ — постоянная Планка; l — ширина ямы; m — масса частицы].

Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U - E)}\, l\right]$$

[D_0 — множитель, который можно приравнять к единице; U — высота потенциального барьера; E — энергия частицы].

Уравнение Шрёдингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0$$

[$\dfrac{m\omega_0^2 x^2}{2} = U$ — потенциальная энергия осциллятора; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора; m — масса частицы].

Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

[$\hbar$ — постоянная Планка; ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора].

Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

Примеры решения задач

336. ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r}e^{-r/a}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра (рис. 70); a — некоторая постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определить нормировочный коэффициент A.

Дано:

$\psi = \frac{A}{r}e^{-r/a}$

$a = \mathrm{const}$

A — ?

Решение:

$$\int_V |\psi|^2 \, dV = 1, \quad dV = 4\pi r^2 dr,$$

$$\int_0^\infty \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a} \cdot 4\pi r^2 dr = 1,$$

$$4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-2r/a} dr = -\frac{4\pi}{2} A^2 a e^{-2r/a}\Big|_0^\infty = 2\pi A^2 a,$$

$$2\pi A^2 a = 1, \quad A = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}}.$$

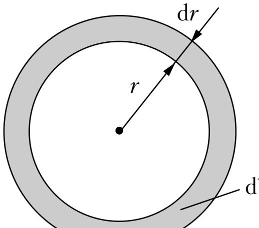


Рис. **70**

Ответ: $A = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}}$.

337. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, может быть представлена в виде $\Psi(x,t) = \psi(x)\,e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Показать, что плотность вероятности нахождения частицы определяется только координатной ψ-функцией.

Дано:

$\Psi(x,t)=\psi(x)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

w — ?

Решение:

$$w=\left|\Psi(x,t)\right|^2,\quad \left|\Psi(x,t)\right|^2=\Psi(x,t)\Psi^*(x,t),$$

$$w=\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\psi^*(x)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}Et}=\psi(x)\psi^*(x)=\left|\psi(x)\right|^2.$$

Ответ: $w=\left|\psi(x)\right|^2$.

338. Волновая функция $\psi=A\sin(2\pi x/l)$ определена только в области $0\le x\le l$. Используя это условие нормировки, определить нормировочный коэффициент A.

Дано:

$\psi = \mathrm{A}\sin\dfrac{2\pi \mathrm{x}}{1}$

$0\le x\le l$

A — ?

Решение:

$$\int_0^l\left|\psi(x)\right|^2\mathrm{d}x=1,\quad \left|\psi(x)\right|^2=A^2\sin^2\frac{2\pi x}{l},$$

$$\int_0^l\left|\psi(x)\right|^2\mathrm{d}x=\int_0^l A^2\sin^2\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}x=A^2\int_0^l\sin^2\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}x=$$

$$=A^2\int_0^l\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}\int_0^l\mathrm{d}x-\frac{A^2}{2}\int_0^l\cos\frac{4\pi x}{l}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{A^2}{2}x\Big|_0^l-\frac{A^2}{2}\frac{l}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{l}\Big|_0^l=\frac{A^2}{2}l,\quad \frac{A^2}{2}l=1,\quad A=\sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Ответ: $A=\sqrt{\dfrac{2}{l}}$.

339. ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi=\dfrac{A}{r}\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра, a — некоторая постоянная. Определить среднее расстояние $\langle r\rangle$ частицы до силового центра.

Дано:

$\psi=\dfrac{A}{r}\mathrm{e}^{-r/a}$

$a=\mathrm{const}$

$\langle r\rangle$ —?

Решение:

$$\langle r\rangle=\int_0^\infty r\left|\psi\right|^2\mathrm{d}V=\int_0^\infty r\,\psi\psi^*\mathrm{d}V,\quad dV=4\pi r^2\mathrm{d}r,$$

$A=\sqrt{\dfrac{1}{2\pi a}}$ (см. задачу 336),

$$\langle r\rangle=\int_0^\infty \frac{1}{2\pi a r^2}\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{2}{a}\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-2r/a}\mathrm{d}r=2\frac{1}{a\left(\dfrac{2}{a}\right)^2}=\frac{a}{2}.$$

Ответ: $\langle r\rangle=\dfrac{a}{2}$.

340. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi=A\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние электрона до ядра, a — первый боровский радиус. Определить наиболее вероятное расстояние $r_{\text{в}}$ электрона до ядра.

Дано:
$\psi=A\mathrm{e}^{-r/a}$
$a=\text{const}$

$r_{\text{в}}$ — ?

Решение:

$$\mathrm{d}W=|\psi(r)|^2\,\mathrm{d}V,\quad \mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r \text{ (см. задачу 336)},$$

$$\mathrm{d}W=4\pi A^2r^2\mathrm{e}^{-2r/a}\mathrm{d}r,\quad w=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}=4\pi A^2r^2\mathrm{e}^{-2r/a},$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=8\pi A^2r\mathrm{e}^{-2r/a}+4\pi A^2r^2\mathrm{e}^{-2r/a}\left(-\frac{2}{a}\right),$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=0}\quad 8\pi A^2r\mathrm{e}^{-2r/a}\left(1-\frac{r}{a}\right)=0,\quad 1-\frac{r_{\text{в}}}{a}=0,\quad r_{\text{в}}=a.$$

Ответ: $r_{\text{в}}=a$.

341. Определить длину волны фотона, испускаемого при переходе электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками» шириной $l=0{,}2$ нм из состояния с $n=2$ в состояние с наименьшей энергией.

Дано:
$l=0{,}2\text{ нм}=2\cdot10^{-10}\text{ м}$
$n=2$
$m=1$

λ — ?

Решение:

$$h\nu=E_n-E_m,\quad \lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{E_n-E_m},$$

$$E_n=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$E_n - E_m = E_2 - E_1 = 4E_1 - E_1 = 3E_1, \ \lambda = \frac{ch}{3E_1} = \frac{2}{3}\frac{chml^2}{\pi^2\hbar^2} = \frac{8}{3}\frac{cml^2}{h}.$$

Ответ: $\lambda = \frac{8}{3}\frac{cml^2}{h}$.

342. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками», имеет вид $\psi(x) = A\sin kx$. Определить: 1) вид собственной волновой функции $\psi_n(x)$; 2) исходя из условия нормировки вероятностей, коэффициент A.

Дано:
$\psi(x) = A\sin kx$

1) $\psi_n(x)$ — ?
2) A — ?

Решение:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0, \quad \psi(l) = A\sin kl = 0, \quad kl = n\pi,$$

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad \psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)x, \quad \int_0^l |\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1,$$

$$\int_0^l A^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}A^2 l = 1.$$

Ответ: 1) $\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$; 2) $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$.

343. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими «стенками» (рис. 71). Определить вероятность W обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии ($n = 3$). Пояснить физический смысл полученного результата, изобразив графически плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии.

Дано:

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

$n = 3$

$\frac{1}{3}l \le x \le \frac{2}{3}l$

W — ?

Решение:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right),$$

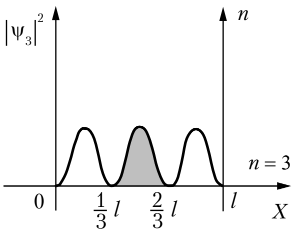


Рис. **71**

$$W=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\left|\psi_3\right|^2\mathrm{d}x=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{6\pi}{l}x\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\mathrm{d}x-\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\cos\left(\frac{6\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{l}x\Bigg|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{l}\frac{l}{6\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{l}x\right)\Bigg|_{l/3}^{2l/3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin\left(\frac{6\pi}{l}\frac{2l}{3}\right)-\sin\left(\frac{6\pi}{l}\frac{l}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}(\sin 4\pi-\sin 2\pi)=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $W=\frac{1}{3}.$

344. Протон с энергией $E = 5$ эВ движется в положительном направлении оси X, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0{,}1$ нм. Определить: 1) вероятность прохождения протоном этого барьера; 2) во сколько раз надо сузить барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном была такой же, как для электрона при вышеприведенных условиях.

