Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Владимирский государственный университет
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И МЕХАНИКЕ

Тезисы докладов

Суздаль 2011

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.6
М43

Редакционная коллегия:

В. В. Козлов,	ответственный редактор, доктор физико-математических наук, академик РАН
А. А. Давыдов,	доктор физико-математических наук, профессор

В сборник включены тезисы докладов, представленных на Международной конференции по математической теории управления и механике.

Представляет интерес для научных работников, студентов и аспирантов.

ISBN 5-98419-041-9

© Коллектив авторов, 2011

О существовании статистически инвариантных множеств управляемых систем со случайными параметрами

Родина Л.И. (Россия)
Удмуртский государственный университет
rdl@uni.udm.ru

Тонков Е.Л. (Россия)
Удмуртский государственный университет
eltonkov@udm.ru

Эта работа посвящается исследованию статистически инвариантных множеств с вероятностью единица для управляемого объекта

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

параметризованного метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Напомним, что *метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств фазового пространства Σ; h^t — однопараметрическая группа измеримых преобразований фазового пространства Σ в себя; ν — вероятностная мера, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\nu(h^tA) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$.

Предполагаем, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и имеют место следующие условия: 1) для каждой точки $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0$ функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна; 2) для каждой точки $(\sigma, x, u) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна; 3) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна сверху для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Поставим в соответствие управляемой системе (1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $H(\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции

$(t,x) \to f\big(h^t\sigma, x, U(h^t\sigma, x)\big)$ при $(t_i, x_i) \to (0, x)$. Далее, как всегда, запись $\operatorname{co} H(\sigma, x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$.

Пусть задана непрерывная функция $\sigma \to M(\sigma) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$; построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ и внешнюю r-окрестность $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ границы множества $M(\sigma)$. В отличие от детерминированных систем, рассмотренных в работах [1], [2], в системах со случайными параметрами часто возникает ситуация, когда движение $t \to g^t\omega$, $\omega = (\sigma, M(\sigma))$ расширенной динамической системы (Ω, g^t), где $\Omega = \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, g^t определено ниже, находится в заданном множестве $M = \Sigma \times M(\sigma)$ с относительной частотой, равной единице, причем это происходит не для всех, а для почти всех $\sigma \in \Sigma$, относительно вероятностной меры ν. Поэтому для таких систем естественно рассматривать свойство статистической инвариантности, выполненное с вероятностью единица.

Обозначим через $D(t, \sigma, X)$ *множество достижимости* системы (1) в момент t из начального множества X. В предположении, что для заданного $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество $D(t, \sigma, X)$ существует при всех $t \geqslant 0$, рассмотрим характеристику

$$\operatorname{freq}(\sigma, X) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : D(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta}, \tag{3}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если предел (3) существует, то $\operatorname{freq}(\sigma, X)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $D(t, \sigma, X)$ системы (1) множеством M. Определим отображение $g^t\omega \doteq \big(h^t\sigma, D(t, \sigma, X)\big)$, где $\omega = (\sigma, X)$.

Определение. Множество M называется *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (1), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}\big(\sigma, M(\sigma)\big) = 1$, то есть $\nu\big\{\sigma \in \Sigma : \operatorname{freq}\big(\sigma, M(\sigma)\big) = 1\big\} = 1$.

Скалярная функция $V(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией А. М. Ляпунова* относительно множества M, если она локально липшицева по (σ, x) и удовлетворяет следующим условиям: 1) $V(\sigma, x) \leqslant 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$; 2) $V(\sigma, x) > 0$ для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times N_+^r(\sigma)$. Далее, для локально липшицевой функции $V(\sigma, x)$ *обобщенной производной* в точке (σ, x) по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий верхний предел

$$V^o(\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)} \frac{V(h^\varepsilon\vartheta, y+\varepsilon q) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

а выражение $V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \max\limits_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$ — *верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (2).

Предположим, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ скалярной задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0,\sigma)=0, \quad t \geqslant 0$$

существует для всех $t \geqslant 0$ и рассмотрим характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\nu(\Sigma_0)=1$ *и для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *для каждой точки* $x\in M(\sigma)$ *все решения включения (2), удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x)=x$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$. *Предположим, что существуют функция* $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$, *такие, что* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и для всех* $(\sigma,x)\in\Sigma_0\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство* $V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big)$.

Тогда, если $\varkappa(\sigma)=1$ *для всех* $\sigma\in\Sigma_0$, *то множество* M *статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы (1).*

Рассмотрен ряд примеров, в которых исследуются статистически инвариантные или статистически слабо инвариантные с вероятностью единица множества для линейной или билинейной управляемых систем со случайными параметрами. Для систем такого вида относительная частота $\operatorname{freq}(\sigma,X)$ оценивается с помощью характеристики

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая является относительной частотой попадания траектории решения $z(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma)=0, \quad t\geqslant 0 \tag{4}$$

в множество $(-\infty, 0]$. Получены достаточные условия, при которых для задачи (4) равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица.

Работа поддержана грантом Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№11.G34.31.0039) и грантом РФФИ (№11-01-00380-а).

Литература

[1] Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.

[2] Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.

ФАЗОВАЯ ТОПОЛОГИЯ ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗРЕШИМОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рябов П.Е. (Россия)
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
orelryabov@mail.ru

Уравнения Кирхгофа движения твердого тела в жидкости в общем случае имеют вид

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \alpha \times \frac{\partial H}{\partial M}, \tag{1}$$

где $M \in R^3$ – импульсивный момент, $\alpha \in R^3$ – импульсивная сила, $H = H(M, \alpha)$ – полная энергия. Известными интегралами системы