

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы»

посвященная 110-ой годовщине со дня рождения
выдающегося математика

И. Г. ПЕТРОВСКОГО

(1901 – 1973)

XXIII совместное заседание Московского математического общества
и семинара им. И. Г. Петровского

Москва, 30 мая – 4 июня 2011

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Москва, 2011

УДК 517.9 (063)
ББК 22.161.6я434Петровский И.Г.
М43

Международная конференция, посвященная 110-ой годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2011. — 424 с.

Программный комитет

В. А. Садовничий, В. В. Козлов, Б. А. Дубровин, А. М. Ильин, С. П. Новиков, Я. Г. Синай, Д. В. Трещев, Л. Д. Фаддеев и руководители секций:

И. В. Асташова, Н. Х. Розов (*Обыкновенные дифференциальные уравнения*)
С. И. Похожаев, Е. В. Радкевич (*Уравнения с частными производными и математическая физика*)

Д. В. Аносов, В. М. Бухштабер, В. М. Закалюкин, Ю. С. Ильяшенко (*Динамические системы, солитоны и геометрия*)

В. Д. Степанов, А. А. Шкаликов (*Спектральная теория и функциональные пространства*)

В. В. Жиков, А. Л. Пятницкий, А. С. Шамаев (*Асимптотические методы и усреднение*)

Организационный комитет

В. А. Садовничий (Председатель, Ректор МГУ)

В. В. Козлов (Сопредседатель, Директор МИРАН им. В. А. Стеклова)

В. Н. Чубариков (Заместитель председателя)

А. С. Шамаев (Заместитель председателя)

А. А. Шкаликов (Заместитель председателя)

Секретариат конференции: И. В. Асташова, А. В. Боровских, В. В. Быков, А. А. Владимиров, А. Ю. Горицкий, И. А. Дынников, Т. О. Капустина, Е. С. Карулина, В. В. Палин, О. С. Розанова, М. С. Романов, А. М. Савчук, И. В. Филимонова, Г. А. Чечкин (ответственный секретарь), И. А. Шейпак

Конференция поддержана:

Российским фондом фундаментальных исследований

Российской Академией наук

Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова

Механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова

Издательством «Открытые системы»

ISBN 978-5-9556-0122-9

© Московский государственный
университет, 2011

Решение задачи быстродействия для линейной нестационарной управляемой докритической системы с многомерным управлением
 Лукьянов В. В. (Удмуртский государственный университет, Россия)

Рассмотрим линейную нестационарную задачу быстродействия в нуль

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + T) = 0, \quad T \rightarrow \inf, \quad (2)$$

где функции $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$ непрерывны. Множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ — совокупность всех измеримых функций $u: \mathbb{R} \rightarrow U = [-1, 1]^r$.

Зафиксируем некоторую фундаментальную систему решений $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ и определим семейство непрерывных функций

$$\xi_i^j(t) = \psi_i(t)b^j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r,$$

где $b^j(t)$ — столбец матрицы $B(t)$ с номером j . Для фиксированных чисел $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ и ненулевого вектора $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $n_j = n_j(c)$ — количество геометрически различных корней функции $\xi^j(t; c) = c_1 \xi_1^j(t) + \dots + c_n \xi_n^j(t)$ на интервале $I_{t_0} = (t_0, t_0 + \sigma)$. Обозначим $\sigma(t_0)$ — точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на интервале I_{t_0} при любом ненулевом $c \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $n_1(c) + \dots + n_r(c) \leq n - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Систему (1) будем называть *докритической* в точке $t_0 \in \mathbb{R}$, если выполнено неравенство $\sigma(t_0) > 0$.