Дано:

$m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг

$E = 5$ эВ $= 8\cdot10^{-19}$ Дж

$U = 10$ эВ $= 1{,}6\cdot10^{-18}$ Дж

$l = 0{,}1$ нм $= 10^{-10}$ м

$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг

1) W_p — ?

2) $\frac{l}{l'}$ —?

Решение:

$$W_p=D=\exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)}\right],$$

$$W_e=\exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_e(U-E)}\right],$$

$$W'_p=W_e=\exp\left[-\frac{2l'}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)}\right],$$

$$-\frac{2l'}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)}=-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_e(U-E)},\quad \frac{l}{l'}=\sqrt{\frac{m_p}{m_e}}.$$

Ответ: 1) $W_p = 1{,}67\cdot10^{-43}$; 2) $\frac{l}{l'}=42{,}8.$

345. Частица с энергией E движется в положительном направлении оси X и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E < U$ (рис. 72). Принимая $A_1 = 1$ (как это обычно делается) и воспользовавшись условиями непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей *1* и *2*, определить плотность вероятности обнаружения частицы на расстоянии x от потенциального барьера.

Дано:
$E < U$
$A_1 = 1$
$\psi_1(0) = \psi_2(0)$
$\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$

$|\psi_2(x)|^2$ — ?

Решение:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi_2 = 0,$$

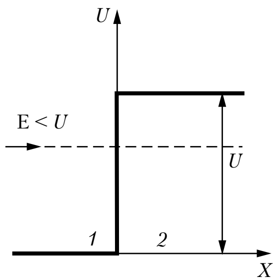


Рис. **72**

$$\psi_1(x) = e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar},$$

$$\boxed{\psi_1(0) = \psi_2(0)} \quad 1 + B_1 = A_2,$$

$$\boxed{\psi'_1(0) = \psi'_2(0)} \quad k_1 - B_1k_1 = k_2A_2,$$

$$A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad |\psi_2(x)|^2 = \left|A^2 e^{ik_2x}\right|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right|^2 e^{2ik_2x}, \quad k_2 = i\beta,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}, \quad |\psi_2(x)|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + i\beta}\right|^2 e^{-2\beta x}.$$

Ответ: $|\psi_2(x)|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + i\beta}\right|^2 e^{-2\beta x}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$.

346. Доказать, что волновая функция $\psi(x) = Axe^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$ может быть решением уравнения Шрёдингера для гармонического осциллятора, масса которого m и постоянная квазиупругой силы k. Определить собственное значение полной энергии осциллятора.

Дано:

$\psi(x) = Axe^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$

m, k

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

E — ?

Решение:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0, \quad \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} = a,$$

$$\psi(x) = Axe^{-ax^2},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = Ae^{-ax^2} - 2aAx^2e^{-ax^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -2aAxe^{-ax^2} - 4aAxe^{-ax^2} + 4a^2Ax^3e^{-ax^2} =$$

$$= -6aAxe^{-ax^2} + 4a^2Ax^3e^{-ax^2},$$

$$-6aAx + 4a^2Ax^3 + \frac{2mEAx}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2Ax^3}{\hbar^2} = 0,$$

$$-\frac{3\sqrt{mk}}{2\hbar} + \frac{2mk}{4\hbar^2}x^2 + \frac{mE}{\hbar^2} - \frac{m^2k}{m\cdot 2\hbar^2}x^2 = 0, \quad \frac{mE}{\hbar^2} = \frac{3\sqrt{mk}}{2\hbar},$$

$$E = \frac{3\hbar\sqrt{mk}}{2m} = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0.$$

Ответ: $E = \dfrac{3}{2}\hbar\omega_0$.

Задачи для самостоятельного решения

347. Используя условие нормировки вероятностей, определить нормировочный коэффициент волновой функции $\psi(r) = Ae^{-r^2/(2a^2)}$, описывающей поведение некоторой частицы, где r — расстояние частицы от силового центра; a — некоторая постоянная.

348. Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра, a — первый боровский радиус. Определить среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2\rangle$ электрона до ядра в основном состоянии.

349. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(r) = Ae^{-r^2/(2a^2)}$, где r — расстояние частицы от силового центра; a — постоянная. Определить наиболее вероятное расстояние $r_в$ частицы от силового центра.

350. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими «стенками». Записать уравнение Шрёдингера в пределах ямы ($0 \le x \le l$) и решите его.

351. Известно, что нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими «стенками», имеет вид $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$, где l — ширина ямы. Определить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ электрона.

352. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}1$ нм. Разность между высотой потенциального барьера и энергией движущегося в положительном направлении оси X электрона равна $U - E = 5$ эВ. Определить, во сколько раз изменится коэффициент D прозрачности потенциального барьера для электрона, если разность $U - E$ возрастет в 4 раза.

ОТВЕТЫ: **347.** $A = 1/\sqrt{\pi^{3/2} a^3}$ **348.** $\langle r^2 \rangle = 3a^2$. **349.** $r_в = a$. **350.** $\psi(x) = A \sin kx$, где $k = n\pi/l$. **351.** $\langle x \rangle = l/2$. **352.** Уменьшится в 10 раз.

Раздел VII

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

7.1. Атом водорода по Бору и его квантово-механическое описание

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Модель атома Резерфорда
- Линейчатый спектр атома водорода
- Радиусы разрешенных орбит в боровской теории атома водорода
- Энергия электрона в атоме водорода по Бору
- Энергия ионизации
- Энергия связи данного состояния
- Энергия возбуждения
- Спектр атома водорода по Бору
- Энергия электрона в атоме водорода при квантово-механическом описании
- Квантовые числа
- Спектр атома водорода при квантово-механическом описании
- 1*s*-состояние в атоме водорода

Основные формулы

Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре излучения атома водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

[ν — частота спектральных линий в спектре атома водорода; R — постоянная Ридберга; $\frac{1}{\lambda}$ — волновое число; m определяет серию ($m = 1, 2, 3, ...$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, ...$); $m = 1$ (серия Лаймана), $m = 2$ (серия Бальмера), $m = 3$ (серия Пашена), $m = 4$ (серия Брэкета), $m = 5$ (серия Пфунда), $m = 6$ (серия Хэмфри)].

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e v_n r_n = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

[m_e — масса электрона; v_n — скорость электрона на n-й орбите радиусом r_n].

Второй постулат Бора (правило частот)

$$h\nu = E_n - E_m$$

[E_n и E_n — энергии стационарных состояний атома соответственно до и после излучения (поглощения)].

Радиус n-й стационарной орбиты в боровской модели атома водорода

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[$\hbar$ — постоянная Планка; ε_0 — электрическая постоянная; m_e — масса электрона; e — элементарный заряд].

Первый боровский радиус

$$r_1 = a = \frac{\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2} = 52{,}8 \text{ пм.}$$

Энергия электрона в атоме водорода по Бору

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ эВ} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[h — постоянная Планка; m_e — масса электрона; e — элементарный заряд].

Потенциальная энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром в водородоподобном атоме

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

[r — расстояние между электроном и ядром; Z — порядковый номер элемента].

Собственное значение энергии E_n электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Энергия электрона в атоме водорода при квантово-механическом описании

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Энергия ионизации атома водорода

$$E_i = -E_1 = \frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

[l — орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0, 1, ..., n - 1$ (всего n значений)].

Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l$$

[m_l — магнитное квантовое число, принимающее при заданном l следующие значения: $m_l = 0, \pm 1, ..., \pm l$ (всего $2l + 1$ значений)].

Правила отбора для орбитального и магнитного чисел

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m_l = 0, \pm 1.$$

Нормированная волновая функция, отвечающая $1s$-состоянию (основному состоянию) электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

[$a = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ — величина, совпадающая с первым боровским радиусом].

Вероятность обнаружить электрон в атоме водорода, находящемся в $1s$-состоянии, в интервале от r до $r + dr$

$$dW = |\psi_{100}|^2\, dV = |\psi_{100}|^2 \cdot 4\pi r^2\, dr$$

[$dV = 4\pi r^2\, dr$ — элемент объема в виде сферического слоя радиусом r и толщиной dr].

