

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвященная 110-ой годовщине со дня рождения
выдающегося математика

И. Г. ПЕТРОВСКОГО
(1901 – 1973)

XXIII совместное заседание Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 30 мая – 4 июня 2011

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2011

УДК 517.9 (063)

ББК 22.161.6я434 Петровский И.Г.

М43

Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2011. — 424 с.

Программный комитет

В. А. Садовничий, В. В. Козлов, Б. А. Дубровин, А. М. Ильин, С. П. Новиков, Я. Г. Синай, Д. В. Трещев, Л. Д. Фаддеев и руководители секций:

И. В. Астахова, Н. Х. Розов (*Обыкновенные дифференциальные уравнения*)
С. И. Похожаев, Е. В. Радкевич (*Уравнения с частными производными и математическая физика*)

Д. В. Аносов, В. М. Бухштабер, В. М. Закалюкин, Ю. С. Ильяшенко (*Динамические системы, солитоны и геометрия*)

В. Д. Степанов, А. А. Шкаликов (*Спектральная теория и функциональные пространства*)

В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий, А. С. Шамаев (*Асимптотические методы усреднения*)

Организационный комитет

В. А. Садовничий (Председатель, Ректор МГУ)

В. В. Козлов (Сопредседатель, Директор МИРАН им. В. А. Стеклова)

В. Н. Чубариков (Заместитель председателя)

А. С. Шамаев (Заместитель председателя)

А. А. Шкаликов (Заместитель председателя)

Секретариат конференции: И. В. Астахова, А. В. Боровских, В. В. Быко
А. А. Владимиров, А. Ю. Горицкий, И. А. Дынников, Т. О. Капустин
Е. С. Карулина, В. В. Палин, О. С. Розанова, М. С. Романов, А. М. Савчу
И. В. Филимонова, Г. А. Чечкин (ответственный секретарь), И. А. Шейпак

Конференция поддержана:

Российским фондом фундаментальных исследований

Российской Академией наук

Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова

Механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова

Издательством «Открытые системы»

ISBN 978-5-9556-0122-9

© Московский государственный университет, 2011

Функции Ляпунова и статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами

Родина Л. И. (Удмуртский государственный университет, Россия)

В этом докладе рассматриваются условия, при которых заданное множество M статистически инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t \sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$.

Предполагаем, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ выполнены условия:

- 1°. функция $(x, u) \rightarrow f(h^t \sigma, x, u)$ непрерывна;
- 2°. функция $t \rightarrow f(h^t \sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;
- 3°. функция $(t, x) \rightarrow U(h^t \sigma, x) \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ полунепрерывна сверху для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Для непрерывной функции $\sigma \rightarrow M(\sigma) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ и множество $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$. В предположении, что множество достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (1) в момент t из начального множества X существует при всех $t \geq 0$, рассмотрим характеристику

$$\text{freq}(\sigma, X) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t \sigma)\}}{\vartheta}, \quad (2)$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (2) существует, то $\text{freq}(\sigma, X)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости системы (1) множеством $M = \Sigma \times M(\sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество M называется *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (1), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\text{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1$, то есть $\nu\{\sigma \in \Sigma : \text{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1\} = 1$.

Скалярная функция $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества M , если она локально липшицева по (σ, x) и удовлетворяет условиям:

- 1°. $V(\sigma, x) \leq 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$;
- 2°. $V(\sigma, x) > 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$.

Через $V_{\max}^o(\sigma, x)$ будем обозначать *верхнюю производную* функции V в силу дифференциального включения, соответствующего системе (1).

Рассмотрим характеристику $\kappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t, \sigma) \leq 0\}}{\vartheta}$, где $z^*(t, \sigma)$ — верхнее решение скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t \sigma, z), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для всех $\sigma \in \Sigma_0$ для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения системы (1), удовлетворяющие начальному

условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, продолжаемы на полюсь $\mathbb{R}_+$. Предположим, что существуют функция $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и функция $w(\sigma, z)$ переменных $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, такие, что $V(\sigma, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и для всех $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$V_{\max}^o(\sigma, x) \leq w(\sigma, V(\sigma, x)).$$

Тогда, если $\kappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$, то множество M статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы (1).

Работа поддержана грантом Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№11.Г34.31.0039) и грантом РФФИ (№11-01-00380-а).

Об одном аналоге уравнения Эйлера

Родионов В. И. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Полное метрическое пространство $\langle \overline{\mathbb{R}}, \varrho \rangle$ состоит из расширенной числовой оси $\overline{\mathbb{R}}$ и метрики $\varrho(\xi, \eta) \doteq |f(\xi) - f(\eta)|$, где $\xi, \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(z) \doteq \frac{z}{1+|z|}$ при $z \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) \doteq -1$ и $f(\infty) \doteq 1$. Если I — это отрезок, интервал или полуинтервал, то через I_*^2 обозначим множество $\{(\tau, s) \in I^2 : \tau \neq s\}$. Всякая функция $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ порождает функцию двух переменных $\Phi_x(\tau, s) \doteq \frac{x(s) - x(\tau)}{s - \tau}$, определенную на множестве $[a, b]_*^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется RL-функцией, если существуют числа $A_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$, $t \in (a, b]$, и $B_x(t) \in \overline{\mathbb{R}}$, $t \in [a, b)$, такие, что

$$\forall t \in (a, b] \quad \lim_{\substack{(\tau, s) \in (a, t]_*^2 \\ (\tau, s) \rightarrow (t, t)}} \varrho(\Phi_x(\tau, s), A_x(t)) = 0,$$

$$\forall t \in [a, b) \quad \lim_{\substack{(\tau, s) \in [t, b)_*^2 \\ (\tau, s) \rightarrow (t, t)}} \varrho(\Phi_x(\tau, s), B_x(t)) = 0.$$

- 1°. Всякая кусочно-гладкая функция $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является RL-функцией, то есть $KC^1[a, b] \subset RL[a, b]$, в частности, $C^1[a, b] \subset RL[a, b]$.
- 2°. Любая функция $x \in RL[a, b]$ имеет ограниченное изменение.
- 3°. Если $x \in RL[a, b]$, то для почти всех $t \in [a, b]$ существует конечная производная $\dot{x}(t)$. Если $\dot{x}(t)$ конечно для некоторого $t \in (a, b)$, то $A_x(t) = B_x(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}$. Если $\dot{x}(a)$ конечно, то $B_x(a) = \dot{x}(a) \in \mathbb{R}$. Если $\dot{x}(b)$ конечно, то $A_x(b) = \dot{x}(b) \in \mathbb{R}$.
- 4°. Если $x \in RL[a, b]$, то функция $A_x : (a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна слева, а функция $B_x : [a, b) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна справа.
- 5°. Пусть $x \in RL[a, b]$. Функция A_x непрерывна в точке $t \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывна функция B_x . При этом $A_x(t) = B_x(t)$.

Пространство всех абсолютно непрерывных функций $x \in RL[a, b]$ обозначим через $RC \doteq RC[a, b]$, а его линейное подпространство, состоящее из функций, у которых все предельные числа $A_x(t)$ и $B_x(t)$ конечны, обозначим через $RS \doteq RS[a, b]$. Функции $x \in RC[a, b]$ называются *регулярно непрерывными*, а