Далее предполагается, что система (1) докритическая в точке t_0 . Определим докритическое множество управляемости

$$D_{t_0} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_0 + \sigma(t_0)} X(t_0, s) B(s) u(s) ds.$$

Положим $\mathfrak{N} = \{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r : n_1 + \dots + n_r \leq n - 1\}$. Для каждого вектора $n = (n_1, \dots, n_r) \in \mathfrak{N}$ обозначим $c(n) = \{c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : n_1 = n_1(c), \dots, n_r = n_r(c)\}$ и определим множество

$$\Lambda_{t_0}^n = \bigcup_{c \in c(n)} \{(\delta_1(c), \dots, \delta_r(c))\}, \quad \text{где } \delta_j(c) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} \text{sign } \xi^j(t; c).$$

Для каждого вектора $n = (n_1, \dots, n_r) \in \mathfrak{N}$, каждого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in \Lambda_{t_0}^n$ и любого $\theta > 0$ обозначим через $\mathcal{U}_\delta^n(\theta)$ совокупность всевозможных кусочно-постоянных функций $u: \mathbb{R} \rightarrow U$, тождественно равных нулю вне интервала $(t_0, t_0 + \theta)$; каждая координатная функция $u_j(\cdot)$ на интервале $(t_0, t_0 + \theta)$ принимает значения ± 1 и имеет ровно n_j переключений, а δ_j — значение функции $u_j(\cdot)$ в правой окрестности точки t_0 . Построим множество $\mathcal{U}_{t_0} = \bigcup_{0 \leq \theta \leq \sigma(t_0)} \bigcup_{n \in \mathfrak{N}} \bigcup_{\delta \in \Lambda_{t_0}^n} \mathcal{U}_\delta^n(\theta)$ ($\mathcal{U}_\delta^n(0)$ состоит из тождественно равной нулю функции) и определим отображение $F_{t_0}: \mathcal{U}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с помощью равенства

$$F_{t_0}(u) = - \int_{t_0}^{t_0 + \sigma(t_0)} X(t_0, s) B(s) u(s) ds.$$

ТЕОРЕМА 1. Если управляемая система (1) докритическая в точке t_0 , то отображение $F_{t_0}: \mathcal{U}_{t_0} \rightarrow D_{t_0}$ является взаимно однозначным отображением множества управлений $\mathcal{U}_{t_0} \subset \mathcal{U}$ на докритическое множество управляемости D_{t_0} и для любой точки $x_0 \in D_{t_0}$ управление $\hat{u}(\cdot) = F_{t_0}^{-1}(x_0)$ является решением задачи (1)–(2).

О неустойчивости генеральных показателей относительно случайных возмущений

Луночкин М. А. (Костромской государственный университет им. Н. А. Некрасова, Россия)

Дано ограниченное линейное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

а также его допустимое случайное возмущение [2]

$$\dot{y} = (a(t) + c_\sigma(t, \omega))y, \quad (2)$$

где $\sigma \in (0, 1)$, а ω — элемент вероятностного пространства.

В работах [2], [3] исследован вопрос стохастической устойчивости показателей Ляпунова систем любого порядка. В частности доказано, что в рассматриваемом случае уравнения и его допустимого случайного возмущения показатель Ляпунова стохастически устойчив, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma' > 0$, что для всех $\sigma \in (0, \sigma')$ почти наверное выполняется неравенство $|\lambda(\omega; \sigma) - \lambda| < \varepsilon$.

Рассмотрим верхний и нижний генеральные показатели [1] κ_g, κ'_g для уравнения (1) и $\kappa_g(\omega; \sigma), \kappa'_g(\omega; \sigma)$ для уравнения (2). Будем считать, что генеральные показатели уравнения (1) конечны.

ТЕОРЕМА 1. Почти наверное для любого $\sigma \in (0, 1)$ выполняются равенства

$$\kappa_g(\omega; \sigma) = \infty, \quad \kappa'_g(\omega; \sigma) = -\infty.$$

Как видим, в случае генеральных показателей стохастическая устойчивость не наблюдается.

Список литературы

- [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [2] Миллиончиков В. М. К теории характеристических показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1970. Т. 7, № 4. С. 503–513.
- [3] Нгуен Динь Конг. О стохастической устойчивости показателей Ляпунова уравнений произвольного порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 914.

Классы функций Лиувилля-Киприянова

Ляхов Л. Н. (Воронежский государственный университет, Россия)
Феокистова А. А. (Липецкий государственный педагогический университет, Россия)

Пусть $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}^+$ и $1 \leq k \leq n \leq m \leq N$. Введем обозначения $u = (x, y) \in R_N^+$, $x = (u_1, \dots, u_n) \in R_n^+$, $y = (u_{n+1}, \dots, u_N) \in R_{N-n}^+$. Каждая из