Примеры решения задач

353. Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана $\lambda_Л = 0{,}12$ мкм (рис. 73). Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определить максимальную длину волны линии серии Бальмера.

Дано:
$Z = 1$
$\lambda_Л = 0{,}12$ мкм $= 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м
$m_Л = 1$
$m_Б = 2$

$\lambda_Б$ — ?

Решение:

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{1}{\lambda_Л} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right),$$

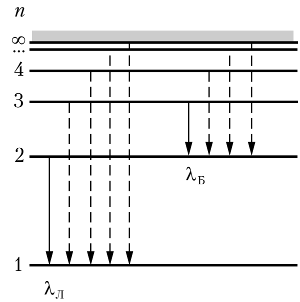


Рис. **73**

$$\frac{1}{\lambda_Б} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right),$$

$$\lambda_Б = \lambda_Л \frac{\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)}{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)}.$$

Ответ: $\lambda_Б = 0{,}648$ мкм.

354. Доказать, что энергетические уровни атома водорода могут быть описаны выражением $E_n = -\frac{2\pi\hbar}{n^2}R$, где R — постоянная Ридберга.

Дано:
$Z = 1$

$E_n = -\frac{2\pi\hbar}{n^2}R$ — ?

Решение:

$$m_e v_n r_n = n\hbar, \quad \frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}, \quad r_n = n^2 \frac{\hbar \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2},$$

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2},$$

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} = -\frac{m_e e^4}{h \cdot 8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad \nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2},$$

$$E_n = -\frac{2\pi\hbar}{n^2}R = -\frac{2\pi\hbar}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2} = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

355. Определить: 1) частоту f вращения электрона, находящегося на первой орбите; 2) эквивалентную ей силу тока.

Дано:
$n = 1$
$r_1 = 52{,}8$ пм $= 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м

1) f — ?
2) I — ?

Решение:

$$mvr = n\hbar, \quad n = 1, \quad v_1 = \frac{\hbar}{mr_1}, \quad T = \frac{2\pi r_1}{v_1},$$

$$f = \frac{1}{T}, \quad f = \frac{v_1}{2\pi r_1} = \frac{\hbar}{2\pi m r_1^2}, \quad I = \frac{e}{T} = ef.$$

Ответ: 1) $f = 6{,}58 \cdot 10^{15}$ Гц; 2) $I = 1{,}05$ мА.

356. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10{,}2$ В, определить в электронвольтах энергию фотона, соответствующую второй линии серии Бальмера (рис. 74).

Дано:
$\varphi_1 = 10{,}2$ В

$E_{4,2}$ — ?

Решение:

$$e\varphi_1 = h\nu_{1,2},$$

$$h\nu_{1,2} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hR,$$

$$e\varphi_1 = \frac{3}{4}hR, \quad hR = \frac{4}{3}e\varphi_1,$$

$$E_{4,2} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{16}hR = \frac{1}{4}e\varphi_1.$$

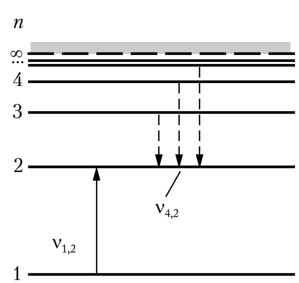


Рис. **74**

Ответ: $E_{4,2} = 2{,}55$ эВ.

357. Записать возможные значения орбитального квантового числа l и магнитного квантового числа m_l для главного квантового числа $n = 4$.

Решение:

$n = 4, \quad l = 0, \quad m_l = 0.$
$l = 1, \quad m_l = 0, \pm 1.$
$l = 2, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2.$
$l = 3, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$

358. Нормированная волновая функция, описывающая $1s$-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где r — расстояние электрона до ядра; a — первый боровский радиус. Определить среднее значение потенциальной энергии электрона в поле ядра.

Дано:

$\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$

$a = \text{const}$

$\langle U \rangle$ — ?

Решение:

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad \langle U \rangle = \int_V U\psi^* \psi \, dV, \quad dV = 4\pi r^2 dr,$$

$$\langle U \rangle = \int_0^\infty \left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r e^{-2r/a} \, dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4}{a^3} \frac{1!}{(2/a)^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4}{a^3} \frac{a^2}{4} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a}.$$

Ответ: $\langle U \rangle = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{a}$.

359. Нормированная волновая функция, описывающая 1s-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить вероятность W обнаружения электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0{,}05a$.

Дано:

$\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$

$r = 0{,}05a$

W — ?

Решение:

$$dV = 4\pi r^2 dr,$$

$$dW = |\psi_{100}(r)|^2 dV = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \right|^2 4\pi r^2 dr,$$

$$W = \frac{4}{a^3} \int_0^{0{,}05a} r^2 e^{-2r/a} \, dr.$$

По условию задачи, r мало ($r_{\max} = 0{,}05a$; $a = 52{,}8$ пм), поэтому сомножитель $e^{-2r/a}$ можно разложить в ряд:

$$e^{-2r/a} = 1 - \frac{2r}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2r}{a}\right)^2 - \ldots;$$

$$W=\frac{4}{a^3}\int_0^{0,05a} r^2\left(1-\frac{2r}{a}\right)\mathrm{d}r=\frac{4}{a^3}\left[\int_0^{0,05a} r^2\mathrm{d}r-\frac{2}{a}\int_0^{0,05a} r^3\mathrm{d}r\right]=$$

$$=\frac{4}{a^3}\left[\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{0,05a}-\frac{2}{a}\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{0,05a}\right]=1{,}54\cdot10^{-4}.$$

Ответ: $W=1{,}54\cdot10^{-4}$.

Задачи для самостоятельного решения

360. Определить энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

361. Используя теорию Бора для атома водорода, определить: 1) радиус ближайшей к ядру орбиты (первый боровский радиус); 2) скорость движения электрона по этой орбите.

362. Определить скорость v электрона на третьей орбите атома водорода.

363. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i=13{,}6$ эВ, определить в электронвольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Бальмера.

364. Волновая функция $\psi_{nlm_l}(r,\vartheta,\varphi)$, описывающая атом водорода, определяется главным квантвым числом n, орбитальным квантовым числом l и магнитным квантовым числом m_l. Определить число различных состояний, соответствующих данному n.

365. Волновая функция, описывающая 1s-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi=C\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра; a — первый боровский радиус. Определить нормированную волновую функцию, отвечающую этому состоянию

ОТВЕТЫ: **360.** 1,89 эВ. **361.** 1) 52,8 пм; 2) 2,19 Мм/с. **362.** $v=\mathrm{e}^2/(n\times4\pi\varepsilon_0\hbar)=0{,}731$ Мм/с. **363.** 1,89 эВ. **364.** n^2. **365.** $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\mathrm{e}^{-r/a}$.

7.2. Элементы современной физики атомов и молекул

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Моменты механические и магнитные орбитальные электронов и атомов
- Спин электрона
- Спиновое квантовое число
- Магнитное спиновое квантовое число
- Магнетон Бора
- Тождественные частицы
- Принцип неразличимости тождественных частиц
- Принцип Паули
- Электронные оболочки в атоме
- Рентгеновские спектры
- Сплошной (тормозной) рентгеновский спектр
- Характеристический рентгеновский спектр
- Закон Мóзли

Основные формулы

Спин (собственный механический момент импульса) электрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$$

[s — спиновое квантовое число $(s = \frac{1}{2})$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$].

Проекция спина на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s$$

[m_s — магнитное спиновое квантовое число $(m_s = \pm 1/2)$].

Принцип Паули

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1$$

[$Z(n, l, m_l, m_s)$ — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: n — главное, l — орбитальное, m_l — магнитное, m_s — магнитное спиновое].

Эти числа могут принимать следующие значения:

- главное $n = 1, 2, 3, ...$;
- орбитальное $l = 0, 1, 2, ..., n - 1$;

• магнитное $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$;

• магнитное спиновое $m_s = \pm 1/2$.

Максимальное число электронов $Z(n)$, находящихся в состояниях, определяемых заданным главным квантовым числом n,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

[l — орбитальное квантовое число].

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{ch}{eU}$$

[e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке].

Закон Мóзли, определяющий частоты спектральных линий характеристического рентгеновского излучения,

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

[R — постоянная Ридберга; Z — порядковый номер элемента в Периодической системе; σ — постоянная экранирования; m определяет рентгеновскую серию ($m = 1, 2, 3, ...$); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, ...$)].

Закон Мóзли для линии K_α ($\sigma = 1$)

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

Примеры решения задач

366. Электрон в атоме находится в d-состоянии. Определить: 1) момент импульса (орбитальный) L_l электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса $L_{lz\max}$ на направление внешнего магнитного поля.

Дано:	*Решение*:
d-состояние $l = 2$	$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, $\boxed{l = 2}$
1) L_l — ? 2) $L_{lz\max}$ — ?	$L_l = \hbar\sqrt{6}$, $\boxed{m_l = 0, \pm 1, \pm 2}$ $m_{l\max} = 2$, $L_{lz} = \hbar m_l$, $L_{lz\max} = 2\hbar$.

Ответ: 1) $L_l = 2{,}45\,\hbar$; 2) $L_{lz\max} = 2\,\hbar$.

367. Определить числовое значение: 1) собственного механического момента импульса (спина) L_s; 2) проекции спина L_{sz} на направление внешнего магнитного поля.

Решение:

$$1)\ L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)},\quad s = \frac{1}{2},\quad L_s = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}} = 9{,}09\cdot 10^{-35}\ \text{Дж}\cdot\text{с};$$

$$2)\ L_{sz} = \hbar m_s,\quad m_s = \pm\frac{1}{2},\quad L_{sz} = \pm\hbar\cdot\frac{1}{2} = \pm\,5{,}25\cdot 10^{-35}\ \text{Дж}\cdot\text{с}.$$

368. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 3$. Определить число электронов в этой оболочке, которые имеют одинаковые квантовые числа: $m_s = -1/2$, $m_l = 0$, $m_l = -1$, $m_s = 1/2$.

Дано:
$n = 3$
$m_s = -1/2$
$m_l = 0$
$m_l = -1,\ m_s = 1/2$

N — ?

Решение:

$$l = 0,\quad m_l = 0,\quad m_s = \pm\frac{1}{2};$$

$$l = 1,\quad m_l = 0, \pm 1,\quad m_s = \pm\frac{1}{2};$$

$$l = 2,\quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2,\quad m_s = \pm\frac{1}{2}.$$

Ответ: $m_s = -\frac{1}{2} : N = 9;\ m_l = 0 : N = 6;\ m_l = -1,\ m_s = \frac{1}{2} : N = 2.$

369. Записать квантовые числа, определяющие внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома натрия.

Решение:

^{11}Na: $1s^2 2s^2 2p^6 3s$

Валентный электрон: $n = 3,\quad l = 0,\quad m_l = 0,\quad m_s = \pm\frac{1}{2}.$

370. Определить длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость v электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, составляет $0{,}8c$.

Дано:
$v = 0{,}8c$
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$\lambda_{\min}$ — ?

Решение:

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{\min}}, \quad eU = T, \quad T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right),$$

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right),$$

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)} = \frac{h}{mc\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)}.$$

Ответ: $\lambda_{\min} = 3{,}64$ пм.

371. Определить порядковый номер элемента в периодической системе элементов Менделеева, если длина волны λ линии K_α характеристического рентгеновского излучения составляет 72 пм.

Дано:
K_α-линия
$\sigma = 1$
$\lambda = 72$ пм $= 7{,}2 \cdot 10^{-11}$ м

Z — ?

Решение:

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - \sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$R' = 1{,}1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}, \quad m = 1, \quad n = 2,$$

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - 1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \quad (Z - 1)^2 = \frac{4}{3R'\lambda},$$

$$Z = \sqrt{\frac{4}{3R'\lambda}} + 1.$$

Ответ: $Z = 42$, молибден.

372. Определить постоянную экранирования σ для L-серии рентгеновского излучения (рис. 75), если при переходе электрона в атоме вольфрама с M-оболочки на L-оболочку длина волны λ испущенного фотона составляет 140 пм.

Дано:
$Z = 74$
L
$\lambda = 140$ пм $= 1{,}4 \cdot 10^{-10}$ м
L_α-линия

σ — ?

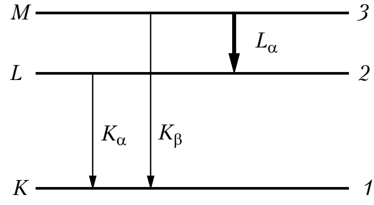


Рис. **75**

L_α-линия:

$\boxed{m = 2}$ $\boxed{n = 3}$ $\frac{1}{\lambda} = R'(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$, $(Z - \sigma)^2 = \frac{36}{5R'\lambda}$,

$$\sigma = Z - \sqrt{\frac{36}{5R'\lambda}}.$$

Ответ: $\sigma = 5{,}63$.

Задачи для самостоятельного решения

373. Электрон в атоме находится в f-состоянии. Определить возможные значения (в единицах $\hbar$) проекции момента импульса L_{lz} орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля.

374. Объяснить, что лежит в основе классификации частиц на фермионы и бозоны, а также которые из них описываются симметричными волновыми функциями.

375. Исходя из принципа неразличимости тождественных частиц, дать определение симметричной и антисимметричной волновых функций. Объяснить, почему изменение знака волновой функции не влечет за собой изменение состояния.

376. Учитывая принцип Паули, определить максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых главным квантовым числом.

377. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 4$. Определить число электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_l = -3$; 2) $m_s = 1/2, l = 2$; 3) $m_s = -1/2, m_l = 1$.

378. Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s$. Определить этот элемент.

379. Определить длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если при увеличении напряжения на рентгеновской трубке в два раза она изменилась на 50 пм.

380. В атоме вольфрама электрон перешел с M-оболочки на L-оболочку. Принимая постоянную экранирования $\sigma = 5{,}63$, определить энергию испущенного фотона.

ОТВЕТЫ: **377.** 1) 2; 2) 5; 3) 3. **379.** 100 пм. **380.** 8,88 кэВ.

Раздел VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

8.1. Характеристики атомного ядра. Ядерные силы

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Атомное ядро и его состав
- Зарядовое число
- Заряд ядра
- Массовое число
- Изотопы
- Изобары
- Изотоны
- Радиус ядра
- Спин (собственный момент импульса) ядра
- Магнитный момент ядра
- Ядерный магнетон
- Энергия связи ядра
- Дефект массы ядра
- Удельная энергия связи ядра
- Ядерные силы
- Модели ядра

Основные формулы

Радиус ядра атома

$$R = R_0 A^{1/3}$$

[$R_0 = (1{,}3—1{,}7)$ фм; A — массовое число].

Энергия связи ядра атома

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]\,c^2 = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]\,c^2$$

[m_p, m_n, $m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число; A — массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ — масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома].

Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n] - m$$

[m_p, m_n, $m_{\text{я}}$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z — зарядовое число; A — массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ — масса атома водорода (^1_1H); m — масса атома].

Удельная энергия связи

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}.$$

Спин (собственный момент импульса) яда

$$L_я = \hbar\sqrt{I(I+1)}$$

[$\hbar = h/(2\pi)$ — постоянная Планка; I — спиновое ядерное квантовое число ($I = 0, 1/2, 1, 3/2, ...$)].

Связь между магнитным моментом $\vec{p}_{mя}$ и собственным моментом импульса (спина) $\vec{L}_я$ ядра

$$\vec{p}_{mя} = g_я \vec{L}_я$$

[$g_я$ — ядерное гиромагнитное отношение].

Ядерный магнетон

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p}$$

[e — заряд электрона; $\hbar = h/(2\pi)$ — постоянная Планка; m_p — масса протона].

Примеры решения задач

381. Определить удельную энергию связи $\delta E_{св}$ (энергию связи, отнесенную к одному нуклону) для ядер: 1) ${}^4_2He$; 2) ${}^{12}_6C$. Массы нейтральных атомов гелия и углерода соответственно равны $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг и $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано:
1) ${}^4_2He$
2) ${}^{12}_6C$

$\delta E_{св}$ — ?

Решение:

$$E_{св} = \Delta mc^2, \quad E_{св} = [Zm_H + (A-Z)m_n - m]c^2,$$

$$\delta E_{св} = \frac{[Zm_H + (A-Z)m_n - m]c^2}{A},$$

$$m_{{}^4_2He} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}\ кг, \quad m_{{}^{12}_6C} = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}\ кг,$$

$$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ кг, \quad m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}\ кг.$$

Ответ: 1) $\delta E_{св} = 7{,}1$ МэВ/нуклон; 2) $\delta E_{св} = 7{,}7$ МэВ/нуклон.

382. Энергия связи $E_{св}$ ядра, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, равна 39,3 МэВ. Определить массу m нейтрального атома.

Дано:	*Решение*:
$E_{св} = 39{,}3$ МэВ $= 6{,}288 \cdot 10^{-22}$ Дж $Z = 3$ $N = 4$ $m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $m_Н = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг	$E_{св} = [Zm_Н + (A - Z)m_n - m]c^2$, $\dfrac{E_{св}}{c^2} = Zm_Н + (A - Z)m_n - m$, $m = Zm_Н + (A - Z)m_n - \dfrac{E_{св}}{c^2}$.
m — ?	

Ответ: $m = 1{,}165 \cdot 10^{-26}$ кг.

Задачи для самостоятельного решения

383. Определить, пользуясь таблицей Менделеева, число нейтронов и протонов в атомах платины и урана.

384. Определить энерию связи ядра атома гелия $^4_2\mathrm{He}$. Масса нейтрального атома гелия равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

385. Определить массу изотопа $^{15}_{7}\mathrm{N}$, если изменение массы при образовании ядра $^{15}_{7}\mathrm{N}$ составляет $0{,}2508 \cdot 10^{-27}$ кг.

ОТВЕТЫ: **384.** 28,4 МэВ. **385.** $2{,}4909 \cdot 10^{-26}$ кг.

8.2. Радиоактивность

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Радиоактивность естественная и искусственная
- Закон радиоактивного распада
- Радиоактивный распад
- Типы радиоактивных излучений
- Среднее время жизни радиоактивного ядра
- Бета-распад
- Период полураспада
- Альфа-распад
- Гамма-излучение ядер

Основные формулы

Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t$$

[N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t; λ — постоянная радиоактивного распада].

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

[N — число нераспавшихся ядер к моменту времени t; N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ — постоянная радиоактивного распада].

Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}).$$

Связь между периодом полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного распада λ

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Связь между средним временем жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Активность нуклида

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}T}\right| = \lambda N.$$

Правила смещения:

- для α-распада

$$ {}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y} + {}_2^4\mathrm{He};$$

- для β⁻-распада

$$ {}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + {}_{-1}^{0}e;$$

- для β+-распада

$$ {}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + {}_{+1}^{0}e$$

[${}_Z^A\mathrm{X}$ — материнское ядро; Y — символ дочерного ядра; ${}_2^4\mathrm{He}$ — ядро гелия (α-частица); ${}_{-1}^{0}e$ — символическое обозначение электрона (заряд его равен −1, а массовое число — нулю); ${}_{+1}^{0}e$ — символическое обозначение позитрона (заряд его равен +1, а массовое число — нулю)].

Схема электронного захвата

$$ {}_Z^A\mathrm{X} + {}_{-1}^{0}e \to {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + {}_0^0\nu_e$$

[${}_0^0\nu_e$ — нейтрино].

Примеры решения задач

386. Определить, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за три года, если за один год оно уменьшилось в 4 раза.

Дано:

$t_1 = 1$ год

$t_2 = 3$ года

$N_0/N_1 = 4$

N_0/N_2 — ?

Решение:

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad N_1 = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_1}, \quad N_2 = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_2},$$

$$\frac{N_0}{N_1} = \mathrm{e}^{\lambda t_1} = 4, \quad \lambda = \frac{\ln 4}{t_1},$$

$$\frac{N_0}{N_2} = \mathrm{e}^{\lambda t_2} = \mathrm{e}^{\frac{\ln 4 \cdot t_2}{t_1}} = \mathrm{e}^{3\ln 4}.$$

Ответ: $N_0/N_2 = 64$.

387. Определить период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 849$ с.

Дано:

$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{5}{8}$

$t = 849$ с

$T_{1/2}$ — ?

Решение:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{5}{8}, \quad e^{-\lambda t} = \frac{3}{8},$$

$$-\lambda t = \ln\frac{3}{8}, \quad \lambda = \frac{\ln\frac{8}{3}}{t}, \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2 \cdot t}{\ln\frac{8}{3}}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 10$ мин.

388. Вывести формулу для скорости (активности) радиоактивного распада через период полураспада $T_{1/2}$ и начальное число N_0 радиоактивных атомов.

Дано:

N_0

$T_{1/2}$

A — ?

Решение:

$$dN = -\lambda N dt, \quad A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N, \quad N = N_0 e^{-\lambda t},$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}}.$$

Ответ: $A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}}$.

389. Первоначальная масса радиоактивного изотопа иода $^{131}_{53}\mathrm{I}$ (период полураспада $T_{1/2} = 8$ сут) равна 1 г. Определить: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 3 сут.

Дано:

$M = 131 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг

$T_{1/2} = 8$ сут $= 6{,}91 \cdot 10^5$ с

$t = 3$ сут $= 2{,}59 \cdot 10^5$ с

1) A_0 — ?

2) A —?

Решение:

$$A_0 = \lambda N_0, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad N_0 = \frac{m N_A}{M},$$

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m N_A}{M}, \quad A = A_0 e^{-\lambda t},$$

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{mN_A}{M} e^{-\lambda t}.$$

Ответ: 1) $A_0 = 4{,}61 \cdot 10^{15}$ Бк; 2) $A = 3{,}55 \cdot 10^{15}$ Бк.

390. Определить период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за 5 сут уменьшилась в 2,2 раза.

Дано:
$A_0/A = 2{,}2$
$t = 5$ сут

$T_{1/2}$ — ?

Решение:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad A = A_0 e^{-\lambda t},$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{A_0}{A}, \quad T_{1/2} = t \frac{\ln 2}{\ln 2{,}2}.$$

Ответ: $T_{1/2} = 4{,}4$ сут.

391. Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определить, в какой элемент превращается ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ после трех α-распадов и двух β^--распадов.

Дано:
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$
3α
$2\beta^-$

X — ?

Решение:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{87}\mathrm{Fr} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{88}\mathrm{Ra}.$$

торий радий радон франций радий

Ответ: ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

Задачи для самостоятельного решения

392. Считая постоянную λ радиоактивного распада известной и используя закон радиоактивного распада, вывести выражение: 1) для периода полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного ядра; 2) для среднего времени жизни τ радиоактивного ядра.

393. Постоянная радиоактивного распада изотопа ${}^{210}_{82}\mathrm{Pb}$ равна 10^{-9} с$^{-1}$. Определить время, в течение которого распадается 2/5 начального количества ядер этого радиоактивного изотопа.

394. Начальная активность 1 г изотопа радия ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ равна 1 Ки. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

395. Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определить, в какой элемент превращается $^{238}_{92}U$ после шести α-распадов и трех β^--распадов.

396. Определить, сколько β- и α-частиц выбрасывается при превращении ядра таллия $^{210}_{81}Tl$ в ядро свинца $^{206}_{82}Pb$.

397. Радиоактивный изотоп радия $^{225}_{88}Ra$ претерпевает четыре α-распада и два β^--распада. Определить для конечного ядра: 1) зарядовое число Z; 2) массовое число A.

ОТВЕТЫ: **392.** $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$; 2) $\tau = 1/\lambda$. **393.** 16,2 года. **394.** 1582 года. **395.** $^{209}_{83}Bi$. **396.** Три β-частицы и одна α-частица. **397.** 1) 82; 2) 209.

8.3. Ядерные реакции и их основные типы

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

- Ядерные реакции
- Экзотермическая реакция
- Эндотермическая реакция
- Классификация ядерных реакций
- Реакция деления ядра
- Цепная реакция деления
- Реакция синтеза атомных ядер
- Термоядерная реакция

Основные формулы

Символическая запись ядерной реакции

$$ {}_Z^A\mathrm{X} + a \to {}_{Z'}^{A'}\mathrm{Y} + b \quad \text{или} \quad {}_Z^A\mathrm{X}\,(a, b)\,{}_{Z'}^{A'}\mathrm{Y} $$

[${}_Z^A\mathrm{X}$ и ${}_{Z'}^{A'}\mathrm{Y}$ — исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы].

Энергия ядерной реакции

$$ Q = c^2[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)] $$

[m_1 и m_2 — масса покоя ядра-мишени и масса бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ — сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Если $Q > 0$ — экзотермическая реакция, то $Q < 0$ — эндотермическая реакция].

Скорость нарастания цепной реакции

$$ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(k-1)}{T}, $$

откуда

$$ N = N_0 \exp[(k-1)t/T] $$

[N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t; T — среднее время жизни одного поколения; k — коэффициент размножения нейтронов].

Примеры решения задач

398. Покоившееся ядро полония ${}_{84}^{200}\mathrm{Po}$ испускает α-частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5{,}77$ МэВ. Определить: 1) скорость отдачи дочернего ядра; 2) какую долю кинетической энергии α-частицы составляет энергия отдачи дочернего ядра.

Дано:

$^{200}_{84}Po \to ^{196}_{82}Pb + ^{4}_{2}He$

$T_\alpha = 5{,}77$ МэВ $= 9{,}23 \cdot 10^{-15}$ Дж

1) $v_д$ — ?

2) $\dfrac{T_д}{T_\alpha}$ — ?

Решение:

$$m_\alpha v_\alpha = m_д v_д, \quad T_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2},$$

$$v_д = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_д} = \frac{\sqrt{2m_\alpha T_\alpha}}{m_д},$$

$$T_д = \frac{m_д v_д^2}{2} = \frac{m_\alpha T_\alpha}{m_д}, \quad \frac{T_д}{T_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_д}.$$

Ответ: 1) $v_д = 339$ км/с; 2) $\dfrac{T_д}{T_\alpha} = 0{,}02$.

399. Определить энергию, выделяющуюся в результате реакции $^{23}_{12}Mg \to ^{23}_{11}Na + ^{0}_{1}e + ^{0}_{0}\nu$. Массы нейтральных атомов магния и натрия соответственно равны $3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг и $3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг.

Дано:

$^{23}_{12}Mg \to ^{23}_{11}Na + ^{0}_{1}e + ^{0}_{0}\nu.$

$m_{Mg} = 3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг

$m_{Na} = 3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

Q — ?

Решение:

$$m^я_{Mg} = m_{Mg} - 12m_e,$$

$$m^я_{Na} = m_{Na} - 11m_e,$$

$$m^я_{Mg}c^2 = m^я_{Na}c^2 + T_{Na} + m_{e^+}c^2 + T_e + T_\nu,$$

$$m_{e^+} = m_e,$$

$$Q = T_{Na} + T_{e^+} + T_\nu = (m^я_{Mg} - m^я_{Na} - m_{e^+})c^2,$$

$$Q = (m_{Mg} - 12m_e - m_{Na} + 11m_e - m_e)c^2, \quad Q = (m_{Mg} - m_{Na} - 2m_e)c^2.$$

Ответ: $Q = 2{,}91$ МэВ.

400. Определить, является ли реакция $^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \to ^{7}_{4}Be + ^{1}_{0}n$ экзотермической или эндотермической. Найти энергию ядерной реакции.

Дано:

$m_{Li} = 11{,}65079 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{Be} = 11{,}65231 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

ΔE — ?

Решение:

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n,$$

$$\Delta E = (m_{Li} + m_H - m_{Be} - m_n)c^2.$$

Ответ: $\Delta E = -1{,}64$ МэВ; реакция эндотермическая.

401. Определить зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи ядерной реакции: 1) ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + x$; 2) ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + x$; 3) ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Решение:

1) ${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + x$; $Z = 1$, $A = 1$, ${}^{1}_{1}p$;

2) ${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + x$; $Z = 0$, $A = 1$, ${}^{1}_{0}n$;

3) ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; $Z = 0$, $A = 1$, ${}^{1}_{0}n$.

402. В процессе осуществления реакции $\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$ энергия E_0 фотона составляет 2,02 МэВ. Определить полную кинетическую энергию позитрона и электрона в момент их возникновения.

Дано:

$\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$

$E_0 = 2{,}02$ МэВ $= 3{,}23 \cdot 10^{-19}$ эВ

T — ?

Решение:

$$E_0 = 2mc^2 + T, \quad T = E_0 - 2mc^2.$$

Ответ: $T = 1$ МэВ.

403. Определить кинетическую энергию T и скорость v теплового нейтрона при температуре окружающей среды, равной 17 °C.

Дано:

$m_n = 1{,}675 \cdot 10–27$ кг

$t = 17$ °C

$T = 290$ К

E — ?

v — ?

Решение:

$$E = \frac{3}{2}kT, \quad E = \frac{m_n v^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m_n}}.$$

Ответ: $E = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж; $v = 2{,}68$ км/с.

404. Определить, во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной ядерной реакции за время $t = 10$ с, если среднее время жизни T одного поколения составляет 80 мс, а коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$.

Дано:

$t = 10$ с

$T = 80$ мс $= 8 \cdot 10^{-2}$ с

$k = 1{,}002$

N/N_0 — ?

Решение:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}, \quad N = N_0 e^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{\frac{(k-1)t}{T}}.$$

Ответ: $N/N_0 = 1{,}284$.

Задачи для самостоятельного решения

405. Определить, поглощается или выделяется энергия при ядерной реакции ${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0 n$. Найти эту энергию.

406. Записать недостающее обозначение x в следующих ядерных реакциях: 1) ${}^{10}_{5}\mathrm{B}\,(n, \alpha)\,x$; 2) ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}\,(\alpha, n)\,x$; 3) $x\,(p, n)\,{}^{37}_{18}\mathrm{Ar}$; 4) ${}^{3}_{2}\mathrm{He}\,(x, p)\,{}^{3}_{1}\mathrm{H}$; 5) $x\,(n, \alpha)\,{}^{3}_{1}\mathrm{H}$.

407. Дополните недостающее обозначение x в следующих ядерных реакциях:

1) ${}^{235}_{x}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{145}_{57}\mathrm{La} + x + 4\,{}^{1}_{0}n$;

2) ${}^{235}_{x}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{99}_{x}\mathrm{Zr} + {}^{135}_{x}\mathrm{Te} + x\,{}^{1}_{0}n$;

3) ${}^{232}_{x}\mathrm{Th} + {}^{1}_{0}n \to x + {}^{140}_{x}\mathrm{Xe} + 3\,{}^{1}_{0}n$;

4) ${}^{x}_{x}\mathrm{Pu} + {}^{1}_{0}n \to {}^{80}_{x}\mathrm{Se} + {}^{157}_{x}\mathrm{Nd} + 3\,{}^{1}_{0}n$.

408. Ядро урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, захватывая тепловой нейтрон, делится на два осколка с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^--распада. Записать реакцию деления, а также цепочку β^--распадов.

ОТВЕТ: **405.** 17,6 МэВ.

8.4. Элементы физики элементарных частиц

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

- Космическое излучение
- Типы взаимодействия элементарных частиц: сильное, электромагнитное, слабое, гравитационное
- Фотоны
- Адроны
- Мюоны и их свойства
- Мезоны и их свойства
- Классификация элементарных частиц
- Лептонное число
- Барионное число
- Закон сохранения лептонного числа
- Закон сохранения барионного числа
- Изотопический мультиплет
- Изотопический спин
- Принцип зарядового сопряжения
- Странность и закон ее сохранения
- Четность и закон ее сохранения
- Кварки

Примеры решения задач

409. Принимая, что энергия релятивистских мюонов в космическом излучении составляет 3 ГэВ, определить расстояние, проходимое мюонами за время их жизни, если собственное время жизни мюона $t_0 = 2{,}2$ мкс, а энергия покоя $E_0 = 100$ МэВ.

Дано:
$E = 3$ ГэВ $= 3 \cdot 10^9$ эВ
$t_0 = 2{,}2$ мкс $= 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с
$E_0 = 100$ МэВ $= 10^8$ эВ

l — ?

Решение:

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = t_0\frac{E}{E_0},$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2},$$

$$l = vt = c\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\cdot t_0\frac{E}{E_0}.$$

Ответ: $l = 19{,}8$ км.

410. Известно, что продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Записать цепочку реакций для π^+- и π^--мезонов.

Решение:

$$\pi^+ \to \mu^+ + {}^0_0\nu_\mu, \quad \mu^+ \to {}^{\;\,0}_{+1}e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu,$$

$$\pi^- \to \mu^- + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu, \quad \mu^- \to {}^{\;\,0}_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_\mu + {}^0_0\nu_\mu.$$

411. Выбрать из четырех типов нейтрино $(\nu_e, \tilde{\nu}_e, \nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu)$ правильное и написать недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

$$1)\ x + {}^1_0n \to {}^1_1p + {}^{\;\,0}_{-1}e;$$

$$2)\ x + {}^1_0n \to {}^1_1p + \mu^-;$$

$$3)\ x + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^{\;\,0}_{+1}e.$$

Решение:

1) ${}^0_0\nu_e + {}^1_0n \to {}^1_1p + {}^{\;\,0}_{-1}e$; 2) ${}^0_0\nu_\mu + {}^1_0n \to {}^1_1p + \mu^-$;

3) ${}^0_0\tilde{\nu}_e + {}^1_1p \to {}^1_0n + {}^{\;\,0}_{+1}e$.

412. Определить, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения лептонного заряда:

1) $p \to n + e^+ + \nu_e$; 2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$;

3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$; 4) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$.

Решение:

1) $p \to n \to e^+ + \nu_e$;
$(0) = (0) + (-1) + (+1)$, разрешен;
2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$;
$(0) = (+1) + (-1)$, разрешен;
3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$;
$(0) \neq (-1) + (+1) + (-1)$, запрещен;
4) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$;
$(0) = (-1) + (0) + (+1)$, разрешен.

413. Определить, какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения странности:

1) $p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$; 2) $p + \pi^- \rightarrow \Sigma^+ + K^-$;
3) $p + n \rightarrow \Lambda^0 + \Sigma^+$; 4) $p + \pi^- \rightarrow K^- + K^+ + n$.

Решение:
1) $p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$;
$(0) + (0) = (-1) + (+1)$, разрешен;
2) $p + \pi^- \rightarrow \Sigma^+ + K^-$;
$(0) + (0) \neq (-1) + (-1)$, запрещен;
3) $p + n \rightarrow \Lambda^0 + \Sigma^+$;
$(0) + (0) \neq (-1) + (-1)$, запрещен;
4) $p + \pi^- \rightarrow K^- + K^+ + n$,
$(0) + (0) = (-1) + (+1) + (0)$, разрешен.

Задачи для самостоятельного решения

414. Объяснить, какая характеристика элементарных частиц положена в основу деления адронов на мезоны и барионы.

415. Объяснить, к какой группе элементарных частиц и почему относятся: 1) Λ^0-гиперон; 2) протон; 3) таон; 4) π^0-мезон.

416. Перечислить, какие величины сохраняются в процессах взаимопревращаемости элементраных частиц, обусловленных слабым и сильным взаимодействиями.

Приложения

Основные единицы СИ

Метр (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299792458 с.

Килограмм (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платино-иридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

Секунда (с) — время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создает между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин (К) — 1/273,16 термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде ^{12}C массой 0,012 кг.

Кандела (кд) — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $\frac{1}{683}$ Вт/ср.

Дополнительные единицы СИ

Радиан (рад) — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср) — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Производные единицы физических величин

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Единицы геометрических и механических величин			
Площадь	$S = l^2$	$м^2$	*Квадратный метр* равен площади квадрата со сторонами, длины которых равны 1 м
Объем	$V = l^3$	$м^3$	*Кубический метр* равен объему куба с ребрами, длины которых равны 1 м
Скорость	$V = \frac{s}{t}$	м/с	*Метр в секунду* равен скорости равномерного и прямолинейного движения, при котором точка за 1 с перемещается на расстояние 1 м

Продолжение табл.

Наименование величины	*Единица: определяющее уравнение*	*обозначение*	*наименование и определение*
Ускорение	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$м/с^2$	*Метр в секунду в квадрате* равен ускорению прямолинейного ускоренного движения точки, при котором за 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	рад/с	*Радиан в секунду* равен угловой скорости равномерно вращающегося тела, все точки которого за 1 с поворачиваются на угол 1 рад
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$	$рад/с^2$	*Радиан в секунду в квадрате* равен угловому ускорению равноускоренно вращающегося тела, при котором оно за 1 с изменит угловую скорость на 1 рад/с
Частота периодического процесса	$\nu = \frac{1}{T}$	Гц	*Герц* равен частоте периодического процесса, при которой за 1 с совершается 1 цикл процесса
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	$кг/м^3$	*Килограмм на кубический метр* равен плотности однородного вещества, масса которого при объеме 1 $м^3$ равна 1 кг
Сила	$F = ma$	Н	*Ньютон* равен силе, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 $м/с^2$ в направлении действия силы: $1Н = 1 кг \cdot м/с^2$
Импульс	$p = mv$	кг · м/с	*Килограмм-метр в секунду* равен импульсу материальной точки массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с
Давление	$p = \frac{F}{S}$	Па	*Паскаль* равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 $м^2$: $1 Па = 1 Н/м^2$
Работа, энергия	$A = Fs$	Дж	*Джоуль* равен работе, совершаемой силой 1 Н на пути 1 м: $1 Дж = 1Н \cdot м$
Мощность	$N = \frac{A}{t}$	Вт	*Ватт* равен мощности, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: $1 Вт = 1 Дж/с$

Продолжение табл.

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Момент инерции	$J = mr^2$	кг · м^2	*Киллограмм-метр в квадрате* равен моменту инерции материальной точки массой 1 кг, находящейся от оси на расстоянии 1 м
Момент силы	$M = Fl$	Н · м	*Ньютон-метр* равен моменту силы, равной 1 Н, относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы
Момент импульса	$L = mvr$	кг · м^2/с	*Килограмм-метр в квадрате на секунду* равен моменту импульса материальной точки, движущейся по окружности радиусом 1 м и имеющей импульс 1 кг · м/с
Градиент скорости	$\left\lvert\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right\rvert$	с$^{-1}$	*Секунда в минус первой степени* равна градиенту скорости, при котором скорости слоев жидкости (газа), отстоящих друг от друга на расстоянии 1 м, отличаются на 1 м/с
Динамическая вязкость	$\eta = \dfrac{F}{S\left\lvert\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right\rvert}$	Па · с	*Паскаль-секунда* равен динамической вязкости среды, касательное напряжение в которой при ламинарном течении и градиенте скоростей слоев, находящихся на расстоянии 1 м по нормали направлению скорости, равной 1 м/с: $1\ Па \cdot с = 1\ Н \cdot с/м^2$
Кинематическая вязкость	$\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$	м^2/с	*Квадратный метр на секунду* равен кинематической вязкости среды с динамической вязкостью 1 Па · с и плотностью 1 кг/м^3
Единицы тепловых величин			
Количество теплоты, внутренняя энергия		Дж	*Джоуль* равен количеству теплоты, эквивалентному работе 1 Дж
Тепловой поток (тепловая мощность)		Вт	*Ватт* равен тепловому потоку, эквивалентному механической мощности 1 Вт

Продолжение табл.

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Градиент температуры	$\left\|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right\|$	К/м	*Кельвин на метр* равен температурному градиенту поля, в котором на участке длиной 1 м в направлении градиента температура изменяется на 1 К
Теплопроводность	$\lambda = \frac{Q}{\left\|\frac{\Delta T}{\Delta x}\right\|}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	*Ватт на метр-кельвин* равен теплопроводности вещества, в котором при стационарном режиме с поверхностной плотностью потока 1 Вт/м^2 устанавливается температурный градиент 1 К/м
Теплоемкость системы	$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$	Дж/К	*Джоуль на кельвин* равен теплоемкости системы, температура которой повышается на 1 К при подведении к системе количества теплоты 1 Дж
Удельная теплоемкость	$c = \frac{\mathrm{d}Q}{m\mathrm{d}t}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	*Джоуль на килограмм-кельвин* равен удельной теплоемкости вещества, имеющего при массе 1 кг теплоемкость 1 Дж/К
Молярная теплоемкость	$C_{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\nu\mathrm{d}t}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	*Джоуль на моль-кельвин* равен молярной теплоемкости вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль теплоемкость 1 Дж/К
Энтропия	$\frac{\delta Q}{T}$	Дж/К	*Джоуль на кельвин* равен изменению энтропии системы, которой при температуре *n* К в изотермическом процессе сообщается количество теплоты *n* Дж
Поверхностное натяжение	$\sigma = \frac{F}{l}$	$\frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$	*Ньютон на метр* равен поверхностному натяжению жидкости, создаваемому силой 1 Н, приложенной к участку контура свободной поверхности длиной 1 м и действующей нормально к контуру и по касательной к поверхности
Единицы электрических и магнитных величин			
Электрический заряд (количество электричества)	$Q = I\,t$	Кл	*Кулон* равен электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника при силе постоянного тока 1 А за время 1 с

Продолжение табл.

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = \frac{Q}{V}$	$Кл/м^3$	*Кулон на кубический метр* равен объемной плотности электрического заряда, при которой в объеме 1 $м^3$ равномерно распределен заряд 1 Кл
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{Q}{S}$	$Кл/м^2$	*Кулон на квадратный метр* равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по поверхности площадью 1 $м^2$, равен 1 Кл
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{Q}{l}$	Кл/м	*Кулон на метр* равен линейной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по нити длиной 1 м, равен 1 Кл
Напряженность электрического поля	$E = \frac{E}{Q_0}$	$\frac{Н}{Кл} = \frac{В}{м}$	*Ньютон на кулон* равен напряженности электрического поля в точке поля, в которой на точечный электрический заряд 1 Кл поле действует с силой 1 Н *Вольт на метр* равен напряженности однородного электрического поля, создаваемого разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности поля
Поток электрического смещения	$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$	Кл	*Кулон* равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом 1 Кл
Электрическое смещение		$Кл/м^2$	*Кулон на квадратный метр* равен электрическому смещению, при котором поток электрического смещения сквозь поперечное смещение площадью 1 $м^2$ равен 1 Кл
Электрический потенциал	$\varphi = \frac{A}{Q_0}$	В	*Вольт* равен потенциалу такой точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж: 1 Вт = 1 Дж/Кл
Электрическая емкость	$C = \frac{Q}{\varphi}$	Ф	*Фарад* равен электрической емкости такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл

Продолжение табл.

Наименование величины	Единица		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Электрический момент диполя	$p = \|Q\| l$	Кл · м	*Кулон-метр* равен электрическому моменту диполя, заряды которого, равные каждый 1 Кл, расположены на расстоянии 1 м один от другого
Поляризованность	$P = \frac{p}{V}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен поляризованности диэлектрика, при которой диэлектрик объемом 1 м^3 имеет электрический момент 1 Кл · м
Плотность электрического тока	$j = \frac{I}{S}$	А/м^2	*Ампер на квадратный метр* равен плотности электрического тока, при которой сила тока, равномерно распределенного по поперечному сечению проводника площадью 1 м^2, равна 1 А
Электрическое сопротивление	$R = \frac{U}{I}$	Ом	*Ом* равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А
Электрическая проводимость	$G = \frac{1}{R}$	См	*Сименс* равен проводимости участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = \frac{RS}{l}$	Ом · м	*Ом-метр* равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом
Удельная электрическая проводимость	$\sigma = \frac{1}{\rho}$	См/м	*Сименс на метр* равен удельной электрической проводимости проводника, который при площади поперечного сечения 1 м^2 и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См
Магнитная индукция	$B = \frac{F}{I l}$	Тл	*Тесла* равен магнитной индукции такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А: $1\ \text{Тл} = \frac{1\ \text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$

Продолжение табл.

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Магнитный поток	$\Phi = BS$	Вб	*Вебер* равен магнитному потоку, проходящему сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$
Напряженность магнитного поля	$H = \dfrac{B}{\mu_0}$	А/м	*Ампер на метр* равен напряженности такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл
Магнитный момент контура с током	$p = IS$	А · м^2	*Ампер-квадратный метр* равен моменту контура площадью 1 м^2, если по нему течет ток 1 А
Индуктивность	$L = \dfrac{\Phi}{I}$	Гн	*Генри* равен индуктивности такого контура, магнитный поток которого при токе 1 А равен 1 Вб: $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$
Намагниченность	$J = \dfrac{\Sigma p_a}{V}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен намагниченности, при которой вещество объемом 1 м^3 имеет магнитный момент 1 А · м^2
Единицы величин энергетической фотометрии и световых величин			
Энергия излучения	W	Дж	*Джоуль* равен энергии излучения, эквивалентной работе 1 Дж
Поток излучения	$\Phi_e = \dfrac{W}{t}$	Вт	*Ватт* равен потоку излучения, эквивалентному механической мощности 1 Вт
Энергетическая сила света (сила излучения)	$I_e = \dfrac{\Phi_e}{\omega}$	Вт/ср	*Ватт на стерадиан* равен энергетической силе света точечного источника, излучающего в телесном угле 1 ср поток излучения 1 Вт
Энергетическая яркость	$B_e = \dfrac{\Delta I_e}{\Delta S}$	$\dfrac{\text{Вт}}{\text{ср} \cdot \text{м}^2}$	*Ватт на стерадиан-квадратный метр* равен энергетической яркости равномерно излучающей плоской поверхностью площадью 1 м^2 в перпендикулярном ей направлении при силе излучения 1 Вт/ср

Окончание табл.

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Световой поток		лм	*Люмен* равен световому потоку, испускаемому точечным источником силой света 1 кд внутри телесного угла 1 ср (при равномерности поля излучения внутри телесного угла)
Светимость	$R = \frac{\Phi}{S}$	лм/м^2	*Люмен на квадратный метр* равен светимости поверхности площадью 1 м^2, испускающей световой поток 1 лм
Яркость	$B = \frac{I}{S}$	кд/м^2	*Кандела на квадратный метр* равна яркости светящейся поверхности площадью 1 м^2 при силе света 1 кд
Освещенность	$E = \frac{\Phi}{S}$	лк	*Люкс* равен освещенности поверхности, на 1 м^2 которой падает световой поток 1 лм
Единица радиационной величины			
Активность нуклида	$A = \left\lvert \frac{dN}{dt} \right\rvert$	Бк	*Беккерель* равен активности нуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада

Основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с
Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)
Постоянная Авогадро	$N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга	$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$
	$R' = 1{,}10 \cdot 10^7$ м$^{-1}$

Первый боровский радиус	$a_0 = 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
	$1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Масса изотопа ${}^1_1$H	$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})	д — деци (10^{-1})	н — нано (10^{-9})
Г — гига (10^9)	с — санти (10^{-2})	п — пико (10^{-12})
М — мега (10^6)	м — милли (10^{-3})	ф — фемто (10^{-15})
к — кило (10^3)	мк — микро (10^{-6})	а — атто (10^{-18})

Некоторые внесистемные величины

1 сут = 86400 с	$1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад
1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^7$ с	1 мм рт. ст. = 133,3 Па
$1^\circ = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
$1' = 1{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад	

Астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м	Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг	Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ м	Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг	Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м

Некоторые математические формулы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\, x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

Учебное издание

Трофимова Таисия Ивановна

Руководство к решению задач по физике

Учебное пособие для бакалавров

Формат $60\times90^1/_{16}$.
Гарнитура «PetersburgC». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,56. Тираж 1000 экз. Заказ №

ООО «ИД Юрайт»
140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1
Тел. (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru